

Приведенные результаты подтверждают достаточно высокую эффективность предложенного конечного элемента и разработанной программы расчета для ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Леонов В.И., Канова Г.В., Беляева В.И. К расчету напряженно-деформированного состояния подкрепленных оболочек вращения при неосесимметричном нагружении. - В кн.: Прочность и долговечность элементов конструкций летательных аппаратов. Межвуз. сб. - Куйбышев: КуАИ, 1984, с. 7-18.

2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Перевод с английского. - М.: Мир, 1975. - 542 с.

3. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высшая школа, 1985. - 392 с.

4. Zienkiewicz O.C., Bauer J., Morgan K., Onate E. A Simple and efficient element for axisymmetric shells. - *Int. Journ. for Numer. Meth. in Engine*, 1977, v. 11, s. 1545 - 1558.

5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. - М.: Машиностроение, 1977. - 488 с.

УДК 629.7.02:534.1

Н.А.Калугин, Л.М.Савельев

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЗАДАЧЕ О КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Пусть контактирующие тела α и β (рис.1) находятся в равновесии под действием узловых сил $P_{(i)}^{\alpha}$ и $P_{(i)}^{\beta}$.

Здесь и далее величина с индексом $\alpha(\beta)$ принадлежит телу $\alpha(\beta)$. Нижний индекс i в скобках означает то, что данная величина отвечает i -му уровню внешней нагрузки. Узловые перемещения $V_{(i)}^{\alpha}$ и $V_{(i)}^{\beta}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия /1/:

$$K^{\ell} V_{(i)}^{\ell} = P_{(i)}^{\ell} \quad (\ell = \alpha, \beta), \quad (I)$$

где K^{ℓ} - матрица жесткости тела ℓ ($\ell = \alpha, \beta$).

Пусть далее внешние нагрузки получили приращение. Новые значе-

ния узловых сил $P_{(i+1)}^a$ и $P_{(i+1)}^b$ и узловых перемещений $V_{(i+1)}^a$, $V_{(i+1)}^b$ должны удовлетворять уравнениям

$$K^e V_{(i+1)}^e = P_{(i+1)}^e \quad (\ell = a, b). \quad (2)$$

При этом, если узел j тела a находится в контакте с узлом j тела b (рис. I), то векторы приращений перемещений данных узлов связаны соотношением

$$\Delta \bar{r}_j^b = \Delta \bar{r}_j^a + \bar{\delta}_j, \quad (3)$$

где $\Delta \bar{r}_j^e$ - вектор приращения линейных перемещений в узле j тела ℓ ($\ell = a, b$); $\bar{\delta}_j$ - вектор проскальзывания узла j тела b относительно узла j тела a (направлен по касательной к поверхности контакта).

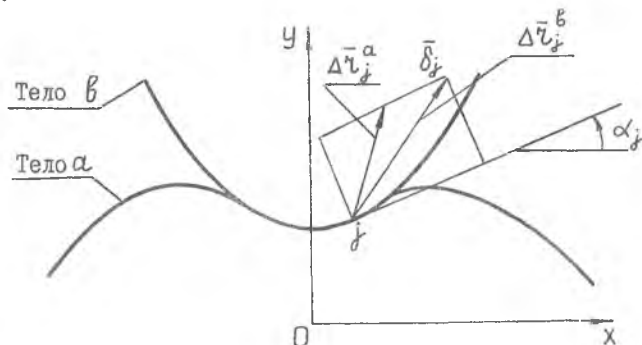


Рис. I

Проекции вектора $\Delta \bar{r}_j^e$ ($\ell = a, b$) на оси координат OX и OY обозначаются через Δu_j^e и Δv_j^e ($\ell = a, b$). Для простоты предполагается, что в контактирующих узлах не приложено никаких нагрузок, кроме сил контактного взаимодействия. Тогда уравнения (2) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{(i+1)}^e \\ u_{(i+1)}^e \\ v_{(i+1)}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{(i+1)}^e \\ x_{(i+1)}^e \\ y_{(i+1)}^e \end{bmatrix} \quad (\ell = a, b). \quad (4)$$

Здесь u , v - перемещения контактирующих узлов в направлении осей OX и OY соответственно; W - остальные перемещения.

