

2. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Коллективная монография. / Под общ.ред. К.З.Галимова. - Казань: изд-во Казанск. ун-та, 1977. - 211 с.

3. Паймушин В.Н. Задача параметризации срединной поверхности оболочек со сложным контуром в плане и об одном методе ее решения. В кн.: Исследования по теории оболочек. - Тр. семинара / Казань, КФТИ КФАН СССР, 1978, вып.10, с.66-78.

4. Гарифуллин М.Ф. Динамика оболочки с подвижной заделкой. - Казань, 1981. - 7 с. - Рукопись представлена Казанск. авиац. ин-том Деп. в ВИНТИ, 28.05.81, № 2554-81.

5. Вахитов М.Б., Селин И.С., Гарифуллин М.Ф. Расчет на колебания несущих поверхностей с учетом изгиба хорды. - В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций, Межвузовский сборник, изд. КуАИ, 1980, с.11-15.

6. Григоленко Я.М., Кокосин С.С. К расчету оболочечных конструкций МКЭ. - Прикладная механика, т. 1У, № 7, 1979, с.3-10.

УДК 518.12:539.4

В.К.Дуплихин, Л.М.Савельев

## О ВЫЧИСЛЕНИИ ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ МАСС НА ОСНОВЕ СОГЛАСОВАННОЙ ФОРМУЛИРОВКИ

Применение диагональной матрицы масс в динамическом расчете конструкции, идеализированной по методу конечных элементов, имеет большие вычислительные преимущества по сравнению со случаем «согласованной» матрицы, имеющей ту же структуру ленточного типа, что и матрица жесткости. Простейший способ получения диагональной матрицы заключается в том, что масса каждого конечного элемента просто сосредоточивается в его узлах, поровну распределяясь между ними. Этот способ обладает физической наглядностью и при достаточно мелкой сетке позволяет получить приемлемую точность. Однако применение его к сложным элементам приводит к снижению скорости сходимости решения по энергии (и, следовательно, к ухудшению точности на реальных сетках) по сравнению со случаем

согласованной матрицы. Более эффективны методы вычисления диагональной матрицы, основанные на согласованной формулировке и позволяющие сохранить полную скорость сходимости. Остановимся здесь на двух таких методах, обладающих достаточной общностью и простотой.

Первый из них /1/, называемый в дальнейшем для краткости методом выделения диагонали, сводится к замене в обычной согласованной матрице масс каждого конечного элемента всех коэффициентов, за исключением диагональных, нулевыми. Полученная диагональная матрица умножается затем на нормирующий множитель  $\omega$ , выбираемый таким образом, чтобы общая масса конечного элемента была точно представлена оставшимися коэффициентами. Последующее объединение конечных элементов приводит к диагональной матрице масс всей конструкции. Числовые расчеты /1,2/ подтверждают высокую точность, достигаемую при таком подходе в некоторых задачах, но его строгого обоснования и оценки скорости сходимости не было дано.

Другой метод /3/, который назовем условно методом узлового интегрирования, заключается в применении такого правила интегрирования при вычислении матрицы масс конечного элемента, в котором узловые точки совпадают с узлами элемента. Подобная схема интегрирования, также приводящая к диагональной матрице, имеет более низкий порядок, нежели схема Гаусса, используемая для вычисления матрицы жесткости конечного элемента, но этот порядок оказывается достаточным для сохранения полной скорости сходимости.

В данной работе устанавливается связь между двумя упомянутыми методами и доказывается, что метод выделения диагонали также сохраняет скорость сходимости по энергии. Эффективность применения диагональной матрицы масс иллюстрируется на примере расчета сферической оболочки на динамические воздействия.

Рассмотрим типовой конечный элемент с узлами  $i, j, \dots, m$ . Пусть  $v^e = \{v_i, v_j, \dots, v_m\}$  - матрица узловых перемещений элемента, где  $v_i, v_j, \dots, v_m$  - матрицы перемещений его узлов. Обозначим через  $\alpha = [\alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_m]$  матрицу аппроксимирующих функций, связывающую матрицу перемещений  $u$  произвольной точки внутри элемента с  $v^e$  соотношением

$$u = \alpha v^e = \sum \alpha_z v_z. \quad (1)$$

Знак  $\Sigma$  означает здесь и далее суммирование по всем узлам элемента. Матрица деформаций  $\varepsilon$  выражается через узловые перемещения равенством вида

$$\varepsilon = \beta v^e = \Sigma \beta_z v_z, \quad (2)$$

где матрица  $\beta = [\beta_i \beta_j \dots \beta_m]$  образуется из элементов матрицы  $\alpha$  в соответствии с геометрическими соотношениями.

