

рассчитать сразу суммарную матрицу жесткости по формуле (26), взяв вместо матрицы C_L сумму матриц C_L и C_{NL} , что приводит к экономии времени счета.

Библиографический список

1. Bathe K.-J. The finite procedures, in engineering analysis. Prentice - Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982, 615 p.
2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 12 с.

ДК 539.3:629.7.015.4

Н.Столяров, С.Х.Хазанов

РАСЧЕТ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И МАТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Математическая модель строится на базе деформационной теории пластичности и учитывает квадратичную геометрическую нелинейность. Расчет реализуется полуаналитическим методом конечных элементов, в котором за основные неизвестные принимаются коэффициенты разложения перемещений в ряд по окружной координате.

При расчете оболочек вращения часто применяют разложение искомого значения в тригонометрические ряды по окружной координате. Если расчет ведется в линейной постановке, то при этом задача распадается на ряд менее сложных задач для отдельных гармоник, к каждой из которых можно применить метод конечных элементов (МКЭ). Такая процедура обоснована Зенкевичем /1/ и названа им полуаналитическим МКЭ. Полуаналитический МКЭ в применении к оболочкам вращения изложен в работе /2/, в которой оболочка вращения разбивается на конечные элементы, имеющие вид усеченных конусов.

вопросы прочности и долговечности элементов
вращающихся конструкций. Куйбышев, 1990

При расчете в нелинейной постановке разделения гармоник не происходит, и если даже в нагрузке присутствует лишь первая гармоника, то в перемещениях появляются все гармоники от 0 до ∞ . Однако из физических соображений ясно, что существенный вклад в решение при этом вносят лишь несколько первых гармоник. Поэтому полуаналитический МКЭ и здесь может значительно облегчить расчет по сравнению с разбиением оболочки на двумерные конечные элементы обычного типа.

В данной работе излагается методика расчета, использующая теорию оболочек с гипотезами Тимошенко. При этом поле перемещений естественно задавать перемещениями точек срединной поверхности u и v , w и углами поворота нормалей ψ_1 , ψ_2 (рис. I). Однако

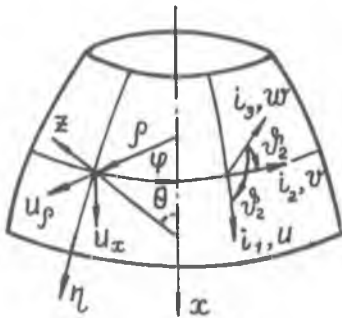


Рис. I

при использовании МКЭ удобнее /2,3/ вместо меридиональных и нормальных перемещений u , w использовать осевые и радиальные перемещения u_x

$$u_p :$$

$$u_x = u \sin \theta - w \cos \theta, \quad (I)$$

$$u_p = u \cos \theta + w \sin \theta.$$

Введем линейный тензор деформации e и тензор вращения Ω :

$$e = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 e_{k\ell} i_k i_\ell, \quad e_{11} = \varepsilon_1 + z \varkappa_1, \quad e_{22} = \varepsilon_2 + z \varkappa_2,$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \omega + z \tau, \quad e_{13} = \frac{1}{2} \gamma_1, \quad e_{23} = \frac{1}{2} \gamma_2,$$

$$\Omega = \Omega_1 (i_3 i_2 - i_2 i_3) + \Omega_2 (i_1 i_3 - i_3 i_1) + \Omega_3 (i_2 i_1 - i_1 i_2), \quad (2)$$

где i_1 , i_2 , i_3 - векторы ортонормированного базиса; ε_1 , ε_2 - удлинения срединной поверхности; ω , γ_1 , γ_2 - сдвиги; \varkappa_1 , \varkappa_2 - изменения кривизны; τ - кручение срединной поверхности; Ω_1 , Ω_2 , $\Omega_3 = \Omega_{30} + z \Omega_{31}$ - повороты вокруг направлений i_1 , i_2 , i_3 .

