

УДК 518.12:534-16

Г.В.Канова, Л.М.Савельев

ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ  
СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ЛЕНТОЧНЫХ МАТРИЦ

1. Расчет собственных колебаний упругих систем методом конечных элементов сводится [1] к решению обобщенной проблемы собственных значений вида

$$(A - \lambda B)X = 0, \quad (I)$$

где  $A$  и  $B$  – симметричные неотрицательно-определенные матрицы имеющие обычно ленточную структуру. Все собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  ( $N$  – порядок матриц  $A$  и  $B$ ) проблемы (I), представляющие собой квадраты круговых частот колебаний, положительны, за исключением, быть может, нескольких нулевых.

Для отыскания собственных значений  $\lambda$  и соответствующих им собственных векторов  $X$  разработано много методов [2]. Для матриц с малой шириной ленты наиболее эффективной является описанная в работе [3] процедура. Она заключается в использовании ускоренного метода секущих для приближенного отыскания корней характеристического полинома и последующем уточнении собственных значений методом стационарных обратных итераций вектора. Этот алгоритм положен в основу написанной на языке ФОРТРАН-IV программы, которая позволяет находить любое требуемое число наименьших собственных значений и соответствующих им собственных векторов проблемы (I). В отличие от [3] программа может быть использована для расчета колебаний незакрепленного тела (то есть при наличии нулевых собственных значений). Кроме того, для повышения скорости и надежности работы программы в алгоритм внесены изменения, касающиеся выбора начального вектора в процессе обратных итераций и стра-

теги отыскания корней характеристического полинома.

2. Будем полагать, что  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$  и что первые собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}$  и соответствующие им собственные векторы  $X_1, X_2, \dots, X_{i-1}$  найдены. Пусть, далее,  $\mu$  - некоторое число, близкое к собственному значению  $\lambda_i$ . Тогда собственный вектор  $X_i$  можно найти с помощью следующего итерационного процесса (называемого в дальнейшем для краткости  $X$ -процессом):

$$CX^{(k)} = \mu^{(k-1)} C = A - \mu B, \quad (2)$$

$$y^{(k)} = \frac{u^{(k)} - V^{(k)}}{-(X^{(k)T} u^{(k)})^{1/2}}, \quad u^{(k)} = BX^{(k)}, \quad (3)$$

$$V^{(k)} = \sum_{j=3}^{i-1} \alpha_j^{(k)} W_j, \quad \alpha_j^{(k)} = X^{(k)T} W_j, \quad W_j = BX_j, \quad (4)$$

где  $k$  - номер приближения, индекс "T" сверху означает транспонирование.

Вектор  $X^{(k)}$  определяется из решения системы (2), правая часть которой вычисляется по формулам (3)-(4); о выборе  $X^{(0)}$  будет сказано ниже. Знаменатель в формуле для  $u^{(k)}$  дает нормирование вектора  $X^{(k)}$ . Суммирование в формуле для  $V^{(k)}$  выполняется для  $j = 3, 3+1, \dots, i-1$ , где

$$s = \begin{cases} 1 & \text{если } i \leq 6 \\ i-6 & \text{если } i > 6. \end{cases}$$

Наличие этого члена в выражении для  $u^{(k)}$  обеспечивает ортогональность вектора  $X^{(k)}$  по отношению к шести предыдущим собственным векторам. Благодаря этому программа вычисляет полную систему ортогональных векторов при наличии кратных или близких собственных значений.

Построенный таким образом итерационный процесс дает  $X \rightarrow X_i^{(k)}$  при  $k \rightarrow \infty$ , если  $|(\mu - \lambda_i) / (\mu - \lambda_{s-1})| < 1$  и если  $\mu < \lambda_i$  (в противном случае процесс может сходиться к  $X_{s-1}$  или к  $X_{i+1}$  соответственно). Определение подходящего значения  $\mu$  выполняется в другом итерационном процессе, описанном ниже.

