ФРЕЙМЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИТОГИ

С. Я. Новиков

Самарский государственный университет,
nvks@samsu.ru

В 2012 году в издательстве Birkhäuser, Boston вышла книга Finite Frames: Theory and Applications, под. ред. P. G. Casazza and G. Kutyniok , которая представляет собой коллективную монографию, целиком посвященную фреймам конечномерных пространств. В ней подведены итоги исследований в этом направлении, которые активно проводились в разных странах в течение последних 50 лет. Ниже приводится небольшой обзор вводной статьи этой монографии, написанной редакторами в соавторстве с F. Philipp.

Преобразование Фурье более 100 лет было основным инструментом анализа сигналов. Модули коэффициентов дискретного преобразования Фурье давали полную частотную информацию, однако, пространственная информация при таком преобразовании «пряталась» в фазовые коэффициенты и практически терялась. Первым, кто не согласился с таким положением вещей, оказался Д. Габор, который в 1946 году воспользовался гауссовой функцией и ее модуляциями для представления оптических сигналов. Метод Габора быстро завоевал популярность, так как получавшиеся представления обладали устойчивостью к аддитивным шумам, к потерям при передаче сигнала, а также сохраняли важные пространственные характеристики, например, о точках максимума сигнала. Однако, обнаружились и недостатки этого метода: для одних значений параметров он был вычислительно устойчив, а для других – нет.

В 1952 г. Duffin и Schaeffer, занимаясь негармоническими рядами Фурье, ввели понятие фрейма (каркаса) гильбертова пространства и те системы функций, которые успешно использовал Габор, оказались фреймами, а те, которые приводили к неустойчивым схемам, таковыми не оказывались.

Значительно позже, в конце 1980-х гг. понятие фрейма возродилось в работе Daubechies, Grossman и Meyer, в которой авторы продемонстрировали широкие возможности фреймов в обработке данных. Содержание этой статьи можно посмотреть в классической монографии И. Добеши «10 лекций о вейвлетах». К настоящему времени фреймы широко используются в анализе акустических и видеосигналов, для сжатия информации, в построении новых схем выборок и дискретизаций. Они нашли применения и в различных разделах фундаментальной математики.

Фреймы конечномерных пространств – это полные системы. Они могут быть переполненными, т. е. содержать элементы в количестве, превышающем размерность пространства. Каждый элемент пространства в такой ситуации будет иметь бесконечно много представлений по фрейму. Среди них выделяют одно, каноническое, которое определяется фреймовыми коэффициентами.

Именно избыточность фрейма позволяет применять его там, где возникают трудности при использовании традиционных ортонормированных базисов.

Например, оказалось возможным восстановить речевой сигнал по абсолютным значениям фреймовых коэффициентов, не обращаясь к фазовой информации.

Еще одним важным преимуществом избыточности оказалась робастность (устойчивость к ошибкам) представлений. Распределяя информацию по широкому набору векторов, удается быстро восстановить утраченную при передаче информацию, что нашло широкое применения в сенсорных сетях.

Весьма успешно решается и задача минимизации влияния помех.

Перечисленные здесь возможности фреймовых представлений – это малая часть того, о чем рассказано в книге. Новые теоретические открытия и приложения постоянно появляются, что объясняется большой общностью теоретических основ теории фреймов.

Эта теория своими частями входит в прикладной гармонический анализ, функциональный анализ, теорию операторов, вычислительную линейную алгебру и теорию матриц.