Предполагая деформации и квадраты углов поворота малыми, запишем для тензора деформации ξ :

$$\xi = e - \frac{1}{2} \Omega^2, \quad \xi = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 \xi_{k\ell} i_k i_\ell, \quad (3)$$

$$\xi_{ke} = \varepsilon_{ke} + z \varpi_{ke}.$$

Разобьем срединную поверхность оболочки окружностями $\eta = const$ и несколько поясов, каждый из которых будем рассматривать как конечный элемент. Используем полуаналитический конечный элемент с тремя «узловыми» окружностями (рис.2), предназначенный для описания напряженно-деформированного состояния (НДС), симметричного относительно плоскости $\varphi = 0 - \varphi = \pi$. При таком НДС перемещения могут быть разложены в ряды по синусам или косинусам, в которых оставляем лишь конечное число членов:

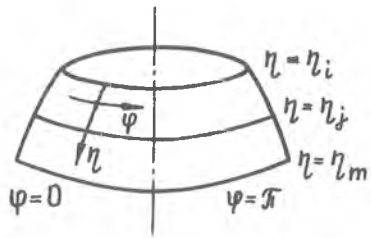


Рис. 2

$$u_x = \sum_{k=0}^n u_{x(k)} \cos k\varphi, \quad u_r = \sum_{k=0}^n u_{r(k)} \cos k\varphi, \quad v_1^j = \sum_{k=0}^n v_{1(k)}^j \cos k\varphi, \\ v = \sum_{k=1}^n v_{(k)} \sin k\varphi, \quad v_2^j = \sum_{k=1}^n v_{2(k)}^j \sin k\varphi. \quad (4)$$

На каждой узловой окружности $\eta = \eta_r$ ($r = i, j, m$) выбираем обобщенные узловые перемещения:

$$u_{x(0)r}, \quad u_{x(1)r}, \quad \dots, \quad u_{x(n)r}, \\ v_{(1)r}, \quad \dots, \quad v_{(n)r}, \\ u_{r(0)r}, \quad u_{r(1)r}, \quad \dots, \quad u_{r(n)r}, \\ v_{1(0)r}, \quad v_{1(1)r}, \quad \dots, \quad v_{1(n)r}, \\ v_{2(1)r}, \quad \dots, \quad v_{2(n)r}, \quad (5)$$

и коэффициентами рядов (4) при $\eta = \eta_r$. Перемещения в произвольной точке (η, φ) срединной поверхности определяются при этом по формулам (4), в которых полагаем

$$u_{x(k)} = \sum_r u_{x(k)r} \psi_r(\eta), \quad \dots, \quad v_{2(k)}^j = \sum_r v_{2(k)r}^j \psi_r(\eta), \quad (6)$$

где $\psi_r(\eta)$ — обычные функции формы [3] одномерного трехузлового конечного элемента.

Введем матрицу узловых перемещений конечного элемента V_e и

глобальную матрицу узловых перемещений V :

$$V_e = [U_{x(o)i} \dots v_{2(n)i} U_{x(o)j} \dots v_{2(n)j} U_{x(o)m} \dots v_{2(n)m}]^T,$$

$$V = [U_{x(o)1} \dots v_{2(n)1} \dots U_{x(o)N} \dots v_{2(n)N}]^T, \quad (7)$$

где N - общее количество узловых окружностей.

Введем также матрицы перемещений U , линейных деформаций вращений e и деформаций ξ в произвольной точке срединной поверхности:

$$U = [u_x \ v \ u_\rho \ v_1 \ v_2]^T,$$

$$e = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \omega \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \tau \ \Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_{30} \ \Omega_{31}]^T,$$

$$\xi = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{13} \ \varepsilon_{23} \ \alpha_{11} \ \alpha_{22} \ \alpha_{12} \ \alpha_{13} \ \alpha_{23}]^T. \quad (8)$$

При этом внутри конечного элемента имеют место равенства

$$u = \alpha_e V_e, \quad e = \beta_e v_e, \quad (9)$$

где α_e , β_e - матрицы, зависящие от координат (η, φ) .

Если в матрицах e и ξ ввести нумерацию элементов от I до I2 и от I до I0 соответственно, то тензорное соотношение (3) можно записать в виде:

$$\xi_{\tau} = \sum_{s=1}^{12} b_{\tau s}^{(0)} e_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{12} \sum_{t=1}^{12} b_{\tau st}^{(1)} e_s e_t, \quad \tau = 1, \dots, 10 \quad (b_{\tau st}^{(1)} = b_{\tau ts}^{(1)}). \quad (10)$$

В дальнейшем нам потребуется вытекающее отсюда матричное соотношение между вариациями $\delta \xi$ и δe :

$$\delta \xi = B \delta e, \quad B = B^{(0)} + B^{(1)}, \quad (11)$$

где $B^{(0)}$, $B^{(1)}$ - матрицы 10×12 с компонентами $b_{\tau s}^{(0)}$ и $b_{\tau st}^{(1)} = \sum_{t=1}^{12} b_{\tau st}^{(1)}$ соответственно.

