

ственно, влечет за собой изменения в напряженно-деформированном состоянии конструкции. Это видно, например, из рисунка, где приведены графики изменения по длине нормальных напряжений в продольных ребрах жесткости $\lambda = 4,8$. Штриховой линией обозначены напряжения, полученные при расчете в упругой постановке, сплошной - в физически нелинейной.

Л и т е р а т у р а

1. Павлов В.А. Расчет многошарнирного оперения с учетом отклонения рулей // Изв. вузов. Авиационная техника. - 1974. - № 1. - С. 72.
2. Павлов В.А., Сафонов А.С. К расчету составной тонкостенной авиаконструкции // Изв. вузов. Авиационная техника. - 1986. - № 2. - С. 102.
3. Одинокоев Ю.Г. Напряжения и деформации в тонкостенных конструкциях переменного сечения. - Тр. КАИ, 1948, вып. 20. - С. 3-15.
4. Вахитов М.Б. Интегрирующие матрицы - аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики // Изв. вузов. Авиационная техника. - 1966. - № 3. - С. 50.

УДК 539.3:624.074

И.С.Ахмедьянов, В.Е.Кремс

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ВРОНСКОГО К НАХОЖДЕНИЮ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Приводятся основные зависимости для построения частного решения основного дифференциального уравнения изгиба сферической оболочки, затухающего при удалении от ее вершины ($\psi = 0$). В качестве примера использования этих соотношений представлены результаты расчета сферической оболочки, нагруженной в полусе срединной осевой силой P_0 .

В работе используются основные обозначения, принятые в /3/.

1. Как известно /1-3/, основное дифференциальное уравнение изгиба сферической оболочки при произвольном нагружении имеет вид:

$$y''_n + y'_n \operatorname{ctg} \psi + \left(1 + i\lambda - \frac{n^2}{\sin^2 \psi}\right) y_n = 0. \quad (1)$$

Решением этого уравнения, затухающим при приближении к полюсу $\varphi = 0$, является функция /2,4/:

$$y_{1n}(\varphi) = \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} F(-a, a+1; n+1; x). \quad (2)$$

Здесь $F(-a, a+1; n+1; x)$ - гипергеометрический ряд /5/, для которого $a(a+1) = 1 + i\lambda$, $x = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

Полагая

$$F(-a, a+1; n+1; x) = \varphi_{1n}(x) + i\omega_{1n}(x), \quad (3)$$

можно вывести, что /2,4/

$$\varphi_{1n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} x^k, \quad \omega_{1n}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} x^k, \quad (4)$$

причем

$$\alpha_{nk} = \frac{k(k-1)-1}{k(k+n)} \alpha_{n,k-1} + \frac{\lambda}{k(k+n)} \beta_{n,k-1},$$

$$\beta_{nk} = \frac{k(k-1)-1}{k(k+n)} \beta_{n,k-1} - \frac{\lambda}{k(k+n)} \alpha_{n,k-1},$$

$$\alpha_{n0} = I, \quad \beta_{n0} = 0.$$

Далее, в соответствии с (3) из (2) получаем:

$$y_{1n}(\varphi) = \sigma_{1n} + i\tau_{1n}, \quad (5)$$

где

$$\sigma_{1n}(\varphi) = \varphi_{1n} \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}, \quad \tau_{1n}(\varphi) = \omega_{1n} \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}. \quad (6)$$

Дифференцирование выражений (6) дает:

$$\sigma'_{1n}(\varphi) = \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{d\varphi_{1n}}{dx} \sin \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} \varphi_{1n} \right) \quad (7)$$

$$\tau'_{1n}(\varphi) = \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{d\omega_{1n}}{dx} \sin \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} \omega_{1n} \right).$$

Здесь

$$\frac{d\varphi_{1n}}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_{nk} x^{k-1}, \quad \frac{d\omega_{1n}}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} k \beta_{nk} x^{k-1} \quad (8)$$

Как показали вычисления, ряды (4) и (8) обладают хорошей сходимостью для сферических оболочек с обычно встречающимися на практике геометрическими параметрами.