Матрица жесткости  $k^e$  и согласованная матрица масс  $m^e$  элемента даются равенствами /4/

$$k^e = \int_{\tau^e} \beta^T \alpha \beta d\tau, \quad (3)$$

$$m^e = \int_{\tau^e} \alpha^T \rho \alpha d\tau \quad (4)$$

или, при блочном вычислении,

$$k_{rs}^e = \int_{\tau^e} \beta_r^T \alpha \beta_s d\tau, \quad (5)$$

$$m_{rs}^e = \int_{\tau^e} \alpha_r^T \rho \alpha_s d\tau \quad (r, s = i, j, \dots, m), \quad (6)$$

где  $\alpha$  - матрица упругости,  $\rho$  - плотность материала; интегрирование в (3)-(6) выполняется по объему  $\tau^e$  конечного элемента.

Для сохранения полной скорости сходимости по энергии необходимо /5/ выполнять интегрирование в (3)-(6) по схеме порядка по крайней мере  $2(p-q)$ , где  $p$  - степень полных полиномов в аппроксимирующих функциях,  $q$  - порядок наивысших производных в выражениях для деформаций. Для вычисления  $k^e$  прибегают обычно к методу Гаусса как наиболее экономичному, тем более что в случае двумерных или трехмерных элементов приходится во избежание снижения ранга матрицы  $k^e$  применять более высокий порядок интегрирования, чем это требуется для сохранения скорости сходимости.

Что касается матрицы  $m^e$ , то здесь, как отмечено в /3/, удобнее использовать квадратурную формулу вида

$$\int_{\tau^e} f d\tau = \Sigma a_n f_n, \quad (7)$$

где  $f_n$  - значения функции  $f$  в узлах элемента,  $a_n$  - весовые коэффициенты.

Рассмотрим конечные элементы, для которых матрицы  $\alpha_z$  имеют вид  $\psi_z \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  - единичная матрица,  $\psi_z$  - скалярная функция (функция формы), имеющая единичное значение в узле  $z$  и обращающаяся в нуль в остальных узлах элемента. К этой категории относятся, например, изопараметрические конечные элементы сплошной среды. В случае  $\rho = \text{const}$  на основании (6) будем иметь

$$m_{rs}^e = \bar{m}_{rs} \mathbf{I}, \quad (8)$$

$$\bar{m}_{rs} = \rho \int_{\tau^e} \psi_r \psi_s d\tau. \quad (9)$$

Применение правила (7) к интегралу (9) дает

$$\bar{m}_{rs} = \rho \sum a_n \psi_{rn} \psi_{sn}, \quad (10)$$

где  $\psi_{rn}$ ,  $\psi_{sn}$  - значения функций  $\psi_r$ ,  $\psi_s$  в узле  $n$ . В случае  $r \neq s$  произведение  $\psi_{rn} \psi_{sn}$  равно нулю для любого  $n$ , так что на основании (10) имеем  $\bar{m}_{rs} = 0$  для  $r \neq s$ . Таким образом, правило интегрирования (7) непосредственно приводит к диагональной матрице  $m^e$ .

