Библиографический список

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.

2. Леонов В.И., Канова Г.В., Беляева В.И. К расчету напряженно деформированного состояния подкрепленных оболочек вращения при неосесимметричном нагружении // Прочность и долговечность элементов конструкций летательных аппаратов: Межвуз.сб. Куйбышев: КуАИ, 1984. С. 7-18.

3. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.

4. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

УДК 624.07:534.1

И.С.Ахмедьянов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАДРАТУР К РАСЧЕТУ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Метод основан на преобразовании дифференциального уравнения устойчивости стержня в интегральное. С помощью квадратурной формулы Симпсона записывается система алгебраических уравнений для определения прогибов в отдельных точках оси стержня. Из условия нетривиальности решения уравнений находятся значения критических сил.

Предлагаемый способ, названный методом квадратур, обладает достаточной простотой и надежностью. Он может быть рассмотрен как вариант применительно к задачам устойчивости стержней известного и хорошо зарекомендовавшего себя метода интегрирующих матриц /1/.

1.Рассмотрим задачу об устойчивости стержня переменного сечения, свободно опертого по концам и сжатого осевой силой P (рис.1).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня после потери устойчивости имеет вид /3/:

$$EJ\frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0. \qquad (I)$$

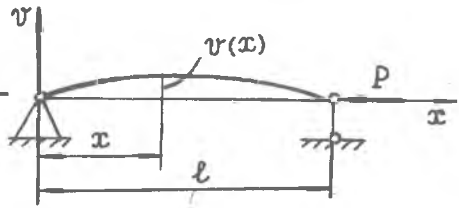

Рис. I

Здесь v – прогиб оси стержня, $EJ(x)$ – жесткость сечения стержня на изгиб.

Полагая

$\xi = x/\ell$, $y = v/\ell$, $(\ )' = d/d\xi$,

$EJ(\xi) = EJ_0/f(\xi)$, $\lambda = EJ_0/P\ell^2$,

где EJ_0 – жесткость стержня в каком-либо сечении, принятом за начальное, из (I) получаем:

$$\lambda y'' = -f(\xi)y. \qquad (2)$$

Двухкратное интегрирование /2/ по ξ обеих частей выражения (2) дает:

$$\lambda y = \lambda(y_0 + y_0'\xi) - Y(\xi). \qquad (3)$$

Здесь:

$$y_0 = y(0), \quad y_0' = y'(0), \quad Y(\xi) = \int_0^{\xi}\int_0^{\xi} f(\xi)y\,d\xi\,d\xi.$$

В нашем случае $y_0 = 0$.

Принимая в (3) $\xi = \xi_i = it$ $(i = 1,2,\ldots)$, где t – шаг интегрирования ($t = 1/n$, n – число участков, на которые разбивается длина ℓ стержня), получаем:

$$\lambda y_i = \lambda y_0'\xi_i - Y_i, \qquad (4)$$

где

$$y_i = y(\xi_i), \quad Y_i = Y(\xi_i) = \int_0^{\xi_i}\int_0^{\xi} f(\xi)y\,d\xi\,d\xi.$$

Применив для вычисления двухкратных интегралов Y_i формулу Симпсона, можно прийти к следующим выражениям:

$$Y_i = \sum_{k=0}^{i} \alpha_{ik} y_k, \quad i \geq 2,$$

$$Y_1 = \alpha_{10}\, y_0 + \alpha_{11}\, y_1 + \alpha_{12}\, y_2 . \tag{5}$$

Здесь

$$\alpha_{ik} = \frac{t^2}{36}\, \gamma_{ik} f_k , \quad f_k = f(\xi_k).$$

Значения коэффициентов γ_{ik} для i = I,...,8 приведены в таблице I. Для $i > 8$ таблица может быть продолжена по легко усматриваемой закономерности.

