элементов авиационных конструкций. Межвузовский сборник. - Куйбышев: КуАИ, 1979, вып. 5, с.44-57.

3. Хазанов Х.С. К расчету цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями. - В кн.: Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Труды Куйбышев. авиац. ин-та им.С.П.Королева. - Куйбышев: КуАИ, 1967, вып. 29, с.3-17.

4. Карякин В.Б. Исследование эффективности некоторых изопараметрических конечных элементов оболочки. - Куйбышев, 1980. - 32 с.- Рукопись представлена Куйбышев. авиац. ин-том им.С.П.Королева. Деп. в ВИНИТИ 11 ноября 1980 г., № 4728-80 Деп.

5. Карякин В.Б., Хазанов Х.С. Расчет цилиндрической оболочки с вырезом, подкрепленным кольцом переменной жесткости. - Куйбышев, 1982. - 24 с. - Рукопись представлена Куйбышев. авиац. ин-том им. С.П.Королева. Деп. в ВИНИТИ 22.04.82 г., № 1963-82 Деп.

6. Чехов В.Н. О распределении напряжений в цилиндрической оболочке с эллиптическим отверстием. - Прикл. механика, 1971, 7, № 11, с.41-46.

УДК 539.3

Н.Н.Столяров, Р.Н.Додзина

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ПАНЕЛЕЙ

В работе предлагается алгоритм исследования устойчивости и покритического поведения гибких прямоугольных в плане панелей, находящихся под действием поперечной нагрузки. Алгоритм основан на комбинации методов конечных разностей, дифференцирования по параметру /1/ и приеме использования в качестве параметра прослеживания равновесных состояний прогиба в центре. Предлагается эффективная процедура решения линеаризованной системы уравнений.

Для панелей с различными условиями закрепления кромок получены значения верхней - $P_в$ и нижней - $P_н$ критических нагрузок. Установлены значения параметра кривизны панели, при которых возникает явление хлопка. Исследовано влияние на критические нагрузки, напряжения и прогибы числа разбиений сетки и величины шага по параметру прослеживания равновесных состояний. Полученные решения хорошо согласуются с известными в литературе результатами /2,3/. Разработанный алгоритм реализован в программе на языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1022.

1. Основные зависимости. Рассмотрим прямоугольную в плане оболочку со сторонами $2a$, $2b$ и толщиной $\bar{h}$ которая находится под действием поперечной нагрузки интенсивности $\bar{p}$.

Введем обозначения: $\bar{\Phi}$ - функция усилий, $\bar{w}$ - прогиб, E - модуль упругости, ν - коэффициент Пуассона, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ - полные напряжения, $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ - кривизны оболочки.

Вводя безразмерные параметры

$$x=\frac{\bar{x}}{a},\quad y=\frac{\bar{y}}{b},\quad \lambda=\frac{b}{a},\quad K_1=\frac{4\bar{K}_1 a^2}{\bar{h}},\quad K_2=\frac{4\bar{K}_2 b^2}{\bar{h}},$$

$$\Phi=\frac{\bar{\Phi}}{E\bar{h}^3},\quad p=\frac{16\bar{p}b^4}{E\bar{h}^4},\quad \sigma_x=\frac{\bar{\sigma}_x b^2}{E\bar{h}^2},\quad \sigma_y=\frac{\bar{\sigma}_y b^2}{E\bar{h}^2},\quad w=\frac{\bar{w}}{\bar{h}},$$

запишем исходную систему нелинейных дифференциальных уравнений в смешанном виде:

$$L_1(\Phi,K_1,K_2)-\lambda^2 w_{xy}^2+\lambda^2 w_{xx}w_{yy}=0,$$

$$L_2(w,K_1,K_2)-\lambda^2 w_{xx}\Phi_{yy}-\lambda^2 w_{yy}\Phi_{xx}+2\lambda^2 w_{xy}\Phi_{xy}=\frac{p}{16},$$

$$L_1(\Phi,K_1,K_2)=\lambda^4\Phi_{xxxx}+2\lambda^2\Phi_{xxyy}+\Phi_{yyyy}+0{,}25\lambda^2(K_1 w_{yy}+K_2 w_{xx}),$$

$$L_2(w,K_1,K_2)=\frac{1}{12(1-\nu^2)}(\lambda^4 w_{xxxx}+2\lambda^2 w_{xxyy}+w_{yyyy})-0{,}25\lambda^2(K_1\Phi_{yy}+K_2\Phi_{xx}).\quad (1)$$

Система (1) дополняется граничными условиями шарнирного опирания или защемления кромок оболочки.