Отметим, что согласно третьему закону Ньютона составляющие контактных усилий, действующих на тела a и b , равны по величине и противоположны по направлению, т.е.:

$$X_{(i+1)}^a = -X_{(i+1)}^b, \quad y_{(i+1)}^a = -y_{(i+1)}^b. \quad (5)$$

Для исключения из уравнений равновесия неизвестных сил контактного взаимодействия составляется уравнение равновесия системы тел как единого целого.

С помощью равенства (3) можно получить соотношение, связывающее перемещения контактирующих узлов тел a и b :

$$\begin{aligned} u_{(i+1)}^b &= u_{(i+1)}^a + u_{(i)}^b - u_{(i)}^a + C\delta \\ v_{(i+1)}^b &= v_{(i+1)}^a + v_{(i)}^b - v_{(i)}^a + S\delta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь δ - матрица-столбец проскальзываний контактирующих узлов тела b относительно узлов тела a ; C и S представляют собой диагональные матрицы, содержащие, соответственно, косинусы и синусы узлов между касательной к поверхности контакта в соответствующем узле и осью OX .

Рассмотрим случай, когда между контактирующими поверхностями тел a и b имеет место трение. Разложим силу \bar{R}_j^b , действующую в узле j на тело b со стороны тела a , на две составляющие - касательную T_j и нормальную N_j (рис.2).

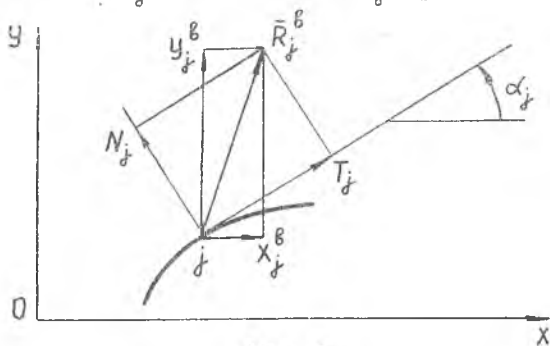


Рис. 2

В том случае, когда для устранения проскальзывания в узле требуется касательная сила, абсолютное значение которой превышает величину $|fN_j|$ (f - коэффициент трения скольжения), в узле появ-

лиется проскальзывание тела β относительно тела α . Будем считать, что в этом случае составляющая T_j равна по модулю $|fN_j|$ и направлена в сторону, противоположную проскальзыванию тела β относительно тела α в данном узле.

Тогда можно прийти к соотношению, связывающему составляющие X_j^{β} и Y_j^{β} силы R_j^{β} :

$$\cos \alpha_j X_j^{\beta} + \sin \alpha_j Y_j^{\beta} = f \eta_j (\cos \alpha_j Y_j^{\beta} - \sin \alpha_j X_j^{\beta}).$$

Здесь $\eta_j = \pm 1$ - коэффициент, определяющий направление силы трения. Обозначив через η диагональную матрицу коэффициентов η_j , запишем соотношение

$$C X_{(i+1)}^{\beta} + S Y_{(i+1)}^{\beta} + f \eta (S X_{(i+1)}^{\beta} - C Y_{(i+1)}^{\beta}) = 0. \quad (7)$$

Используя (5), (6), (7), можно прийти к следующему уравнению равновесия:

