ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
Межвузовский сборник, вып. 5, 1979

УДК 534.I:629.7

Ю.И.Филиппов, М.М.Фомченко

РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ МНОГОЗВЕННЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

В различных технических приложениях встречаются задачи
колебаниях составных упругих систем [I], [2].

Известные решения подобных задач основаны на применени
уравнений Лагранжа движения материальной системы [3] или рас
членения упругой системы на составляющие ее разнородные звен
с составлением уравнений их динамического равновесия (по Дал
беру), которые с помощью условий совместности перемещений об
диняются в замкнутую систему. Во всех случаях при наличии н
системе звеньев с распределенными параметрами приходится при
мать меры для ограничения порядка получаемой системы уравнен
Это осуществляется дискретизацией переменных, характеризующи
колебания системы, на основе введения дискретно-массовых ил
конечно-элементных моделей для звеньев с распределенными пар
метрами или путем разложения перемещений системы по формам
парциальных колебаний звеньев с ограничением учитываемого чи
тонов колебаний. Последний подход позволяет ограничиться мен
шим числом неизвестных в результирующей системе уравнений, и,
в сущности, разделяет решение на два независимых этапа. На п
вом этапе определяются парциальные динамические характерист
звеньев, причем могут быть использованы любые методы из имею
щихся в арсенале исследователя, в том числе и экспериментал
На втором - решается задача о колебаниях системы в целом.

В ряде работ, например [I] и [2], рассматриваются некот
рые частные задачи упомянутого типа. Использование основных
отмеченных идей позволяет обобщить их следующим образом.

Ставится задача о расчете колебаний составной упругой системы, состоящей из тяжелых, вообще говоря, упругих звеньев, которые соединены посредством невесомых упругих связей. Связи представляются в виде безмассовых упругих каркасов, причем каждая связь может объединять два звена или более (включая неподвижную опору), а в каждом из звеньев - накладывать ограничения на перемещения конечного числа точек по любым из имеющихся степеням свободы.

Будем считать задачи о парциальных колебаниях звеньев решенными. Тем самым определены диагональная матрица Ω_i собственных частот колебаний i-того звена, содержащая также нулевые частоты, соответствующие степеням свободы звена как жесткого тела, и матрица $\vartheta_i(r_i)$ форм колебаний i-того звена (функция от r_i), столбцы которой суть формы колебаний, соответствующие частотам из Ω_i, включая нулевые, где r_i - радиус-вектор произвольной точки i-того звена.

В матрице ϑ_i для удобства вводим следующую группировку $\vartheta_i=\begin{bmatrix}\theta_i\\ f_i\end{bmatrix}$, где θ_i - матрица угловых перемещений, а f_i - матрица линейных перемещений. Кроме того, будем считать известными матрицы c_j жесткостей упругих связей и матрицы распределенных инерционных характеристик звеньев $m_i(r_i)=\begin{bmatrix}\rho_{Ji} & \rho_{si}\\ \rho_{si}^T & \rho_{mi}\end{bmatrix}$.

Здесь

$$\rho_{Ji}=\begin{bmatrix}J_{xxi} & -J_{xyi} & -J_{xzi}\\ -J_{yxi} & J_{yyi} & -J_{yzi}\\ -J_{zxi} & -J_{zyi} & J_{zzi}\end{bmatrix}$$ - матрица распределенных моментов инерции i-того звена;

$$\rho_{si}=\begin{bmatrix}0 & -S_{zi} & S_{yi}\\ S_{zi} & 0 & -S_{xi}\\ -S_{yi} & S_{xi} & 0\end{bmatrix}$$ - матрица распределенных статических моментов i-того звена: S_{xi}, S_{yi}, S_{zi} - декартовы проекции вектора распределенного статического момента S_i;

$$\rho_{mi}=\begin{bmatrix}\rho_{xi} & & 0\\ & \rho_{yi} & \\ 0 & & \rho_{zi}\end{bmatrix}$$ - диагональная матрица распределенной массы i-того звена (ее компоненты могут быть неравными, например, при наличии жидких масс).