2. Второе решение y_{2n} уравнения (I), затухающее при удалении от полюса ($\varphi = 0$), может быть записано в следующем виде /4/:

$$y_{2n}(\varphi) = c \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} F(-a, a+1; n+1; 1-x) = \sigma_{2n} + i\tau_{2n}. \quad (9)$$

Положив, как и в предыдущем случае,

$$F(-\alpha, \alpha+1; n+1; 1-x) = \varphi_{2n}(x) + i\omega_{2n}(x), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(x) &= \varphi_{1n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} (1-x)^k, \\ \omega_{2n}(x) &= \omega_{1n}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk} (1-x)^k, \end{aligned} \quad (11)$$

получаем из (9) выражения для σ_{2n} и τ_{2n} :

$$\sigma_{2n}(\varphi) = \varphi_{2n} \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2}, \quad \tau_{2n}(\varphi) = \omega_{2n} \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2}. \quad (12)$$

Для пологой сферической оболочки (когда угол φ невелик и аргумент $t = 1 - x$ близок к 1) ряды (11) являются медленно сходящимися и требуют суммирования нескольких тысяч членов. Это помимо увеличения машинного времени ЭЕМ приводит к значительному снижению точности вычислений. В связи с этим целесообразно искать второе решение y_{2n} , затухающее при удалении от полюса, в другой форме.

3. Составим вронскиан $W[y_{1n}, y_{2n}]$ решений y_{1n} и y_{2n} уравнения (1) /6,4/:

$$W[y_{1n}, y_{2n}] = y_{1n} y'_{2n} - y_{2n} y'_{1n} = \frac{\alpha_n + i\beta_n}{\sin \varphi}, \quad (13)$$

где α_n и β_n - некоторые вещественные постоянные.

В выражении (13) под y_{1n} и y_{2n} можно понимать решения (2) и (9) или же любую их линейную комбинацию.

Из (13) находим /6/:

$$\left(\frac{y_{2n}}{y_{1n}}\right)' = \frac{\alpha_n + i\beta_n}{y_{1n}^2 \sin \varphi}.$$

Отсюда

$$y_{2n} = (\gamma_n + i\delta_n) y_{1n} + (\alpha_n + i\beta_n) y_{1n} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{y_{1n}^2 \sin \varphi}. \quad (14)$$

Здесь φ_0 - некоторое начальное значение угла φ ; γ_n, δ_n - вещественные постоянные.

В силу произвольности величин $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ и δ_n /6/ можно положить:

$$\alpha_n = 1, \quad \beta_n = \gamma_n = \delta_n = 0$$

и принять в качестве решения y_{2n} функцию

$$y_{2n}(\varphi) = y_{1n} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{y_{1n}^2 \sin \varphi}. \quad (15)$$

Здесь под y_{1n} подразумевается решение уравнения (I) в форме (2).

Далее, из (I5), используя (5), легко вывести следующие расчетные формулы для вычисления значений σ_{2n} , τ_{2n} и их производных по ψ :

$$\sigma_{2n}(\psi) = J_n \sigma_{1n} + K_n \tau_{1n}; \quad \tau_{2n}(\psi) = J_n \tau_{1n} - K_n \sigma_{1n}, \quad (I6)$$

$$\sigma'_{2n}(\psi) = J_n \sigma'_{1n} + K_n \tau'_{1n} - \frac{\sigma_{1n}}{(\sigma_{1n}^2 + \tau_{1n}^2) \sin \psi}, \quad (I7)$$

$$\tau'_{2n}(\psi) = J_n \tau'_{1n} - K_n \sigma'_{1n} - \frac{\tau_{1n}}{(\sigma_{1n}^2 + \tau_{1n}^2) \sin \psi},$$

где

$$J_n(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\sigma_{1n}^2 - \tau_{1n}^2}{(\sigma_{1n}^2 + \tau_{1n}^2)^2 \sin \psi} d\psi; \quad K_n(\psi) = \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{2\sigma_{1n}\tau_{1n}}{(\sigma_{1n}^2 + \tau_{1n}^2)^2 \sin \psi} d\psi. \quad (I8)$$

Выражение (I5) определяет второе частное решение уравнения (I), которое так же, как и (9), будет неограниченным в полюсе ($\psi = 0$) и затухающим по мере увеличения угла ψ .

В формулах (I6)-(I8) угол ψ может быть сколь угодно малым. Это позволяет находить значения функций σ_{2n} и τ_{2n} для очень пологих сферических оболочек, что практически невозможно сделать при использовании решения y_{2n} в форме (9).