2. Метод решения нелинейной задачи. В качестве основного параметра нелинейной системы t брался прогиб в центре $t\equiv w_0$ или интенсивность поперечной нагрузки $t\equiv p$. Продифференцировав (1) и граничные условия по параметру t при $t\equiv w_0$, получим

$$L_1(\dot{\Phi},K_1,K_2)-2\lambda^2 w_{i,xy}\dot{w}_{xy}+\lambda^2(w_{i,xx}\dot{w}_{yy}+w_{i,yy}\dot{w}_{xx})=0,$$

$$L_2(\dot{w},K_1,K_2)-\lambda^2(w_{i,xx}\dot{\Phi}_{yy}+\Phi_{i,yy}\dot{w}_{xx}+w_{i,yy}\dot{\Phi}_{xx}+$$
$$+\Phi_{i,xx}\dot{w}_{yy}-2w_{i,xy}\dot{\Phi}_{xy}-2\Phi_{i,xy}\dot{w}_{xy}=\frac{\dot{p}}{16},$$

$$w_i = \sum_{s=0}^{i} \Delta w_s, \quad \Phi_i = \sum_{s=0}^{i} \Delta \Phi_s, \tag{2}$$

...е w_i, Φ_i – накопленные за i этапов нагружения функции про...
...и напряжений; Δw_s, $\Delta\Phi_s$ – приращения функций на этапе с номером s; $\dot{w}$, $\dot{\Phi}$ – производные по параметру t.

Заменяя в (2) и в продифференцированных граничных условиях производные по пространственным переменным x, y разностными выражениями, получим систему линейных уравнений. Эту систему после исключения неизвестных в контурных и законтурных точках запишем в операторном виде

$$L_h \dot{\bar{u}} = \bar{f}_h, \tag{3}$$

где $\dot{\bar{u}} \equiv (\dot{\Phi}_i, \dot{w}_i)$ – вектор „скоростей" размерности $2N_h$, (N_h – число внутриконтурных узлов сетки), $L_h = L_{1h} + L_{2h}$; L_{1h} – квадратная матрица размерности $2N_h$; L_{2h} – разностный аналог членов системы (2), содержащих переменные коэффициенты; $\bar{f}_h$ – известный вектор.

Вследствие эволюционного характера системы (3) необходимо задание начальных условий

$$\bar{u}\Big|_{t=0} = \bar{u}_0. \tag{4}$$

По известному в момент „времени" t_0 вектору $\bar{u}$ вычисляем коэффициенты системы (3), решая которую, находим вектор „скоростей" $\dot{\bar{u}}$. Система (3) и начальные условия (4) определяют задачу Коши, для решения которой используем шаговый процесс

$$\bar{u}_{s+1} = \bar{u}_s + \Pi(\bar{u}_s)\Delta t, \quad \dot{\bar{u}}_s = \Pi(\bar{u}_s), \quad s = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где s – номер шага, Δt – приращение основного параметра.

Эффективность алгоритма в значительной степени зависит от метода решения линеаризованной системы уравнений (3). Предлагаемый здесь метод решения (3) имеет вид

$$L_{1h} \frac{\dot{\bar{u}}_h^{(k+1)} - \dot{\bar{u}}_h^{(k)}}{\gamma} = -(L_h \dot{\bar{u}}^{(k)} - \bar{f}_h), \tag{6}$$

где $\gamma > 0$ – итерационный параметр. Сходимость процесса итераций (6) определяется выбором L_{1h}. Здесь L_{1h} в (6) выбирается так, что при $L_{2h} = 0$, $L_{1h} \equiv L_h$.

