УДК 531

**Дорошин А.В., Ерёменко А.В.**

# ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ НАНОСПУТНИКА СО СТАБИЛИЗИРУЕМЫМ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ПОЛОЖЕНИЕМ ПОДВИЖНОГО УСТРОЙСТВА

## Механическая и математическая модели

На рис. 1 представлена механическая структура составного (двутельного) космического аппарата (КА) со взаимосвязями и внутренними степенями свободы.

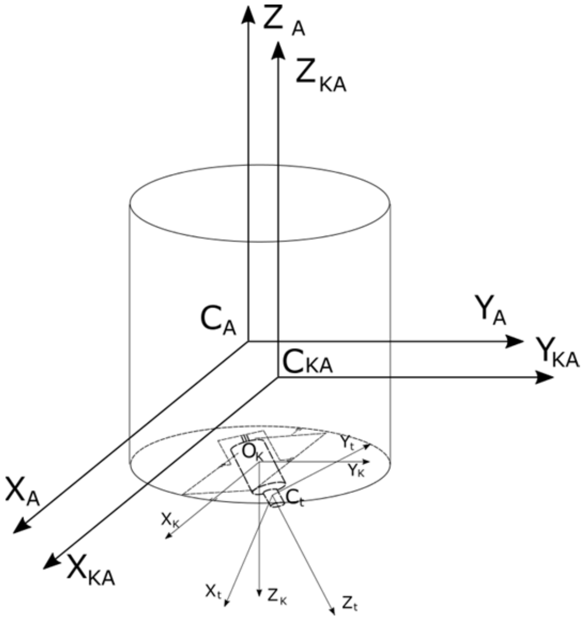


Рис. 1. Структура КА с внутренними степенями свободы: 1 – корпус космического аппарата (несущее тело), тело 2 – подвижное устройство в кардановом подвесе

Ввведем следующую группу систем координат:

– $C_{KA}X_{KA}Y_{KA}Z_{KA}$ – система координат, начало которой совпадает с центром масс составного КА, а оси параллельны главным центральным осям инерции корпуса (несущего тела) космического аппарата;

– $C_AX_AY_AZ_A$ – система координат, начало которой совпадает с центром масс несущего тела, а оси являются главными центральными осями инерции несущего тела;

– $O_KX_KY_KZ_K$ – система координат, начало которой совпадает с неподвижной точкой карданова подвеса, оси которой остаются параллельными осям главными центральными осями инерции несущего тела;

– $C_tX_tY_tZ_t$ – система координат, начало которой совпадает с центром масс подвижного устройства, а оси являются главными центральными осями инерции подвижного устройства (ПУ).

Рассмотрим движение составного КА в системе координат $C_{KA}X_{KA}Y_{KA}Z_{KA}$, которую будем именовать основной. Определим положения центров масс частей космического аппарата в основной системе координат (рис.1). Для нахождения динамических уравнений описывающих угловое движение корпуса КА запишем теорему об изменении кинетического момента

$$\left(\frac{\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{K_1}}{\mathbf{dt}}+\boldsymbol{\omega_1}\times\mathbf{K_1}\right)+\mathbf{A}_1\left(\frac{\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{K_2}}{\mathbf{dt}}+\boldsymbol{\omega_2}\times\mathbf{K_2}\right)=\mathbf{M_c^e}, \tag{1}$$

где $K_1$ – кинетический момент корпуса КА, $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{i}$ вектор угловой скорости корпуса КА, $K_2$ – кинетический момент подвижного устройства, $\boldsymbol{\omega}_1$ – вектор угловой скорости подвижного устройства, $\mathbf{M_c^e}$ – вектор моментов внешних возмущающих сил.

Для нахождения оставшихся двух уравнений движения составного КА, описывающих внутренние степени свободы, найдём кинетическую энергию системы и запишем уравнение Лагранжа второго рода:

$$T=\frac{1}{2}\left(\mathbf{K_1}\boldsymbol{\omega_1}+\mathbf{K_2}\boldsymbol{\omega_2}+m_1\mathbf{V_1^2}+m_2\mathbf{V_2^2}\right), \tag{2}$$

где $T$ – полная кинетическая энергия механической системы.