Для вычисления скалярных величин

$$\bar{m}_{rz} = \rho \int_{\tau^e} \psi_r^2 d\tau, \quad (11)$$

определяющих диагональные элементы матрицы  $m^e$ , возможны два пути. Во-первых, можно снова применить правило (7), которое дает значение

$$\bar{m}_{rz} = \rho a_z, \quad (12)$$

поскольку функция  $\psi_r^2$  равна единице в узле  $z$  и равна нулю в остальных узлах. Для определения весовых коэффициентов  $a_n$  в формуле (7) потребуем, чтобы эта формула давала точный результат для любой из функций  $\psi_z$ . Это приводит к выражению

$$a_z = \int_{\tau^e} \psi_z d\tau. \quad (13)$$

Таким образом, в соответствии с (12), (13) метод узлового интегрирования дает для  $\bar{m}_{rz}$  значения

$$\bar{m}_{zz} = \rho \int_{\tau^e} \psi_z d\tau, \quad (I)$$

причем интегрирование в (I4) должно осуществляться точно (аналитически либо, скажем, по методу Гаусса). При этом масса конечного элемента будет точно представлена матрицей  $m^e$ , поскольку

$$\Sigma \bar{m}_{zz} = \rho \int_{\tau^e} \Sigma \psi_z d\tau = \rho \int_{\tau^e} d\tau = \rho \tau^e,$$

как это следует из равенства /4/  $\Sigma \psi_z = I$ .

Можно, однако, вычислить  $\bar{m}_{zz}$  непосредственно по формуле (II), применив здесь также точное интегрирование. Это приводит к диагональной матрице  $m^e$ , у которой диагональные элементы совпадают с диагональными элементами согласованной матрицы масс. Хотя скорость сходимости по энергии будет здесь такой же, как и в случае согласованной матрицы масс, но решение при сгущении сетки будет сходиться к неверному результату, поскольку величины (II) всегда занижают массу конечного элемента:

$$\Sigma \bar{m}_{zz} = \rho \int_{\tau^e} \Sigma \psi_z^2 d\tau < \rho \tau^e.$$

Для исправления этого дефекта достаточно умножить полученную матрицу масс конечного элемента на коэффициент:

$$\omega = \frac{\rho \tau^e}{\Sigma \bar{m}_{zz}} = \left( \Sigma \int_{\tau^e} \psi_z^2 d\tau \right)^{-1} \int_{\tau^e} d\tau. \quad (I')$$

В итоге получится диагональная матрица  $m^e$  с точным представлением массы конечного элемента и совпадающая с матрицей масс в методе выделения диагонали. Тем самым показано, что во-первых, метод выделения диагонали можно трактовать как метод узлового интегрирования, но применяемый лишь к внедиагональным элементам матрицы масс. Во-вторых, метод выделения диагонали обеспечивает полную скорость сходимости по энергии. Этот метод более предпочтителен, нежели метод узлового интегрирования, поскольку он приводит к положительно определенной матрице масс. В методе узлового интегрирования отдельные узловые массы, определяемые согласно (I4), могут быть нулевыми и даже отрицательными /3/, и хотя это не мешает правильно воспроизводить наиболее

важные особенности динамического поведения конструкции, но могут оказаться помехой для использования некоторых методов интегрирования уравнений движения.

Все сказанное выше непосредственно обобщается на конечные элементы пластин и оболочек с независимой аппроксимацией перемещений и углов поворота /6-9/. В этом случае необходимо только поменять /4/ в формулах (4), (6) величину  $\rho$  произведением  $\rho \mathbf{D}$ , где  $\mathbf{D}$  - диагональная матрица. Элементы  $\mathbf{D}$ , соответствующие линейным смещениям, равны  $h$ , а угловым перемещениям -  $h^3/12$  ( $h$  - толщина элемента). Кроме того, единичная матрица в (8) заменяется матрицей  $\mathbf{D}$ , а интегрирование по объему элемента заменяется интегрированием по области  $S^e$ , занимаемой срединной поверхностью конечного элемента.

Те же результаты могут быть применены и в случае элементов пластин и оболочек, аппроксимация перемещений в которых осуществляется на основе гипотезы прямых нормалей. Гипотезу прямых нормалей уместно использовать лишь для вычисления матрицы жесткости  $\mathbf{k}^e$ , а для определения  $\mathbf{m}^e$  лучше исходить из независимой аппроксимации перемещений и углов поворота по их узловым значениям. Понижение порядка аппроксимации перемещений в матрице масс допустимо и не приводит к снижению скорости сходимости, поскольку в выражениях для деформаций здесь фигурируют уже не первые, а вторые производные от перемещений.