Параллельно с вычислением  $X^{(k)}$  в каждом приближении находится собственное значение  $\lambda_i^{(k)}$  по формуле Релея

$$\lambda_i^{(k)} = \frac{X^{(k)T} A X^{(k)}}{X^{(k)T} B X^{(k)}},$$

(которую) можно привести к более удобному для практического использования виду

$$\lambda_i^{(k)} = \mu + \frac{X^{(k)T} U^{(k-1)}}{X^{(k)T} U^{(k)}} \quad (5)$$

О сходимости  $X$  -процесса можно судить по величине  $\lambda_i^{(k)}$ . Итерации прекращаются, если относительная ошибка  $|\lambda_i^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)}|$  становится меньше заданной величины. После окончания процесса выполняется нормирование найденного вектора. Если  $X^{(n)}$  - вектор, найденный в последнем приближении, то

$$X_L = X^{(n)} / (X^{(n)T} U^{(n)})^{1/2} \quad (6)$$

Для решения системы уравнений

$$CX = Y \quad (7)$$

применяется разложение матрицы  $C$  в произведение трех матриц вида

$$C = L D L^T, \quad (8)$$

где  $L$  - матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, а все элементы выше диагонали нулевые;  $D$  - диагональная матрица. Это позволяет заменить систему уравнений (7) двумя вспомогательными системами

$$DL^T X = Z, \quad LZ = Y, \quad (9)$$

матрицы коэффициентов которых имеют треугольную форму; решение уравнений (9) выполняется весьма просто.

Начальный вектор  $X^{(0)}$  в  $X$  -процессе определяется из решения первого уравнения (9) при  $Z = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$ , что всегда обеспечивает удовлетворительное начальное приближение к  $X_i$  [4].

Для работы  $X$  -процесса необходимо найти достаточно хорошее приближение слева к  $\lambda_i$ . Это значение определяется путем исследования характеристического полинома

$q(\mu) = \det(A - \mu B)$ . При любом фиксированном  $\mu$  величина  $q(\mu)$  находится с помощью разложения (8) матрицы  $C = A - \mu B$ , поскольку определитель матрицы  $C$  равен произведению диагональных элементов  $d_{jj}$  матрицы  $D$ :

$$q(\mu) = \prod_{j=1}^n d_{jj} \quad (10)$$

Корни  $q(\mu)$  являются собственными значениями  $\lambda_i$  проблемы (I), вследствие чего можно записать:

$$q(\mu) = (\mu - \lambda_1)(\mu - \lambda_2) \dots (\mu - \lambda_N) = \prod_{j=1}^N (\mu - \lambda_j).$$

Типичный вид функции  $q(\mu)$  приведен на рис. 1а.

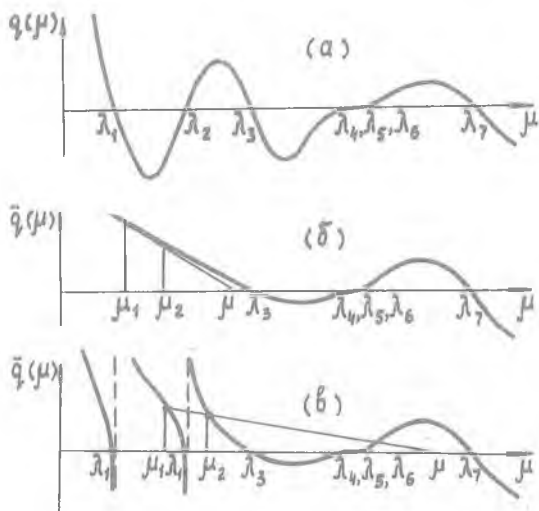


Рис. I

Пусть первые  $i - 1$  собственных значений найдены; тогда для приближенного отыскания  $\lambda_i$  используется полином  $\bar{q}_i(\mu)$ , который получается из  $q(\mu)$  удалением корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}$ :

$$\bar{q}_i(\mu) = q(\mu) / \prod_{j=1}^{i-1} (\mu - \lambda_j). \quad (II)$$

Для  $i = 3$  функция  $\bar{q}_3(\mu)$  показана на рис. 1б.

