ЗАДАЧА О ПРЕДЕЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ ДЛЯ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ НЕСЖИМАЕМОГО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

А. А. Буханько

ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет),
abukhanko@mail.ru

Предельные состояния твердых тел связываются, как правило, с их пластическими свойствами. Задача о предельном равновесии упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела соответствует задаче о начале пластического течения, определяемого пределом текучести σ_S материала. Предполагается, что тело в начальный момент времени однородно и изотропно на некотором уровне пластических деформаций, характеризуемом параметром упрочнения, в качестве которого выбран модуль первого инварианта тензора конечных деформаций Альманси $|I_E|$.

При описании предельного состояния материала используется условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний упрочняющегося несжимаемого жесткопластического тела [1,2]. В общем случае новое условие пластичности содержит второй и третий инвариант тензора напряжений и является гладким. В девиаторной плоскости кривая пластичности имеет вид замкнутого криволинейного треугольника с тремя осями симметрии [3]. В главных компонентах тензора напряжений условие (1) имеет вид

$$\begin{gathered}(\sigma_2+\sigma_3-2\sigma_1)(\sigma_3+\sigma_1-2\sigma_2)(\sigma_1+\sigma_2-2\sigma_3)+\\ +\frac{9}{2}\sigma_S(I_E)\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]=27\sigma_S^3(I_E)\left[1-\frac{27}{(3-2I_E)^3}\right],\end{gathered} \tag{1}$$

где σ_S - предел текучести, $I_E=E_1+E_2+E_3$ - первый инвариант тензора конечных деформаций Альманси. При этом значения $\sigma_S=\sigma_S(I_E)$ определяются из эксперимента на одноосное растяжением образца и характеризуют состояние упрочнения на данном уровне деформаций, определяемом параметром упрочнения $|I_E|$.

Для пластического течения в условиях плоской и осесимметричной деформации получены системы разрешающих уравнений, являющиеся гиперболическими. При этом алгоритм решения краевых задач в условиях плоской деформации в целом совпадает с решением аналогичных задач при условии Мизеса, т.к. вид нового условия совпадает с условием Мизеса:

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=\frac{4\sigma_S^2(I_E)\left[(3-2I_E)^2(\cos\Phi-1)^2(2\cos\Phi+1)-27\right]}{(3-2I_E)^3(2\cos\Phi+1)},$$

где $\Phi=\frac{\varphi}{3}+\gamma_{1,2,3}$, $\varphi=\arccos\left[1-\frac{27}{(3-2I_E)^3}\right]$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=\frac{2\pi}{3}$, $\gamma_3=\frac{4\pi}{3}$. Отличие этого условия заключается в определении третьего главного значения тензора напряжений, действующего вдоль оси цилиндрического тела:

$$\left(\sigma_z\right)_{1,2,3}=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+3\sigma_S\left(I_E\right)\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\gamma_{1,2,3}\right).$$

В условиях осесимметричной деформации система разрешающих уравнений практически совпадает с алгоритмом решения задач для пластического течения в условиях осесимметричной деформации на ребре Треска. При этом условие пластичности (2) имеет следующий вид

$$\left[\left(\sigma_\varphi+\sigma_z-2\sigma_r\right)\left(\sigma_r+\sigma_\varphi-2\sigma_z\right)-9\tau_{rz}^2\right]\left(\sigma_z+\sigma_r-2\sigma_\varphi\right)+$$
$$+\frac{9}{2}\sigma_S\left(I_E\right)\left[\left(\sigma_r-\sigma_\varphi\right)^2+\left(\sigma_\varphi-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_r\right)^2+6\tau_{rz}^2\right]=27\sigma_S^3\left(I_E\right)\left[1-\frac{27}{\left(3-2I_E\right)^3}\right].$$

Энергетическое условие развития пластической области принимает следующий вид:

$$\left\{3\left[\left(\sigma_\varphi+\sigma_z-2\sigma_r\right)\left(\sigma_r+\sigma_\varphi-2\sigma_z\right)-9\tau_{rz}^2\right]\left(\sigma_z+\sigma_r-2\sigma_\varphi\right)+\right.$$
$$\left.+9\sigma_S\left(I_E\right)\left[\left(\sigma_r-\sigma_\varphi\right)^2+\left(\sigma_\varphi-\sigma_z\right)^2+\left(\sigma_z-\sigma_r\right)^2+6\tau_{rz}^2\right]\right\}d\lambda=dA_p, \tag{2}$$

где dA_p - приращение работы пластической деформации. Условие (2) позволяет определить бесконечно малый скалярный множитель $d\lambda$, связывающий компоненты тензора скорости деформации и напряжений согласно ассоциированному закону пластического течения. Из эксперимента на одноосное растяжение цилиндрического образца следует, что $\frac{dA_p}{d\lambda}=12\sigma_S^3\left(I_E\right)$. Заметим, что при условии пластичности Мизеса энергетическое условие (2) совпадает с самим условием пластичности с точностью до множителя.

При условии (1) согласно ассоциированному закону пластического течения в рамках плоской и осесимметричной деформаций выполняется условие несжимаемости, но не выполняется условие пропорциональности компонент тензора скорости деформации и девиатора напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хромов А.И., Кочеров Е.П., Григорьева А.Л.* Деформационные состояния и условия разрушения жесткопластических тел // Докл. Акад. наук. 2007. Т. 413, № 4. С. 481-485.

2. *Буханько А.А., Григорьева А.Л., Кочеров Е.П., Хромов А.И.* Деформационно-энергетический критерий разрушения жесткопластических тел // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 6.С. 178-186.

3. *Писаренко Г.С., Лебедев А.А.* О форме предельной поверхности механического критерия прочности // Прикл. механика. 1968. Т. 4, № 3. С. 45–50.