Из (6) имеем

$$\dot{\bar{u}}_h^{(\kappa+1)} = \dot{\bar{u}}^{(\kappa)} - \gamma L_{1h}^{-1}(L_h \dot{\bar{u}}^{(\kappa)} - \bar{f}_h), \tag{7}$$

и легко заметить, что в случае $L_{2h} \equiv 0$ и $\gamma = 1$ решение (3) находится за одну итерацию. При решении геометрически нелинейной задачи операторы L_{1h} и L_h также „близки", что обеспечивает высокую эффективность метода.

Алгоритм реализации метода (6) следующий:

1. Вычисляется обратная матрица L_{1h}^{-1}.
2. По известным $\bar{u}_h$ и „скоростям" $\dot{\bar{u}}_h$ находится $g = \gamma(L_h \dot{\bar{u}}^{(\kappa)} - f_h)$.
3. Используя (7), определяем $\dot{\vec{u}}^{(\kappa+1)}$.
4. После решения системы (3), используя (5), находим $\bar{u}_{s+1}$, и затем пункты 2,3,4 повторяются для следующего шага по основному параметру.

В программе предусмотрена процедура выбора параметра γ, а его первоначальное значение обычно принималось $\gamma = 0{,}8 \div 1$. При $\gamma = 1$ предлагаемый метод можно рассматривать как одну из модификаций метода Ньютона, в которой матрица L_{1h} не меняется ни в процессе итераций решения (3), ни при смене шага по t.

3. Р е з у л ь т а т ы в ы ч и с л е н и й. Примеры расчета даются для квадратных панелей и пластин, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки. На рис. I для шарнирно опертых, а на рис. 2 для защемленных панелей различной кривизны приведены зависимости интенсивности нагрузки от прогиба в центре. Установлено, что явление хлопка наступает для шарнирно опертых панелей при кривизнах $K_2 \geqslant 40$, а для защемленных – $K_2 \geqslant 60$.

В таблице I приведены значения верхних критических нагрузок и соответствующие прогибы в центре для шарнирно опертых панелей – строка I и защемленных – строка 2. Результаты получены на сетке I2 x I2 при $\Delta t = 0{,}03125$.

Для шарнирно опертой панели $\lambda = 1$, $K_1 = 0$, $K_2 = 40$ значение нижней критической нагрузки $P_н = 69{,}0$; при этом прогиб в центре $w_0 = 3{,}62$.

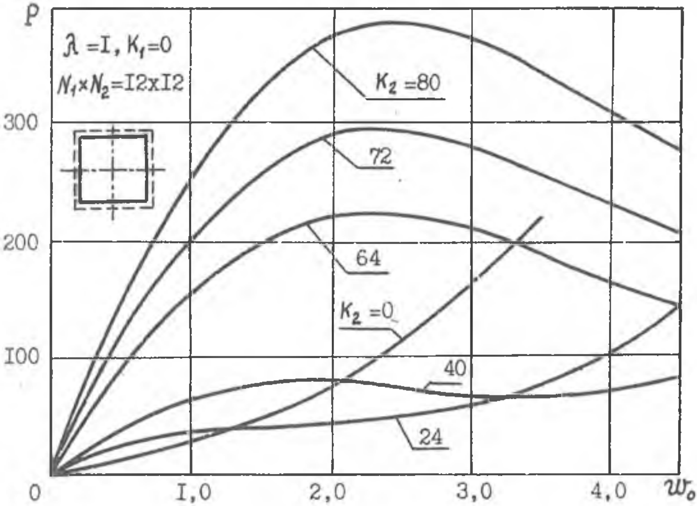
P
λ =I, K₁=0
N₁×N₂=I2xI2
K₂ =80
72
64
K₂ =0
40
24
300
200
I00
0
I,0
2,0
3,0
4,0
w₀