В частных случаях - при исключении из рассмотрения некоторых степеней свободы - из m_i вычеркиваются соответствующие им строки и столбцы. Функцию m_i следует понимать как обобщенную, а именно, как суперпозицию кусочно-гладкой и конечного числа импульсных первого порядка функций.

Пусть q_i - вектор обобщенных перемещений i -того звена, бездеформационных и упругих, соответствующий матрице ϑ_i , а p_j вектор перемещений j -й связи, соответствующий матрице c_j . Далее, s_i - вектор перемещений опорных точек i -того звена, то есть точек, в которых звено посредством упругих связей присоединяется к системе. Вектор W_i перемещений произвольной точ i -того звена определяется произведением

$$W_i = \vartheta_i q_i . \qquad (I)$$

Для определения s_i может быть получено аналогичное соотношени

$$s_i = \Phi_i q_i , \qquad (2)$$

где

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} e_{i1} \cdot \vartheta_i(r_{i1}) \\ e_{i2} \cdot \vartheta_i(r_{i2}) \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_{in_i} \cdot \vartheta_i(r_{in_i}) \end{bmatrix}$$

кинематическая матрица, компоненты которой определяют геометрией звена и формами колебаний.

Здесь r_{ik} - радиус-вектор k -й опорной точки i -того звена; n_i - число опорных точек i -того звена; e_{ik} - согласующая (в общем случае не квадратная) матрица k -й опорной точки i -того звена, преобразующая перемещения из системы координат звена в систему координат связи.

С учетом сделанного выше замечания о структуре упругих связей можно записать

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \ell_{ji} \cdot s_i , \qquad (3)$$

где ℓ_{ji} - матрица, "собирающая" вектор p_j из его фрагментов, входящих порознь в векторы s_i .

Составим выражение для кинетической энергии системы при колебаниях. Ввиду принятой невесомости связей вся кинетическая энергия сосредоточена в звеньях:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i \, , \tag{4}$$

где T - кинетическая энергия системы, T_i - кинетическая энергия i -го звена.

Нетрудно показать, что в линейной постановке справедливо равенство

$$2T_i = \int_{\tau_i} \dot{W}_i^T m_i \dot{W}_i \, d\tau = \dot{q}_i^T \Big(\int_{\tau_i} \vartheta_i^T m_i \vartheta_i \, d\tau \Big) \dot{q}_i \, . \tag{5}$$

Здесь интеграл вычисляется по всему объему (поверхности, длине - в зависимости от мерности) i -того звена и понимается в смысле Стилтьеса. Введя обозначение $\mathcal{M}_i = \int_{\tau_i} \vartheta_i^T m_i \vartheta_i \, d\tau$ получим более краткую запись:

$$2T_i = \dot{q}_i^T \mathcal{M}_i \dot{q}_i \, . \tag{6}$$

$\mathcal{M}_i$ - матрица обобщенных масс звена.

Вычислим теперь потенциальную энергию системы. Очевидно равенство

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_{\text{з}i} + \sum_{j=1}^{m} \Pi_{cj} \, , \tag{7}$$

где Π - потенциальная энергия системы, $\Pi_{\text{з}i}$ - энергия i -того звена, Π_{cj} - энергия j -ой связи. Из равенства максимальных значений кинетической и потенциальной энергий при колебаниях звена (консервативная система) следует соотношение

$$2\Pi_{\text{з}i} = q_i^T \Omega_i \mathcal{M}_i \Omega_i q_i \, . \tag{8}$$

Известно также, что

$$2\Pi_{cj} = p_j^T c_j p_j \, . \tag{9}$$

Подставляя последовательно (2) в (3), (3) в (9), (8) и (9) в (7), а также (6) в (4), получим

$$2\Pi = \sum_{i=1}^{n} q_i^T \Omega_i \mathcal{M}_i \Omega_i q_i + \sum_{j=1}^{m} \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} S_i^T \ell_{ji}^T \Big) c_j \Big(\sum_{i=1}^{n} \ell_{ji} S_i \Big) \Big] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i^T \Omega_i \mathcal{M}_i \Omega_i q_i + \sum_{j=1}^{m} \Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i^T \phi_i^T \ell_{ji}^T \Big) c_j \Big(\sum_{i=1}^{n} \ell_{ji} \phi_i q_i \Big) \Big] , \tag{IO}$$

$$2T = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^T \mathcal{M}_i \dot{q}_i \, . \tag{II}$$