Таблица

Значения коэффициентов γ_{ik}

i \ k	0	I	2	3	4	5	6	7	8
I	9	I2	-3						
2	24	48	0						
3	35	96	27	4					
4	52	I28	72	32	4				
5	6I	I84	89	80	32	4			
6	80	208	I48	96	80	32	4		
7	87	272	I5I	I60	96	80	32	4	
8	I08	288	224	I60	I60	96	80	32	4

Далее, с целью определения параметра λ составляем следующую систему уравнений (для краткости записей ограничиваемся случаем разбиения рассматриваемого стержня на четыре равные части):

$$\lambda y_1 = \lambda y_0' \xi_1 - Y_1 , \quad \lambda y_2 = \lambda y_0' \xi_2 - Y_2 ,$$
$$\lambda y_3 = \lambda y_0' \xi_3 - Y_3 , \quad \lambda y_4 = 0 = \lambda y_0' - Y_4 . \tag{6}$$

Из четвертого уравнения находим

$$\lambda y_0' = Y_4 .$$

При этом остальные уравнения из (6) примут вид:

$$\lambda y_1 = \xi_1 Y_4 - Y_1 , \quad \lambda y_2 = \xi_2 Y_4 - Y_2 , \quad \lambda y_3 = \xi_3 Y_4 - Y_3 .$$

Отсюда, используя зависимости (5), получаем:

$$(a_{11}-\lambda)y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3=0,$$
$$a_{21}y_1+(a_{22}-\lambda)y_2+a_{23}y_3=0,$$
$$a_{31}y_1+a_{32}y_2+(a_{33}-\lambda)y_3=0, \tag{7}$$

где

$$a_{ik}=\xi_i\,\alpha_{nk}-\alpha_{ik}, \quad n=4.$$

Система уравнений (7) будет иметь ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{8}$$

Здесь

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

E – единичная матрица.

Из уравнения (8) определяются значения параметра λ, по которым можно вычислить критические величины сжимающей силы P :

$$P=EJ_0/\lambda\ell^2.$$

Если рассматриваемый стержень имеет постоянное сечение ($f(\xi)=1$), то из (8) получаются следующие приближенные значения λ :

$\lambda_1=0{,}10133$, $\lambda_2=0{,}02557$, $\lambda_3=0{,}00504$.

По методу интегрирующих матриц /1/:

$$\lambda_1=0{,}09980\ .$$

Точные значения, как известно, равны /3/:

$$\lambda_1=1/\pi^2=0{,}10132\ ,\ \lambda_2=1/4\pi^2=0{,}02533,\ \lambda_3=1/9\pi^2=0{,}01126.$$

Сопоставление приближенного и точного значений λ_1 показывает, что даже при разбиении стержня всего лишь на четыре части ($n=4$) метод квадратур приводит к решению, мало отличающемуся от точного.

Если момент инерции сечения стержня J изменяется по линейному закону /2/ (рис.2), то

$$f(\xi) = \left[1 - \left(1 - \frac{b_1}{b_0}\right)\xi\right]^{-1}.$$

При $b_0 = 2b_1$ уравнение (8) будет иметь следующие корни:

$\lambda_1 = 0{,}13815$, $\lambda_2 = 0{,}03335$, $\lambda_3 = 0{,}00707$.

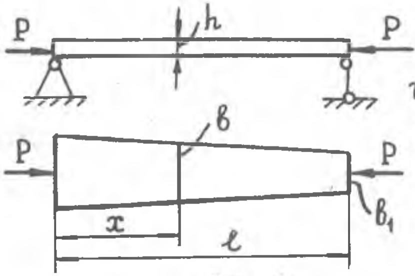

Рис. 2

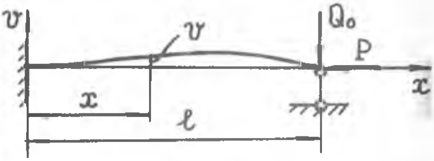

Рис. 3

2. В качестве второго примера возьмем стержень переменного сечения, жестко защемленный в сечении $x = 0$ и свободно опертый при $x = l$. Стержень сжат силой P (рис.3). Дифференциальное уравнение устойчивости стержня в принятых ранее основных обозначениях имеет вид:

$$\lambda y'' = -f(\xi)y - \beta(1-\xi)f(\xi), \quad \beta = Q_0/P. \qquad (10)$$

Из (10) путем двукратного интегрирования получаем ($y_0 = 0$, $y'_0 = 0$):

$$\lambda y = -Y(\xi) - \beta F(\xi), \qquad (11)$$

где

$$F(\xi) = \int_0^{\xi}\int_0^{\xi}(1-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\xi.$$

Пусть, как и ранее, $n = 4$, $t = 1/4$.