Если есть два значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , меньшие  $\lambda_i$ , для которых найдены  $\bar{q}_i(\mu_1) = \bar{q}_1$  и  $\bar{q}_i(\mu_2) = \bar{q}_2$  то проведя через две точки кривой  $\bar{q}_i(\mu)$  секущую, можно на пересечении этой секущей с горизонтальной осью получить более близкое к  $\lambda_i$  значение  $\mu$ .

Практически процесс приближения к  $\lambda_i$  (условно называемый далее  $\mu$ -процессом) строится по следующему алгоритму:

$$\mu_2^{(k)} = \mu_2^{(k-1)} + q_2 \frac{\mu_1^{(k-1)} - \mu_2^{(k-1)}}{q_1^{(k-1)} - q_2^{(k-1)}} \eta, \quad \mu_1^{(k)} = \mu_2^{(k-1)}$$

Множитель  $\eta^{(k)}$  вводится для ускорения сходимости процесса. В первых приближениях этот множитель берется равным 2, а после того как отношение  $\mu_2^{(k)}/\mu_2^{(k-1)}$  станет меньше 1, этот множитель удваивается в каждом приближении.

При такой организации процесса величина  $\mu_2^{(k)}$  может оказаться больше, чем  $\lambda_1$ , но это легко контролируется тем подсчетом числа отрицательных элементов диагональной матрицы  $D$ . Если при некотором  $\mu$  выполнено разложение матрицы  $C = A - \mu B$ , то количество отрицательных элементов  $d_{jj}$  будет равно числу собственных значений проблем меньших  $\mu$ .

Работа  $\mu$ -процесса заканчивается при выполнении условия

$$(\mu_2^{(k)} - \mu_2^{(k-1)}) / \mu_2^{(k)} = \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  - малая величина, или если получится значение для которого количество отрицательных элементов матрицы превысит  $l-1$ . В первом случае при переходе к  $X$ -процессу принимается  $\mu = \mu_2^{(k)}$ , во втором -  $\mu = \mu_1^{(k)}$ , где номер последней итерации. В качестве  $\varepsilon$  в программе взята величина порядка  $10^{-5}$ .

Для вычисления первого собственного значения  $\lambda_1$  необходимо иметь два начальных значения  $\mu_1^{(0)}$  и  $\mu_2^{(0)}$ . Если матрица  $A$  положительно-определенная, то  $\lambda_1 > 0$  и можно  $\mu_1^{(0)} = 0$ . Величина  $\mu_2^{(0)}$  в этом случае получается путем организации  $X$ -процесса при  $\mu = 0$ . После достижения определенной погрешности для  $\lambda_1$  порядка 0,05 работа  $X$ -процесса заканчивается и в качестве  $\mu_2^{(0)}$  принимается значение 0,9  $\bar{\lambda}_1$ , где  $\bar{\lambda}_1$  - найденное грубое приближение  $\lambda_1$ .

Если тело не закреплено, то задача осложняется появлением нулевых корней, число которых равно числу степеней свободы жесткого тела. Положим в этом случае

$$\mu = - \frac{\|A\|}{\|B\|} \xi,$$

где  $\|A\|$  и  $\|B\|$  - любые удобные нормы матриц  $A$  и  $B$ ,

малая величина (в программе принято  $\xi = 5 \cdot 10^{-7}$ ). Затем по формуле X -процесса вычисляется полная ортонормированная матрица собственных векторов, соответствующих нулевым собственным значениям, и находится грубое приближение  $\tilde{\lambda}_{i+1}$  к  $\lambda_{i+1}$ .

При последующей организации  $\mu$ -процесса для приближения к  $\lambda_{i+1}$  принимается  $\mu_1^{(i)} = 0,5 \tilde{\lambda}_{i+1}$ ,  $\mu_2^{(i)} = 0,9 \tilde{\lambda}_{i+1}$ .

Во избежание переполнения или исчезновения порядка при делении по формулам (I0) и (II) используются нормирующие множители, которые затем учитываются в первой формуле (I2).