Для иллюстрации точности решения, получаемого с использованием диагональной матрицы масс, рассмотрим сначала сферическую оболочку с геометрическими параметрами, указанными на рис.1а. Оболочка выполнена из материала с модулем упругости  $E = 7,23 \text{ н.см}^{-2}$ , коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$  и плотностью  $\rho = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг.см}^{-3}$ . Изгибание оболочки осуществляется мгновенным приложением равномерного давления интенсивности  $68,9 \text{ н.см}^{-2}$  (рис.1б). Для идеализации конструкции использовались двухузловые конечные элементы изопараметрического типа с независимой аппроксимацией перемещений и углов поворота /7/. Расчет динамического поведения конструкции выполнялся путем прямого интегрирования уравнений движения методом Ньюмарка без искусственного демпфирования /10/. На рис.2 показано изменение по времени вертикального перемещения полюса оболочки (30 конечных элементов, шаг интегрирования  $1 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ) при использовании согласованной матрицы масс. Сопоставление этого

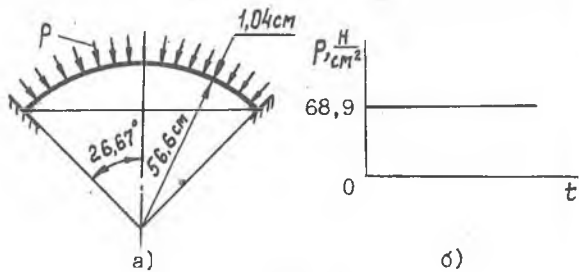


Рис. 1

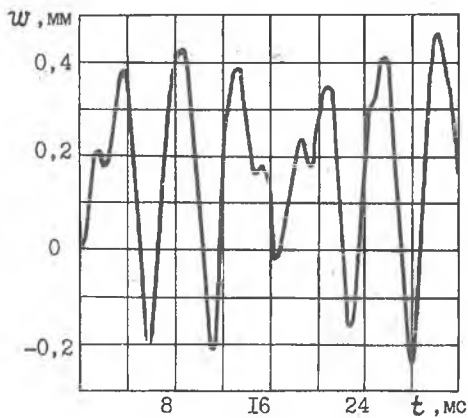


Рис. 2

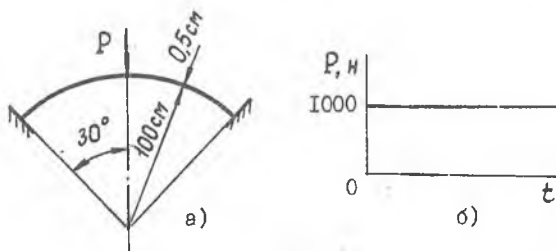


Рис. 3

сравнения с результатами, полученными с помощью матриц масс диагонального вида, представлено для двух моментов времени в таблице, где помимо перемещений даны также значения меридионального напряжения на внешней поверхности оболочки при  $\theta = 0,4445^\circ$ . Все варианты матрицы масс дают хорошее согласие результатов.

В другом примере сферическая оболочка, нагруженная мгновенно приложенной осевой сосредоточенной силой (рис. 3), имеет те же упругие характеристики и плотность, что и в предыдущем примере.

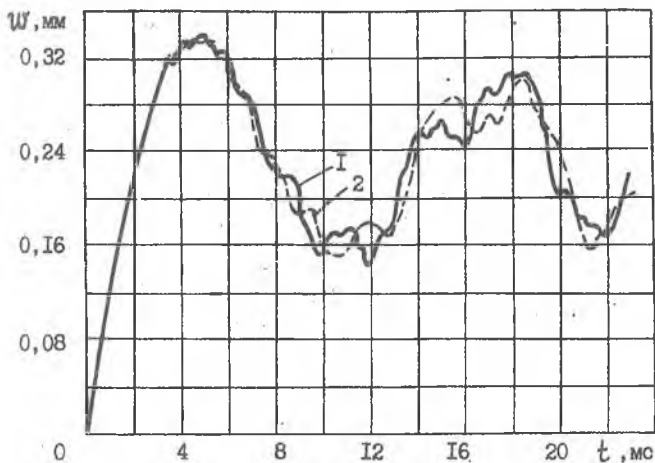


Рис. 4

Таблица

| Момент времени, мс | Вариант матрицы масс | Перемещение полюса, мм | Напряжение, МПа |
|--------------------|----------------------|------------------------|-----------------|
| 3,8                | согласованная        | 0,3859                 | -85,91          |
|                    | по методу [ I ]      | 0,3786                 | -79,93          |
|                    | по методу [ 3 ]      | 0,3787                 | -80,15          |
| 13,2               | согласованная        | 0,3939                 | -73,40          |
|                    | по методу [ I ]      | 0,4010                 | -86,75          |
|                    | по методу [ 3 ]      | 0,4075                 | -84,52          |