При расчете с учетом геометрической, но без учета физической нелинейности можно воспользоваться вариационным принципом Лагранжа /3,4/. Он, как известно, утверждает, что из всех допустимых полей перемещений в действительности имеет место такое, которое доставляет минимум полной потенциальной энергии, которая в случае оболочки

ращения может быть записана в виде

$$\Pi^{(r)} = \iint_S \Theta^{(r)} ds - \iint_S u^T p ds - \int_{\ell} u^T P dl. \quad (12)$$

Здесь $p = [p_x p_\varphi p_\rho m_1 m_2]^T$ и $P = [P_x P_\varphi P_\rho m_1 m_2]^T$ - внешняя нагрузка, распределенная по площади S срединной поверхности и по длине ℓ края срединной поверхности, а $\Theta^{(r)}$ - потенциальная энергия деформации на единицу площади срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \Theta^{(r)} = \frac{1}{2} \xi^T C^{(r)} \xi = \frac{1}{2} B (\varepsilon_{11}^2 + 2\nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2) + \\ + \frac{1}{2} D (\varepsilon_{11}^2 + 2\nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2) + 2(1-\nu) B (\varepsilon_{12}^2 + \frac{5}{6} \varepsilon_{13}^2 + \frac{5}{6} \varepsilon_{23}^2) + \\ + 2(1-\nu) D (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где $B = Eh / (1-\nu^2)$, $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$, E , ν , h - модуль упругости, число Пуассона и толщина оболочки. Множитель $\frac{5}{6}$ вводится для учета неравномерности поперечного сдвига по толщине оболочки [3,4]. При варьировании величины $\Theta^{(r)}$ получим

$$\delta \Theta^{(r)} = \delta \xi^T C^{(r)} \xi. \quad (14)$$

При расчете с учетом геометрической и физической нелинейности и использованием деформационной теории пластичности можно воспользоваться вариационным принципом [4], математически аналогичным принципу Лагранжа. В случае оболочки вращения функционал, подлежащий минимизации, равен

$$\Pi^{(A)} = \iint_S \Theta^{(A)} ds - \iint_S u^T p ds - \int_{\ell} u^T P dl, \quad (15)$$

$$\Theta^{(A)} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{3E}{2(1-\nu^2)} \xi_0^2 + \int_0^{\xi_u} \sigma_u(\xi_u) d\xi_u \right) dz, \quad (16)$$

где $\xi_0 = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33}$ - изменение объема, ξ_u , σ_u - интенсивности деформаций и напряжений, причем зависимость $\sigma_u = \sigma_u(\xi_u)$ считается заданной.

При варьировании $\Theta^{(A)}$ получим

$$\delta \varepsilon^{(A)} = \delta u^T C^{(A)} u, \quad (17)$$

где

$$C^{(A)} = C^{(r)} + \tilde{C}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_0 & \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{c}_k = \int_{-h/2}^{h/2} z^k (\mu - \mu_c) \begin{bmatrix} 1+\gamma & -1+\gamma & 0 \\ -1+\gamma & 1+\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} dz,$$

$$\gamma = \frac{(1+\nu)^2 \mu}{(1-\nu)((1+\nu)\mu + 2(1-2\nu)\mu_c)}, \quad \mu_c = \frac{G_M}{3\xi u} - \text{секунный модуль,}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} - \text{коэффициент Ламе.}$$

Приравнявая нулю вариации функционалов (12) или (15) и учитывая (9), (11), (14) или (17), получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных V :

$$g(V) = R. \quad (18)$$

При этом в случае геометрической нелинейности

$$g = g^{(r)} = \sum_e \iint_{S_e} \beta_e^T \beta^T C^{(r)} \xi ds, \quad (19)$$

в случае геометрической и физической нелинейности

$$g = g^{(A)} = \sum_e \iint_{S_e} \beta_e^T \beta^T C^{(A)} \xi ds, \quad (20)$$

а R в любом случае определяется выражением

$$R = \sum_e \left(\iint_{S_e} \alpha_e^T p ds + \int_{\ell_e} \alpha_e^T P dl \right). \quad (21)$$

Знак \sum_e в (19), (20), (21) означает суммирование по всем конечным элементам, которое, как обычно в МКЭ, производится с учетом

матрица перемещений элементов V_e в глобальной матрице перемещений V .