Рис.I

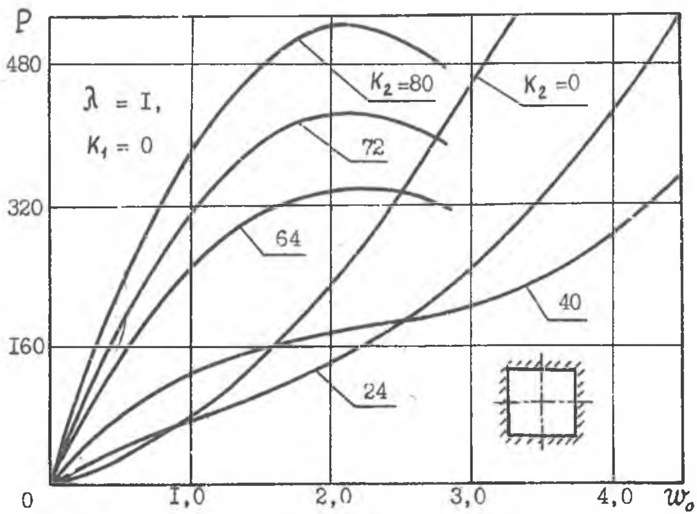
P
480
320
I60
0
λ = I,
K₁ = 0
K₂ =80
72
64
K₂ =0
40
24
I,0
2,0
3,0
4,0
w₀

Рис. 2

Таблица I

	K_2	40	64	72	80
I	$P_в$	80,0	2I9,6	292,I	380,5
	w_o	I,92	2,25	2,34	2,44
2	$P_в$		333,6	420,8	525,3
	w_o		2,I0	2,09	2,09

В таблице 2 даны результаты исследования влияния на $P_в$ и $P_н$ числа разбиений сетки, расчеты проведены на сетках 8 x 8, I0 x I0, I2 x I2 для шарнирно опертых панелей.

Таблица 2

$N_1 \times N_2$ \ K_2	40				64		72	
	$P_в$	w_o	$P_н$	w_o	$P_в$	w_o	$P_в$	w_o
8 x 8	80,8	I,88	69,2	3,62	225,7	2,I6	302,4	2,25
I0 x I0	80,2	I,9I	69,I	3,69	22I,5	2,22	295,4	2,34
I2 x I2	80,0	I,92	69,0	3,62	2I9,6	2,25	292,I	2,34

Величина шага по параметру прослеживания равновесных состояний Δt определялась путем расчета одного и того же варианта для различных Δt. Этот расчет позволяет определить значение Δt такое, что дальнейшее измельчение Δt не приводит к изменению результатов в пределах заданной точности. В таблице 3 приведены значения верхней критической нагрузки, полученные на сетке 8 x 8 для шарнирно опертой панели λ = I, $K_1 = 0$, $K_2 = 40$ при различных шагах. Здесь в столбце 5 приведены результаты работы /2/, полученные методом конечных разностей с использованием метода общей итерации /4/, а в столбце 6 - статьи /3/, где нелинейная задача решалась методом Бубнова-Галеркина.

Итерационный процесс решения системы (3) заканчивался при выполнении условия

$$\|r^{(k)}\| < \varepsilon, \quad \text{где} \quad \|r^{(k)}\| = \sqrt{h_1 h_2 \sum_{i \in N_h} (L_h \bar{u} - \bar{f}_h)_i^2} \ ,$$

h_1, h_2 - шаги сетки. При вычислениях бралось ε = 0,0I и ε =0,00I. Сравнение решений при этих двух значениях показало, что напряжения и прогибы с точностью пяти значащих цифр совпадают.

Таблица 3

N	I	2	3	4	5	6
Δt	0,I25	0,0625	0,03I25	0,0I562		
P_B	84,9	82,I	80,8	80,I	79,2	79,I
W_0	I,875	I,875	I,875	I,875	2,0	2,0

Машинное время, затрачиваемое на расчет одного шага при Δt = 0,03I25 на сетке I2 x I2, составляет не более I5 секунд, и для вычисления P_B в каждом из вариантов потребовалось около I3 мин.

Литература

I. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. - ДАН СССР, т.88, I953, вып.4.

2. Столяров Н.Н. Большие прогибы пологой оболочки со свободно смещающимися краями при смешанных граничных условиях. - Волжский математический сборник, вып.8, Куйбышев, I97I.

3. Столяров Н.Н., Дедов Н.И. Численная реализация метода Бубнова-Галеркина на ЭВМ при решении нелинейных задач теории пологих оболочек. Исследования по теории пластин и оболочек. Сб. IX.- Казань, Казанский университет, I972.

4. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. - М.: Наука, I964.