Для вычисления интегралов J_n и K_n можно применить любой численный метод, например, метод Симпсона с некоторым, вообще говоря, небольшим шагом интегрирования.

4. В качестве примера применения решения y_{2n} в форме (I5) приведем результаты расчета сферической оболочки, нагруженной в вершине сосредоточенной осевой силой P_0 (рис. I).

Расчет был выполнен с использованием основных соотношений, приведенных в /3/ для случая симметричного нагружения сферической оболочки ($n = 0$).

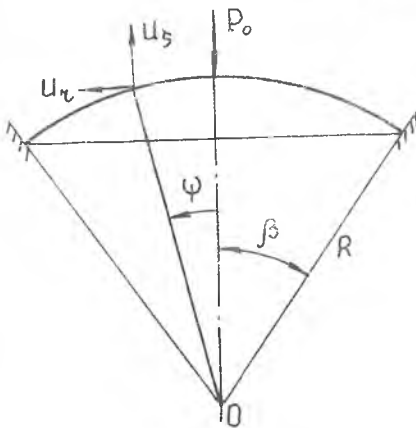


Рис. I

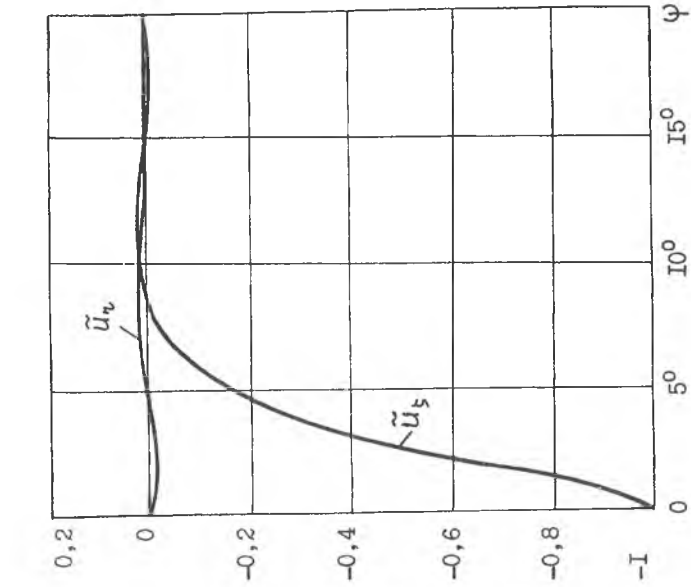


Рис. 3

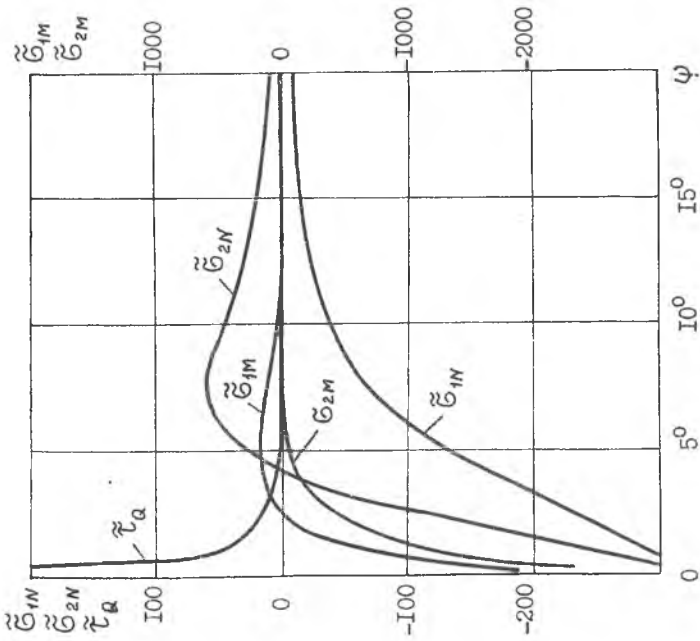


Рис. 2

Произвольные постоянные, входящие в расчетные формулы из /3/, определены из условий:

$$\text{при } \varphi = 0 \quad u = 0 \quad v_1^0 = 0, \quad (19)$$

$$\text{при } \varphi = \beta \quad u = 0 \quad w = 0 \quad v_1^0 = 0. \quad (20)$$