Решение нелинейной системы (18) осуществляется методом Ньютона. На этом очередное приближение V_i отыскивается по предыдущему приближению V_{i-1} из системы линейных уравнений

$$K V_{i-1} (V_i - V_{i-1}) = R - g(V_{i-1}). \quad (22)$$

Матрица касательной жесткости K в (22) определяется суммированием матриц жесткости отдельных элементов:

$$K = \sum_e K_e. \quad (23)$$

Матрица жесткости элемента K_e в случае одной лишь геометрической нелинейности определяется формулами:

$$K_e = K_e^{(\Gamma)} = K_{e_0} + K_{e_1}^{(\Gamma)} + K_{e_2}^{(\Gamma)}, \quad (24)$$

$$K_{e_0} = \iint_{S_e} \beta_e^T b^{(0)T} c^{(\Gamma)} b^{(0)} \beta_e ds, \quad (25)$$

$$K_{e_1}^{(\Gamma)} = \iint_{S_e} \beta_e^T b^T c^{(\Gamma)} b \beta_e ds - K_{e_0}, \quad (26)$$

$$K_{e_2}^{(\Gamma)} = \iint_{S_e} \sum_{\nu=1}^{10} \sum_{s=1}^{12} \sum_{t=1}^{12} T_{\nu}^{(\Gamma)} b_{\nu st} \beta_{e_s}^T \beta_{e_t} ds, \quad (27)$$

где $T_{\nu}^{(\Gamma)}$ - ν -ый элемент матрицы $T^{(\Gamma)} = C^{(\Gamma)} \xi$, а β_{e_s}, β_{e_t} - s -ая t -ая строки матрицы β_e .

В случае геометрической и физической нелинейности матрица жесткости элемента равна

$$K_e = K_e^{(A)} = K_{e_0} + K_{e_1}^{(A)} + K_{e_2}^{(A)} + K_{e_3}^{(A)}. \quad (28)$$

Здесь $K_{e_1}^{(A)}, K_{e_2}^{(A)}$ определяются аналогично (26), (27), но с заменой $C^{(\Gamma)}$ на $C^{(A)}$, а

$$K_{e_3}^{(A)} = \iint_{S_e} \beta_e^T b^T \hat{C} b \beta_e ds, \quad (29)$$

где \hat{C} определяется из дифференциального соотношения

$$d C^{(A)} \xi - \hat{C} d \xi. \quad (30)$$

Остановимся на вычислениях интегралов по площади S_e срединной поверхности элемента в формуле (19) и далее. Матрица K_{e_0} (25) представляет собой линейную матрицу жесткости конечного элемента. Интегрирование в (25) по окружной координате φ производится аналитически и приводит к тому, что K_{e_0} распадается на матрицы жесткости отдельных гармоник. При интегрировании по меридиональной координате η из K_{e_0} выделяется слагаемое, соответствующее деформациям поперечного сдвига. Для исключения так называемого ложного сдвига это слагаемое интегрируется по двухточечной формуле Гаусса, а прочие слагаемые в K_{e_0} — по трехточечной формуле, обеспечивающей оптимальную точность для трехугольного элемента.

При вычислении матрицы g и нелинейных составляющих матрицы K используются значения деформаций e и ξ , подсчитанные по перемещениям $i-1$ -ой итерации. Известно [3], что деформации для трехугольного элемента наиболее точно вычисляются в узлах двухточечной формулы Гаусса, поэтому в данном случае для интегрирования по η используется именно двухточечная формула. Интегрирование по φ на отрезке $[0, \pi]$ во всех случаях, кроме вычисления K_{e_0} , также приходится производить численно. При этом формулу численного интегрирования надо подобрать так, чтобы она не вносила погрешности в содержащиеся в K_{e_0} интегралы от произведений $\cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi$, $\sin k_1 \varphi \sin k_2 \varphi$. Этому условию удовлетворяет формула трапеций с числом точек не менее $n + 2$, где n — верхний предел в суммах (4).

По изложенному алгоритму составлена программа на языке ФОРТРАН и произведены расчеты на ЭВМ.