$$(K_1 + K_2) \begin{bmatrix} W_{(i+1)}^{\alpha} \\ W_{(i+1)}^{\beta} \\ \delta_{\alpha} \\ u_{(i+1)}^{\alpha} \\ v_{(i+1)}^{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{(i+1)}^{\alpha} \\ P_{(i+1)}^{\beta} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{(i)}^{\alpha} - u_{(i)}^{\beta} \\ v_{(i)}^{\alpha} - v_{(i)}^{\beta} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11}^{\alpha} & 0 & 0 & K_{12}^{\alpha} & K_{13}^{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{\alpha} & 0 & 0 & K_{22}^{\alpha} & K_{23}^{\alpha} \\ K_{31}^{\alpha} & 0 & 0 & K_{32}^{\alpha} & K_{33}^{\alpha} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^{\beta} & A_1^T & K_{12}^{\beta} & K_{13}^{\beta} \\ 0 & A_1 + B_1 & (A_2 + B_2)C + (A_3 + B_3)S & A_2 + B_2 & A_3 + B_3 \\ 0 & K_{21}^{\beta} & A_2^T & K_{22}^{\beta} & K_{23}^{\beta} \\ 0 & K_{31}^{\beta} & A_3^T & K_{32}^{\beta} & K_{33}^{\beta} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$$A_m = CK_{2m}^B + SK_{3m}^B \quad (m = 1, 2, 3) \quad (II)$$

$$B_m = f \eta (SK_{2m}^B - CK_{3m}^B) \quad (m = 1, 2, 3). \quad (I2)$$

Верхний индекс T в (10) означает транспонирование матрицы. Уравнение (8) положено в основу решения статической задачи о контакте полусферической оболочки, нагруженной по свободному краю равномерно распределенной нагрузкой, с упругим полупространством.

Полупространство моделировалось закрепленной по внешней границе областью, ограниченной полусферой конечного радиуса. Для ее аппроксимации использовался набор из 45 четырехугольных и 5 треугольных изопараметрических элементов второго порядка для осесимметричной задачи /2/. Оболочка аппроксимировалась 30 изопараметрическими конечными элементами второго порядка /2/. Узлы конечного элемента оболочки располагались на внешней поверхности полусферы. Чтобы обеспечить совпадение контактирующих узлов оболочки и полупространства, для каждого уровня нагрузки производилась перестройка конечноэлементной сетки полупространства.

Численные расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1040. При решении задачи приняты следующие исходные данные: внешний радиус оболочки $R = 10$ м; толщина оболочки $h = 0,1$ м; модуль упругости материала оболочки и полупространства $E^a = E^k = 1 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; суммарная нагрузка, приложенная к оболочке, $P^B = 1 \cdot 10^6$ Н; коэффициент трения скольжения $f = 0$.

Исследованы два варианта решения задачи. В первом варианте нагрузка прикладывалась равными ступенями. При этом уточнение условий контакта производилось лишь при каждом новом значении нагрузки. Во втором варианте нагружение также осуществлялось ступенчато, но на каждом этапе с помощью последовательных приближений определялось промежуточное значение нагрузки, при котором изменялись условия контакта; тем самым точно фиксировался момент вступления в контакт новых узлов.

На рисунках 3 и 4 приведены значения вертикальных V_y и радиальных V_x перемещений узлов границы полупространства, через n обозначено число ступеней нагружения. Из сравнения перемещений, вычисленных по первому и второму варианту, следует, что при малом количестве ступеней нагрузки необходимо фиксировать момент вступления в контакт очередных узлов, иначе это может привести к неверным результатам.

