

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АТТРАКТОРА ЛОРЕНЦА

Аттрактор Лоренца реализуется при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - z), \\ \frac{dy}{dt} &= x(r - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{1}$$

Для системы уравнений (1) классическими считаются следующие значения параметров: $\sigma=10$, $r=28$ и $b=8/3$. Решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=1$, $y(0)=0$, $z(0)=0$, является классическим (именно в таком виде систему исследовал Лоренц).

Целью данной работы является моделирование известных бифуркаций при численном решении данной системы и их зависимости от параметров системы. Производится вариация параметров σ , r , b с последующим численным решением системы (1) методом Рунге-Кутты 4 порядка, и находятся значения данных параметров, при которых происходит качественное изменение картины решений (бифуркация). Указанные параметры варьировались по двум алгоритмам. В первом алгоритме два из трех параметров задавались классическими, а третий варьировался в широких пределах. При этом наблюдались и фиксировались характерные бифуркации. Во втором алгоритме фиксировался классическим только один параметр. Для каждого выбранного значения одного из изменяемых параметров находилось значение другого, при котором появляется некоторый признак (в рассматриваемом случае хаотический режим), и строились графики изменения исходных переменных.

Можно показать, что для случая $r > 1$ существуют три стационарных точки системы (1), в которых все три производные равны нулю:

$$(0, 0, 0),\tag{2}$$

$$(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1),\tag{3}$$

$$(-\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1).\tag{4}$$

Если линеаризовать уравнения (1) в точке (2), то одно из собственных чисел всегда является положительным при $r > 1$. При линеаризации системы (1) в точках (2) и (3) одно из чисел всегда отрицательное, а два других – комплексно сопряженные при значениях r порядка единицы. В зависимости от выбранных параметров действительная часть комплексно-сопряженных собственных чисел может быть различного знака. На рисунке 1 показан типичный график зависимости этой действительной части от параметра r (при $\sigma=10$ и $b=8/3$).

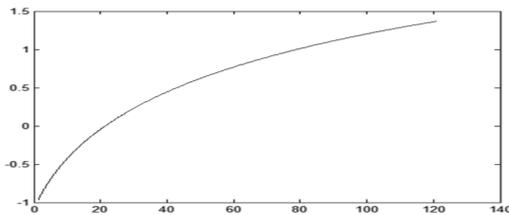


Рисунок 1 – Зависимость действительной части сопряженных собственных чисел в точках (2) и (3) от r

В процессе изменения параметра r при фиксированных классических $\sigma=10$ и $b=8/3$ были найдены основные бифуркации. Траектории, стремившиеся к точкам вблизи начала отсчета, при переходе через $r \approx 1,3$ устремляются к точкам (2) и (3).

При $r \approx 18,58$ происходит образование хаотического режима (рисунок 2), и появляются траектории, которые переходят от длительного вращения вокруг одного фокуса к вращению вокруг другого.



Рисунок 2 – Численное решение при $r=18,57$ (а) и $r=18,58$ (б)

При $r \approx 21,5$, в соответствии с линеаризованной моделью, седло-фокусы (2) и (3) неустойчивы (рисунок 3).

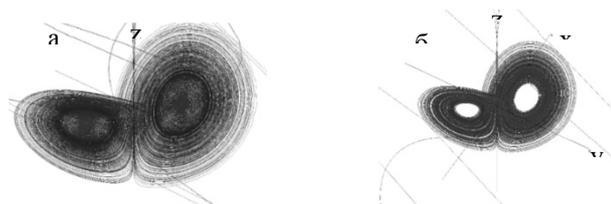


Рисунок 3 – Численное решение при $r=19,5$ (а) и $r=22$ (б)

В дальнейшем появляются автоколебательные решения, сохраняющиеся в небольшом диапазоне γ (рисунок 4а), а также хаотическая «лента» (рисунок 4б), которая также преобразуется в несколько автоколебательных траекторий при некоторых γ .

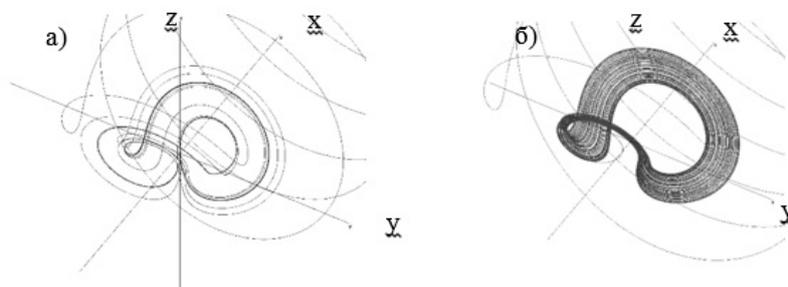


Рисунок 4 – Численное решение при $\gamma=160,5$ (а), $\gamma=266$ (б)

В конечном итоге при больших значениях γ все траектории устремляются к простому циклу. При вариации σ и b получаются аналогичные режимы, однако при увеличении b «эволюция» переменных системы, показанная выше, идёт в обратной последовательности. Для демонстрации этого эффекта был построен график (нижняя кривая на рисунке 5) зависимости наименьшего значения параметра γ , при котором происходит переход картины решений в хаотическую стадию от параметра b (применен второй из рассмотренных алгоритмов).

Верхняя кривая на рисунке 5 показывает зависимость коэффициента γ , при котором собственные числа в точках (2) и (3) обращаются в ноль от коэффициента b . Также видна критическая величина $b_{кр}$, такая, что при $b > b_{кр}$, седло-фокусы всегда устойчивы.

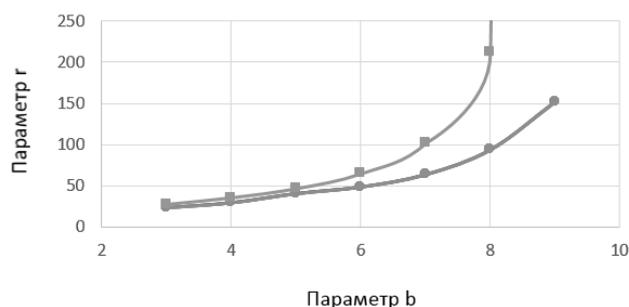


Рисунок 5 – Зависимость переходных величин γ от b

Библиографический список

1. Лоренц, Э.Н. Детерминированное неперiodическое движение [Текст] / Э.Н. Лоренц. - М.: МИР, 1981.
2. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.