Так как на механическую систему не действуют потенциальные силы, уравнение Лагранжа запишется в следующем виде

$$L=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\dot{\varphi}_i}-\frac{\partial T}{\partial\varphi_i}=0, \tag{3}$$

где $\varphi_i$ – обобщённые координаты, $\dot{\varphi}_i$ – обобщённые скорости механической системы.

Уравнения (1) и (3) образуют систему динамических уравнений движения составного КА

$$\begin{cases}\left(\frac{\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{K_a}}{\mathbf{dt}}+\omega_\mathbf{a}\times\mathbf{K_a}\right)+\mathbf{A}_2\left(\frac{\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{K_t}}{\mathbf{dt}}+\omega_\mathbf{t}\times\mathbf{K_t}\right)=\mathbf{M_c^e},\\ \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\frac{\partial\mathbf{T}}{\dot{\varphi}_\mathbf{i}}-\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\varphi_\mathbf{i}}=\mathbf{M_c^e}+\mathbf{M_c^\mathit{i}}.\end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{M_c^\mathit{i}}$ – вектор внутренних управляющих моментов:

$$\mathbf{M_c^i}=\begin{cases}c_1\left(\varphi_1-\varphi_{1k}\right)+d_1\left(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_{1k}\right),\\ c_2\left(\varphi_2-\varphi_{2k}\right)+d_2\left(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_{2k}\right),\end{cases} \tag{5}$$

где $c_1, d_1, c_2, d_2$ – безразмерные коэффициенты усиления, $\varphi_{\mathrm{i}k}$ – конечное значение обобщённой координаты, $\varphi_{ik}$ – конечное значение обобщённой скорости.

Компоненты угловых скоростей частей составного КА, при выбранной последовательности поворотов $X \to Y \to Z$, определяются следующими кинематическими уравнениями:

$$\begin{cases} p_i = \dot{\alpha}_i \cos(\beta_i)\cos(\gamma_i) + \dot{\beta}_i \sin(\gamma_i), \\ q_i = -\dot{\alpha}_i \cos(\beta_i)\sin(\gamma_i) + \dot{\beta}_i \cos(\gamma_i), \\ r_i = \dot{\alpha}_i \sin(\beta_i) + \dot{\gamma}_i, \end{cases} \tag{6}$$

где $p_i, q_i, r_i$ – проекции угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{i}$ на оси системы координат $C_A X_A Y_A Z_A$, при i=1 и на систему координат $C_t X_t Y_t Z_t$, при i =2, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – углы Крылова ($\gamma_2 = \dot{\gamma}_2 = 0$).

**Результаты численного моделирования**

Принимались следующие начальные условия и параметры составного КА: $m_1$=10 [кг], $m_2$=10 [кг]; моменты инерции КА: $A_1$=40, $B_1$=30 [кг*м$^2$], $C_1$=20 [кг*м$^2$]; моменты инерции ПУ: $A_2$=$B_2$=20 [кг*м$^2$], $C_2$=50 [кг*м$^2$]; начальные значения угловых скоростей КА: $p_1$=$q_1$=$r_1$=0,3 [рад/с]; начальные значения углов КА: $\alpha_1$=$\beta_1$=$\gamma_1$=0 [рад]; начальные значения угловых скоростей ПУ: $p_1$=$q_1$=$r_1$=0 [рад/с]; начальные значения углов ПУ: $\alpha_1$=$\beta_1$=$\gamma_1$=0 [рад]; $c_1, d_1, c_2, d_2$=10; $\alpha_{1k}$=-0,3 [рад]; $\beta_{1k}$=0,4 [рад]; время интегрирования 100 [с].

Корректность полученных результатов интегрирования уравнений динамики КА проверялась из условия сохранения естественных интегралов движения (сохранение кинетического момента и сохранение кинетической энергии при свободном движении).

Результаты моделирования приведены на рис. 2-6.