Полоская сферическая оболочка (рис.3) с углом раствора $2\theta_k = 60^\circ$

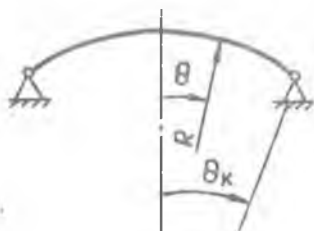


Рис.3

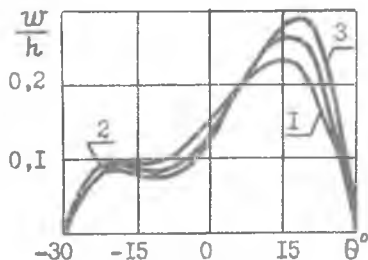


Рис.4

отношением радиуса к толщине $R/h = 50$ нагружалась неравномерным осевым давлением $q = q_{(0)} + q_{(1)} \cos \varphi$, $q_{(1)} = \frac{1}{4} q_{(0)} \theta (\frac{\pi}{6} - \theta) / (\frac{\pi}{12})^2$. Вдоль текучести материала выбирался $G_T = 0,005 E$, упрочнение за пределами текучести считалось линейным с касательным модулем $E' = 0,2 E$. Рис. 4 представлены нормальные перемещения w на меридиане $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ при $q_{(0)} = -1,5 \cdot 10^4 E$. Цифрами обозначены: 1 - линейное решение, 2 - решение с учетом геометрической нелинейности, 3 - решение с учетом геометрической и физической нелинейности.

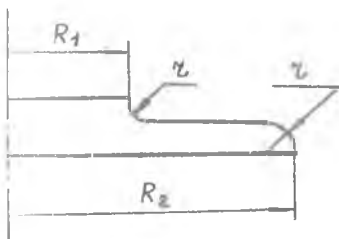


Рис. 5

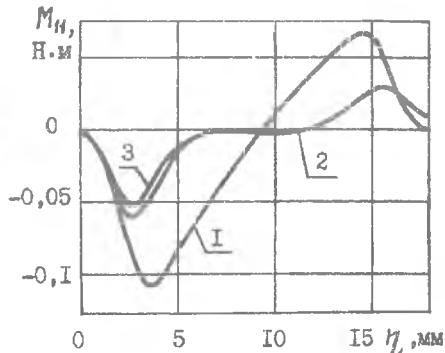


Рис. 6

Приводятся также результаты расчета сиффона на изгиб. Рассматривается участок сиффона (рис.5) с геометрическими параметрами $R_1 = 20$ мм, $R_2 = 35$ мм, $r = 2,5$ мм, $h = 0,15$ мм и физическими параметрами $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G_T = 10^3$ МПа, $E' = 4 \cdot 10^8$ МПа. К сечению А прикладывается изгибающий момент $M = 5$ Н·м, передаваемый осевыми усилиями $P_x = P_{x(1)} \cos \varphi$, $P_{x(1)} = M / \pi R_1^2$, сечение Б расположено в осевом направлении. Перемещения U_x сечения А таковы: в линейном случае $U_{x(0)} = 0$, $U_{x(1)} = 4,238$ мм; при учете геометрической нелинейности $U_{x(0)} = 0,467$ мм, $U_{x(1)} = 1,807$ мм; при одновременном учете геометрической и физической нелинейности $U_{x(0)} = 0,472$ мм, $U_{x(1)} = 1,815$ мм. На рис.6 представлен изгибающий момент M_n на меридиане $\varphi = 0$, цифры 1,2,3 означают то же, что и на рис.4.

Библиографический список

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.

2. Леонов В.И., Канова Г.В., Беляева В.И. К расчету напряженно деформированного состояния подкрепленных оболочек вращения при несимметричном нагружении // Прочность и долговечность элементов конструкций летательных аппаратов: Межвуз. сб. Куйбышев: КуАИ, 1984. С. 7-18.

3. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.

4. Васильду К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

УДК 624.07:534.1

И.С.Ахмедьянов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАДРАТУР К РАСЧЕТУ
НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО
СЕЧЕНИЯ

Метод основан на преобразовании дифференциального уравнения устойчивости стержня в интегральное. С помощью квадратурной формулы Симпсона записывается система алгебраических уравнений для определения прогибов в отдельных точках оси стержня. Из условия нетривиальности решения уравнений находятся значения критических сил.

Предлагаемый способ, названный методом квадратур, обладает достаточной простотой и надежностью. Он может быть рассмотрен как вариант применительно к задачам устойчивости стержней известного и хорошо зарекомендовавшего себя метода интегрирующих матриц /1/.

1. Рассмотрим задачу об устойчивости стержня переменного сечения, свободно опертого по концам и сжатого осевой силой P (рис.1).

Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций. Куйбышев, 1990