Так как собственные значения находятся приближенно, функция  $\bar{q}_i(\mu)$ , определяемая формулой (II), будет в действительности иметь нули в точках  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  и разрывы в точках, соответствующих найденным приближенным значениям  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{i-1}$  (рис. Iв).

Вследствие этого нормальный ход  $\mu$ -процесса может нарушиться, если  $\mu_1^{(k)}$  и  $\mu_2^{(k)}$  окажутся вблизи одного из вычисленных ранее собственных значений. В связи с этим в программе предусмотрен анализ подобных ситуаций. Если окажется, что  $\mu_2^{(k)} < \mu_2^{(k-1)}$ , то вместо (I2) принимается

$$\mu_1^{(k)} = \mu_2^{(k-1)}, \quad \mu_2^{(k)} = 1,05 \mu_1^{(k)}. \quad (I3)$$

Формулы (I3) применяются и в том случае, если при  $\eta^{(k)} = 2$  окажется, что  $\mu_2^{(k)} > \tilde{\lambda}_{i+1}$  (см. рис. Iв).

Другое отклонение от процесса (I2) осуществляется, когда значения  $\mu_1^{(k-1)}$  и  $\mu_2^{(k-1)}$  настолько далеки друг от друга, что  $\bar{q}_1^{(k-1)}$  отличается от  $\bar{q}_2^{(k-1)}$  более чем на четыре порядка. При выполнении этого условия используются формулы

$$\mu_1^{(k)} = \mu_1^{(k-1)} + \frac{1}{2} (\mu_2^{(k-1)} - \mu_1^{(k-1)}), \quad \mu_2^{(k)} = \mu_2^{(k-1)} \quad (I4)$$

3. В заключение приведем результаты расчета собственных значений трехдиагональной матрицы  $W_{21}^+$  [4] двадцать первого порядка, у которой диагональные элементы равны последовательно 10, 9, ..., 1, 0, 1, ..., 9, 10, а все побочные элементы равны 1. Матрица  $B$  в (I) в этом случае единичная. Одно собственное значение матрицы  $W_{21}^+$  отрицательное, и для использования описанной выше программы сначала вычислялись собственные значения положительно-определенной матрицы  $W_{21}^+ + 2I$ , где  $I$  - единичная матрица, а затем из полученных результатов вычиталось 2.

Таблица I

-1,125 442 (-1,125 441 5)	6,000 214 (6,000 217 5)
0,253 805 (0,253 805 8)	6,000 229 (6,000 234 0)
0,947 535 (0,947 534 4)	7,003 937 (7,003 951 8)
1,789 321 (1,789 321 4)	7,003 952 (7,003 952 2)
2,130 209 (2,130 209 2)	8,038 940 (8,038 941 1)
2,961 059 (2,961 058 9)	8,038 940 (8,038 941 1)
3,043 097 (3,043 099 3)	9,210 678 (9,210 678 6)
3,996 053 (3,996 048 2)	9,210 678 (9,210 678 6)
4,004 349 (4,004 354 0)	10,746 185 (10,746 194 2)
4,999 900 (4,999 782 5)	10,746 185 (10,746 194 2)
5,000 126 (5,000 244 4)	

В таблице I приведены собственные значения матрицы  $W_{21}^*$ . Сопоставление с точными результатами [4], которые даны в скобках, свидетельствует о высокой точности расчета. Наличие па- логически близких собственных значений не оказывает отрица- тельного влияния на работу программы. Относительно большую погрешность имеют десятое и одиннадцатое собственные значе- но они настолько близки, что соответствующие им собственные векторы по существу образуют подпространство, и получаемые ре- зультаты дают хорошую информацию об этом подпространстве.

#### Л и т е р а т у р а

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., "Мир", 1975.
2. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы ли- нейной алгебры. М., Физматгиз, 1963.
3. Bathe K.-J., Wilson E. L. *Eigensolution of large structural systems with small bandwidth.* "J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE", 1973, 99, № 3.
4. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., "Наука", 1970.