На рис.4 представлены зависимости 1, 2 перемещения полюса времени, полученные соответственно с согласованной матрицей масс и с матрицей масс, найденной по методу узлового интегрирования (30 конечных элементов, шаг интегрирования  $1 \cdot 10^{-5}$  с). Здесь наблюдается хорошее согласие результатов.

Таким образом, рассмотренные варианты диагональной матрицы масс обладают такими же характеристиками точности и сходимости, что и обычная согласованная матрица.

### Л и т е р а т у р а

1. Hinton E., Rock T., Zienkiewicz O.C. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. - *Earthquake Eng. and Struct. Dyn.*, 1976, 4, N3, p. 245-249.
2. Suzana K.S. Lumped mass matrices with non-zero inert for general shell and axisymmetric shell elements. - *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1978, 12, N11, p. 1635-1650.
3. Fried I., Malkus D.S. Finite element mass matrix lumping by numerical integration with no convergence rate loss. - *Int. J. Solids and Struct.*, 1977, 11, N4, p. 461-466.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 541 с.
5. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. - 351 с.
6. Hughes T.J.R., Taylor R.L., Kanoknukulchai W. A simple and efficient finite element for plate bending. - *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1977, 11, N10, p. 1529-1543.
7. Zienkiewicz O.C., Bauer J., Morgan K., Onate E. A simple and efficient element for axisymmetric shells. - *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1977, 11, N10, p. 1545-1558.
8. MacNeal R.H. A simple quadrilateral shell element. - *Comput. and Struct.*, 1978, 8, N2, p. 175-183.
9. Савельев Л.М. Простой четырехугольный конечный элемент произвольной тонкой оболочки. - В кн.: Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник, изд. КуАИ, вып. 5, 1979, с.58-63.

Ю. Bathe К.-г., Wilson E.L. Numerical methods in finite element analysis. - New York: Prentice-Hall, 1976, 544p.

УДК 539.319:620. I7-43.I

И.В.Григорьева

### ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ВАЛА ИЗ СТАЛИ 45ХНМФА-Ш

Вал из стали 45ХНМФА-Ш диаметром 48 мм и длиной 500 мм подвергался термообработке, шлифованию, раскатке, старению, заневоливанию кручением, обкатке и вновь заневоливанию по заводской технологии.

Для определения остаточных напряжений в тонком поверхностном слое вала был использован метод мелких кольцевых канавок.

Удаление слоев вала проводили на токарном станке. Каждый слой, толщиной 0,2 мм, удаляли за несколько проходов. Канавки имели следующие размеры:  $L = 30$  мм,  $K = 2$  (рис.1).

Для измерения деформаций на перемычку между канавками наклеивали в окружном и осевом направлениях по два фольговых тензорезистора с базой  $l = 10$  мм, расположенных в диаметрально противоположных точках. Тензометры подключали к тензостанции ВСТ-4. Измерения проводили после полного остывания вала. Применяли пятикритичную регистрацию, рассеивание практически отсутствовало; разница показаний дублирующих тензометров была в пределах I деления шкалы, что свидетельствует о достоверности результатов измерений. Для измерения глубины канавки применяли индикаторную головку часового типа. На рис.2 изображены результаты измерения деформаций.

Найдем зависимость между измеренными деформациями и остаточными напряжениями детали. На рис.1 изображено нагружение, эквивалентное нанесению канавок. На дне канавок действует радиальное остаточное напряжение, на боковых сторонах - осевое остаточное напряжение, взятое с обратным знаком. На перемычке между канавками показаны окружной и осевой тензорезисторы с базой  $l$ .