Последние равенства можно сделать значительно компак
и обозримее, если ввести следующие обозначения:

$$q=\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ \cdots\\ q_n\end{pmatrix},\quad \Omega=\begin{bmatrix}\Omega_1 &&&\\ &\Omega_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&\Omega_n\end{bmatrix},\quad \mathcal{M}=\begin{bmatrix}\mathcal{M}_1 &&&\\ &\mathcal{M}_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&\mathcal{M}_n\end{bmatrix},$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_1 &&&\\ &\Phi_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&\Phi_n\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}C_1 &&&\\ &C_2&&\\ &&\ddots&\\ &&&C_m\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}\ell_{11} & \ell_{12} & \vdots & \ell_{1n}\\ \ell_{21} & \ell_{22} & \vdots & \ell_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \ell_{m1} & \ell_{m2} & \vdots & \ell_{mn}\end{bmatrix}$$

Тогда

$$T=\frac{1}{2}\dot{q}^T\mathcal{M}\dot{q},\quad \Pi=\frac{1}{2}q^T(\Omega\mathcal{M}\Omega+\Phi^T L^T C L\Phi)q$$

или

$$\Pi=\frac{1}{2}q^T\mathcal{K}q,\quad \text{где}\quad \mathcal{K}=\Omega\mathcal{M}\Omega+\Phi^T L^T C L\Phi.$$

Отсюда, применяя формализм Лагранжа [3], сразу же по
уравнение колебаний системы

$$\mathcal{M}\ddot{q}+\mathcal{K}q=0.$$

Решение этого уравнения сводится к хорошо известной о
щенной проблеме собственных значений. Найдя первые ℓ собс
ных значений ω_k (ℓ приходится ограничивать числом, мен
размерности вектора q , так чтобы было $\omega_k<\{\{\Omega_i\}_{max}\}_{min}$
где $\{\{\Omega_i\}_{max}\}_{min}$ – минимальная из учтенных старших парци
частот звеньев) и соответствующих им собственных векторов
$1\leq k\leq\ell$, можем приближенно определить нормальные фор
лебаний системы (позвенно).

Для этого введем фундаментальную матрицу системы
$Q=[Q_1, Q_2\dots Q_\ell]$ и разобьем ее на блоки следующим обра

$$Q=\begin{bmatrix}R_1\\ R_2\\ \cdots\\ R_n\end{bmatrix},$$

где число строк блока R_i равно числу строк вектора q_i.

Тогда матрица V_i нормальных форм колебаний i -того
определится формулой

$$V_i=\vartheta_i\cdot R_i,$$

рицы μ приведенных масс системы –

$$\mu = Q^{T} M Q. \qquad \text{(I4)}$$

Итак, нами получено уравнение колебаний и указан ход его
ния для составной упругой системы при самых общих предпо-
жениях.

Существенно, что не было сделано никаких ограничений на
личный состав системы (в смысле мерности звеньев), на
мое расположение звеньев, на мерность форм колебаний, на
мерность упругих связей, а также на способ закрепления
ев при определении парциальных динамических характеристик.
анное обстоятельство позволяет пересчитывать динамические
ктеристики системы при изменении способа ее закрепления,
например, может быть использовано для расчетной компен-
и погрешностей от физически неустранимой, но известной
ильности эксперимента. Удобно пользоваться данным методом
расчета больших, особенно широко разветвленных систем, так
благодаря дроблению системы на звенья существенно снижается
м вычислений при численном интегрировании уравнений колеба-
. Он практически незаменим, когда отсутствуют адэкватные
етные схемы для отдельных звеньев системы, и в то же время
ется возможность экспериментального определения их парци-
ых динамических характеристик.

Литература

I. Новацкий В. Динамика сооружений. Госстройиздат,М.,1963.
2. Хорошилов В.С. Механическая модель движения космическо-
аппарата с солнечной батареей. "Механика твердого тела",
, № 5.
3. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. "Нау-
", М., 1966.