Условия (19), в частности, привели к следующим значениям произвольных постоянных $2\gamma C_{20}$ и $2\gamma D_{20}$ /3/:

$$2\gamma C_{20} = -\frac{\sigma^0}{E}, \quad 2\gamma D_{20} = -\frac{\mu}{\lambda} \frac{\sigma^0}{E}, \quad \sigma^0 = \frac{P_0}{2\pi R h}.$$

В дальнейших вычислениях параметры оболочки принимались следующими:

$$\lambda = 800, \quad \mu = 0,3, \quad \frac{R}{h} = 242,09, \quad \beta = 30^\circ.$$

На рис.2 представлены графики распределения напряжений, относенных к величине σ^0 :

$$\tilde{\sigma}_{1N} = \frac{N_1}{h\sigma^0}, \quad \tilde{\sigma}_{2N} = \frac{N_2}{h\sigma^0}, \quad \tilde{\tau}_a = \frac{Q_1}{h\sigma^0},$$

$$\tilde{\sigma}_{1M} = \frac{6M_1}{h^2\sigma^0}, \quad \tilde{\sigma}_{2M} = \frac{6M_2}{h^2\sigma^0}.$$

Распределение перемещений u_z и u_ξ (рис.1) показано на рис.3.

Здесь

$$\tilde{u}_\xi = \frac{u_\xi(\varphi)}{|u_\xi(0)|}, \quad \tilde{u}_z = \frac{u_z(\varphi)}{|u_z(0)|},$$

$$u_z(0) = -1,515 \cdot 10^5 \frac{\sigma^0}{E} h.$$

При вычислении интегралов J_0 и K_0 по формулам (18) шаг интегрирования равнялся $(-\frac{1}{4})^\circ$.

Л и т е р а т у р а

1. Гольденвейзер А.Г. Исследование напряженного состояния сферической оболочки // ПММ. - 1944. - Т.8. - Вып.6.-С.441-467.
2. Рекач В.Г. Расчет тонких сферических оболочек // Расчет пластин и оболочек. - М.: МИСИ, 1963. - Вып.34. - С. 148-194.
3. Ахмедьянов И.С. О расчете сферической оболочки при симметричном нагружении // Изв. вузов. Авиационная техника. - 1980. - № 4. - С. 7-12.
4. Ахмедьянов И.С. Об интегрировании основного дифференциаль-

ного уравнения несимметричного изгиба сферической оболочки // Вопросы прочности элементов авиационных конструкций. Межвузовский сб. - Куйбышев: Куйбышев. авиац. ин-т, 1975. - Вып. 2. - С. 56-62.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. - М.: Наука, 1965. - 296 с.

6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Гос-техиздат, 1953. - 468 с.

УДК 539.3

Б.А.Горлач, Е.А.Ефимов

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКИХ ПОВОРОТОВ
НА РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК

Исходя из того, что предполагается исследование процессов деформирования оболочек вращения при конечных неупругих перемещениях и поворотах, к их решению привлечены зависимости между индифферентными тензорами. В геометрических соотношениях удержаны квадраты градиентов (∇) вектора перемещения u . Физические соотношения представлены в виде ассоциированного закона пластического течения, устанавливающего зависимость между приращениями тензора деформации Генки и тензором напряжения Коши t . Упругопластическое состояние описывается условием Мизеса с трансляционным и изотропным упрочнением.

Алгоритм задачи строится на базе вариационного уравнения Лагранжа /1/, которое с расчетом на применение шагового метода нагружения преобразовано к метрике некоторого известного (найденного на предыдущем шаге) промежуточного состояния, характеризуемого объемом V и поверхностью w /2/:

$$\begin{aligned} & \int_V t : \nabla \delta u \, dv - \int_w t_n \cdot \delta u \, dw = \\ & = - \int_V \nabla u : {}^{(4)}m : \nabla \delta u \, dv + \int_w (\nabla u : {}^{(4)}m \cdot n) \cdot \delta u \, dw. \end{aligned} \quad (I)$$

Здесь t_n - вектор сил, распределенных по поверхности с единичной нормалью n ; ${}^{(4)}m$ - тензор четвертого ранга, сложным образом выражающийся через параметры, характеризующие упругопластические свойства материала, историю нагружения, а также достигну-