

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ВЛИЯНИЯ КУРЕНИЯ НА РАЗВИТИЕ ТУБЕРКУЛЕЗА

С. В. Ганчевская

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)" (г. Самара, Московское шоссе 34, 443086),
son7755@yandex.ru

Основной целью настоящей научной работы является разработка и исследование модели влияния курения на развитие туберкулеза.

В ходе работы была изучена следующая математическая модель:

$$S'_p(t) = \Lambda - (\lambda_T + \lambda_S)S_p - \mu S_p + \alpha S_S,$$

$$E'_p(t) = f\lambda_T S_p + \sigma\lambda_T R_p + \alpha E_S - (\delta\lambda_T + \lambda_S)E_p - (k + \mu)E_p,$$

$$I'_p(t) = (1-f)\lambda_T S_p + \delta\lambda_T E_p + kE_p + \gamma I_S - (\mu + d + r)I_p,$$

$$R'_p(t) = rI_p - (\sigma\lambda_T + \lambda_S)R_p + \alpha R_S - \mu R_p,$$

$$S'_S(t) = \lambda_S S_p - \phi\lambda_T S_S - (\alpha + \mu)S_S,$$

$$E'_S(t) = f\phi\lambda_T S_S + \sigma\phi\lambda_T R_S + \lambda_S E_S - \delta\phi\lambda_T E_S - (\omega k + \alpha + \mu)E_S,$$

$$I'_S(t) = (1-f)\phi\lambda_T S_S + \delta\phi\lambda_T E_S + \omega k E_S - (\mu + \gamma + \epsilon d + \vartheta r)I_S,$$

$$R'_S(t) = \vartheta r I_S + \lambda_S R_p - \sigma\phi\lambda_T R_S - (\mu + \alpha)R_S$$

$S_p(t)$ – «здоровые» люди (небольшие туберкулезом); $E_p(t)$ – люди, инфицированные «дремлющими» (сдерживаемыми иммунитетом) бактериями туберкулеза; $I_p(t)$ – люди, зараженные (больные) туберкулезом; $R_p(t)$ – выздоровевшие люди; $S_S(t)$ – некурящие люди; $E_S(t)$ – пассивные курильщики; $I_S(t)$ – курящие люди; $R_S(t)$ – люди, которые бросили курить («выздоровевшие»).[1]

При постоянных параметрах системы были найдены четыре положения равновесия, устанавливающие различные устойчивые соотношения между данными группами людей.

Для двух состояний равновесия рассматривается ситуация, когда не рассматривается курение как фактор. При этом в первом состоянии равновесия все люди здоровы (тривиальный, неприменимый к жизни случай). В третьем состоянии равновесия - все люди здоровые и не курят. Рассмотрено также наиболее реалистичное состояние равновесия, при котором сосуществуют все группы.

$$1) \varepsilon^1 = (S_p, E_p, I_p, R_p, S_S, E_S, I_S, R_S) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)$$

Результаты численного анализа с использованием интегрированного пакета Mathematica:
{Sp → 2.175 × 10⁷, Ep → 0, Ip → 0, Rp → 0, Ss → 0, Es → 0, Is → 0, Rs → 0},

$$2) \varepsilon^2 = (S_p, E_p, I_p, R_p, S_S, E_S, I_S, R_S) = \left(\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\Lambda(\alpha + \mu)}{\mu\beta_S c_S}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda(\alpha + \mu)}{\mu\beta_S c_S}, 0, 0, 0\right)$$

Результаты численного анализа с использованием интегрированного пакета Mathematica:
Sp → 1.74 × 10⁷, Ep → 0, Ip → 0, Rp → 0, Ss → 4350000.0, Es → 0, Is → 0, Rs → 0}

$$3) \varepsilon^3 = (S_P^*, E_P^*, I_P^*, R_P^*, 0, 0, 0, 0)$$

$$S_P^* = \frac{\Lambda}{\mu + \lambda_T^*}, E_P^* = \frac{\Lambda(\lambda_T^{2*} \sigma (fd + f\mu + r) + \lambda_T^{2*} \sigma f\mu(d + r + \mu))}{(\mu + \lambda_T^*)(A\lambda_T^{2*} + B\lambda_T^* + C)},$$

$$I_P^* = \frac{\Lambda(\lambda_T^* \sigma + \mu)(\lambda_T^{2*} \sigma + \lambda_T^* \sigma(k + (1-f)\mu))}{(\mu + \lambda_T^*)(A\lambda_T^{2*} + B\lambda_T^* + C)},$$

$$R_P^* = \frac{\Lambda r(\lambda_T^{2*} \sigma + \lambda_T^* (k(1-f)\mu))}{(\mu + \lambda_T^*)(A\lambda_T^{2*} + B\lambda_T^* + C)}$$

Результаты численного анализа с использованием интегрированного пакета Mathematica:

$$\{Sp \rightarrow 1.* 10^{11}, Ep \rightarrow 5.026309 * 10^{10}, Ip \rightarrow 2.384128 * 10^8, Rp \rightarrow 7.797831 * 10^{10}, \\ Ss \rightarrow 0, Es \rightarrow 0, Is \rightarrow 0, Rs \rightarrow 0\}$$

$$4) \varepsilon^4 = (S_P^{**}, E_P^{**}, I_P^{**}, R_S^{**}, S_S^{**}, E_S^{**}, I_S^{**}, R_S^{**})$$

Выражения для $S_P^{**}, E_P^{**}, I_P^{**}, R_S^{**}, S_S^{**}, E_S^{**}, I_S^{**}, R_S^{**}$ в явном виде очень громоздкие.

Поэтому значения были получены численно.

$$\{Sp \rightarrow 1.* 10^7, Ep \rightarrow 1.0669 * 10^7, Ip \rightarrow 0.0234 * 10^7, Rp \rightarrow 1.2298 * 10^7, \\ Ss \rightarrow 0.3687 * 10^7, Es \rightarrow .3093 * 10^7, Is \rightarrow .0284 * 10^7, Rs \rightarrow 0.4831 * 10^7\}$$

Установлена асимптотическая устойчивость этого состояния равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. P. Bhunu, S. Mushavabasa and J. M. Tchuente. A Theoretical Assessment of the Effects of Smoking on the Transmission Dynamics of Tuberculosis. *J. Bull Math Biol.* 2011. V. 73: P. 1333–1357
2. Carr J. *Applications of Centre Manifold Theory.* Springer. 1981. P. 142.