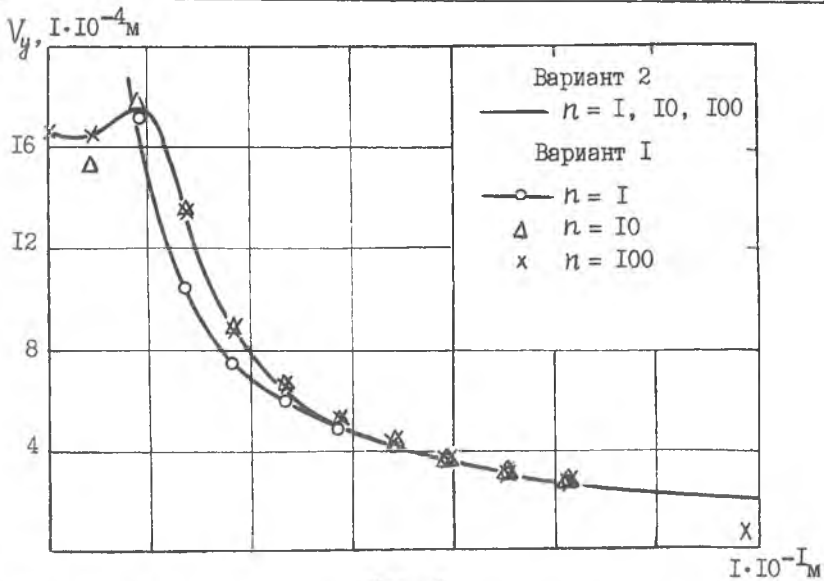


Рис. 3

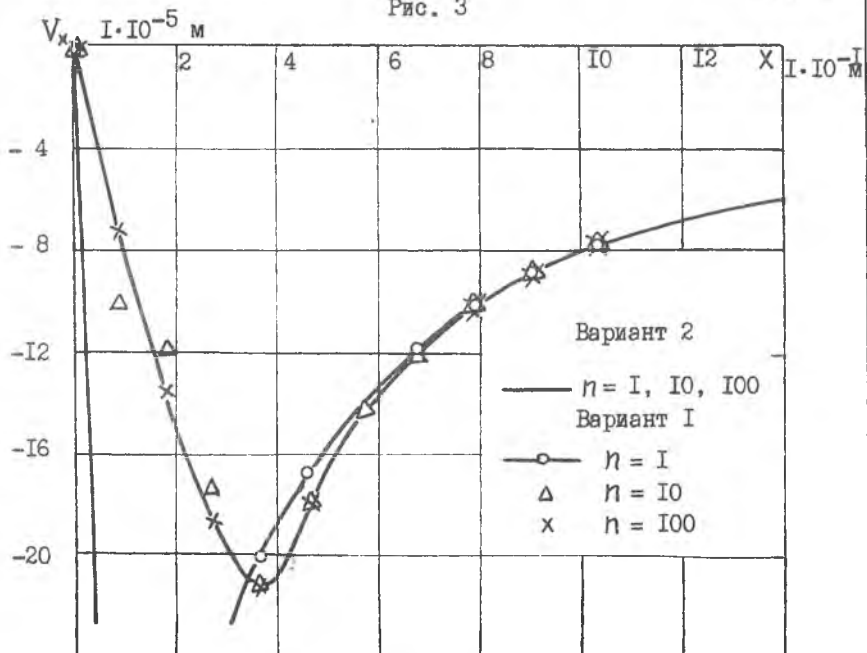


Рис. 4

Л и т е р а т у р а

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. - М.: Мир, 1975. - 544 с.

2. Образцов И.Ф. и др. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И.Ф.Образцов, Л.М.Савельев, Х.С.Хазанов. - М.: Высшая школа, 1985. - 392 с.

УДК 629.735.519.2

В.М.Балык, Р.Д.Кулакова,
В.С.Литвинов, Б.И.Сахаров

МЕТОДИКА ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ ТОНКОСТЕННЫХ МНОГОЗАМКНУТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Задачи автоматизации проектирования авиационных конструкций в настоящее время приобретают все большее значение. Эффективность решения таких задач во многом определяется совершенством методического обеспечения систем автоматизированного проектирования, которое, в частности, определяется уровнем развития методов оптимального проектирования. В связи с этим наблюдалась интенсивная разработка и широкое практическое применение методов параметрической оптимизации в условиях заданной структуры конструкции. Дальнейшее развитие методов оптимального проектирования связано с переходом на более высокие уровни оптимизации, в которых помимо параметрической оптимизации осуществляется варьирование собственно структурами с целью выбора наилучшего проектного решения на множестве известных и неизвестных в практике структур. Эффективность применения методов структурной оптимизации заключается в том, что помимо оптимальности, достигаемой за счет параметрической оптимизации, может быть получен не меньший эффект за счет рассмотрения множества конструкторских решений. Наиболее простой подход при структурной оптимизации заключается в последовательном переборе заданного конечного множества структур с параметрической оптимизацией на каждой структуре. Очевидно, что такой подход, по существу, является методом прямого перебора и несовместим с требованиями автоматизации проектирования. Для организации направленного перебора и формирования новых структур можно использовать эвристические приемы, но они также мало приемлемы в условиях автоматизации в силу недостаточной формализуемости.