Тогда по (11) можно записать:

$$\lambda y_1 = -Y_1 - \beta F_1, \quad \lambda y_2 = -Y_2 - \beta F_2,$$
$$\lambda y_3 = -Y_3 - \beta F_3, \quad \lambda y_4 = 0 = -Y_4 - \beta F_4. \qquad (12)$$

Здесь

$$F_i = F(\xi_i) = \int\limits_0^{\xi}\int\limits_0^{\xi}(1-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\xi .$$

Из (I2) далее находим:

$$\lambda y_1 = -y_1 + \gamma_1 y_4 , \quad \lambda y_2 = -y_2 + \gamma_2 y_4 , \quad \lambda y_3 = -y_3 + \gamma_3 y_4 , \qquad (I3)$$

где

$$\gamma_i = F_i / F_4 .$$

Применяя к (I3) соотношения (5), приходим к системе уравнений вида (7), в которой будет:

$$a_{ik} = \gamma_i \alpha_{nk} - \alpha_{ik} , \qquad n = 4 .$$

Условием нетривиальности решения уравнений относительно y_i и здесь является соотношение (8).

Для случая стержня постоянного сечения ($f(\xi) \equiv 1$) получаются следующие значения параметра λ :

$$\lambda_1 = 0{,}05062 , \qquad \lambda_2 = 0{,}01376 .$$

Точное решение /3/:

$$\lambda_1 = 0{,}04953 , \qquad \lambda_2 = 0{,}01676 .$$

3. Мы рассмотрели два примера применения метода квадратур к расчету на устойчивость стержней переменного сечения. Аналогичным образом могут быть решены и другие задачи устойчивости таких стержней, когда осевая сжимающая сила постоянна по всей длине или на отдельных участках стержня, на которые его ось разбивается точками приложения сосредоточенных осевых сил.

Метод может быть распространен и на случаи переменных по длине стержня сжимающих усилий $N(x)$. Для этого необходимо исходить из дифференциального уравнения устойчивости общего вида /2,4/

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2 v}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(N\frac{dv}{dx}\right) = 0 \qquad (I4)$$

и в качестве основной переменной принять угол поворота φ сечений стержня после потери устойчивости /2,4/:

$$\varphi = \frac{dv}{dx} .$$

Полагая

$$\xi = x/\ell, \quad y = v/\ell, \quad N(\xi) = P_o \tau(\xi), \quad \lambda = EJ_o/P_o \ell^2,$$

из (I4) получаем:

$$\lambda(\psi'/f)'' + (\tau\varphi)' = 0.$$

Отсюда путем интегрирования легко вывести основное интегральное уравнение задачи:

$$\lambda\varphi = \lambda\varphi_o - \Phi(\xi) + \int_0^{\xi} f(\xi)(A\dot{\xi} + B)\,d\xi, \qquad (I5)$$

где

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} f(\xi) \int_0^{\xi} \tau\varphi\, d\xi\, d\xi,$$

φ_o, A, B – некоторые постоянные.

Уравнение (I5) может быть рассмотрено аналогично соотношению (3)

Библиографический список

I. Вахитов М.Б., Сафариев М.С., Снегирев В.Ф. Прочность крыльевых устройств судов на прочность. Казань: Татарское книжное издательство, I975. 2I2 с.

2. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М.: Оборонгиз, I956. I52 с.

3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, I963. 880 с.

4. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М.: Гостехиздат, I955. 476 с.