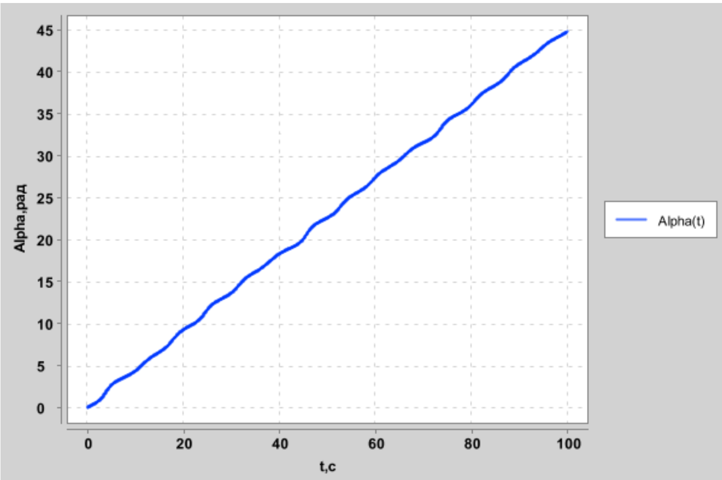


Рис. 2. Зависимость угла $\alpha_1$ корпуса КА от времени

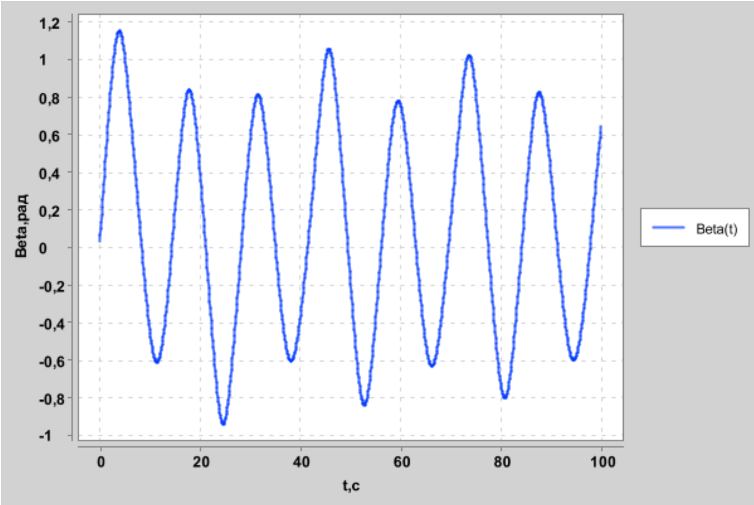


Рис. 3. Зависимость угла $\beta_1$ корпуса КА от времени

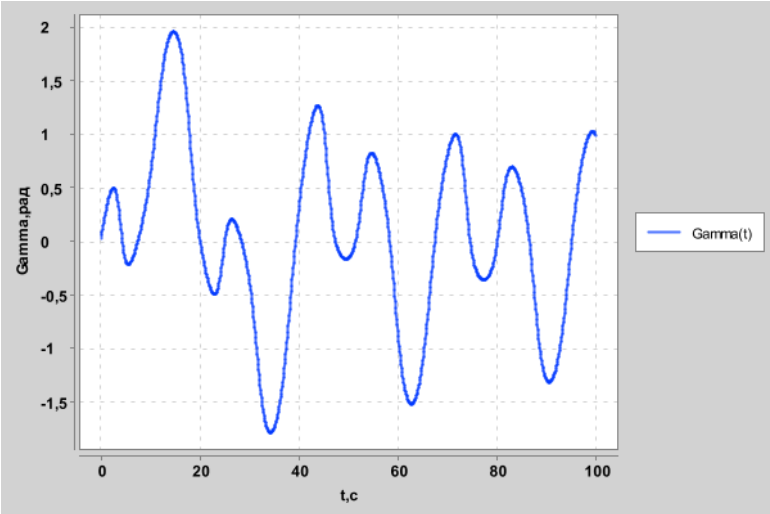


Рис. 4. Зависимость угла $\gamma_1$ корпуса КА от времени

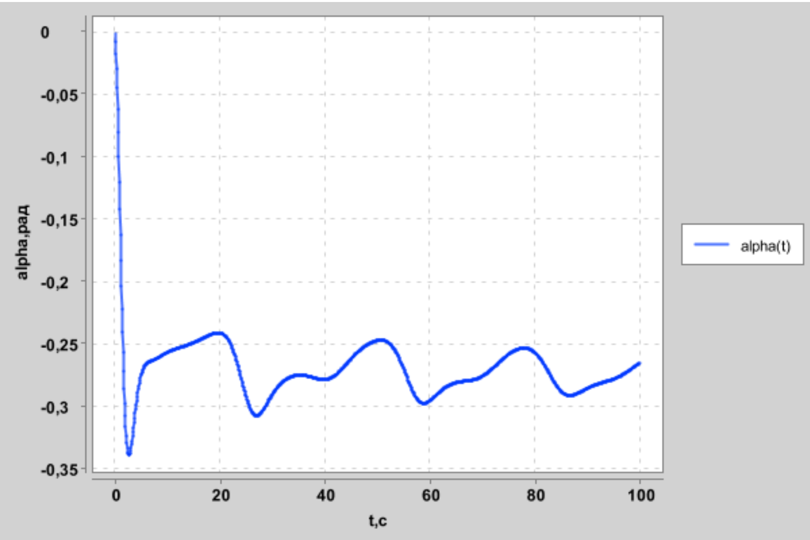


Рис. 5. Зависимость угла $\alpha_2$ ПУ от времени

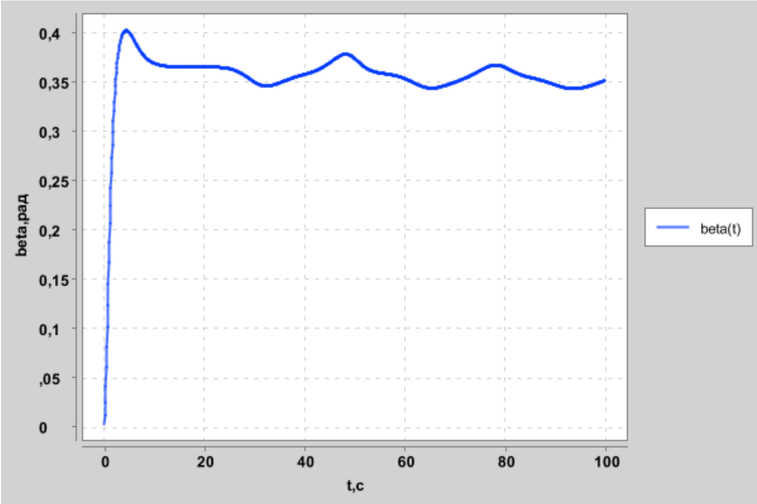


Рис. 6. Зависимость угла $\beta_2$ ПУ от времени

Как видно из графиков, динамика движения несущего тела близка к динамике движения свободного твёрдого тела. Значения углов $\alpha_2$ и $\beta_2$ стремятся к требуемым конечным значениям.

**Библиографический список**

1. Schiehlen W. Research trends in multibody system dynamics//Multibody System Dynamics. – 2007. – Т. 18. – №. 1. – С. 3-13.

2. Wittenburg J. (1977), Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Stuttgart: Teubner.

3. Likins P.W. (1986), Spacecraft Attitude Dynamics and Control – A Personal Perspective on Early Developments, J. Guidance Control Dyn. Vol. 9, No. 2, pp. 129-134.

4. Бейнум П.М., Фуксел П.Дж., Мэкисон Д.Л. Движение и устойчивость спутника с двойным вращением, снабженного демпферами нутации // Сборник статей. Механика. Новое в зарубежной науке. Задачи стабилизации составных спутников. М.: Мир, 1975. С. 59-78.

5. Аншаков Г.П., Асланов В.С., Балакин В.Л., Дорошин А.В., Квашин А.С., Круглов Г.Е., Юдинцев В.В. Динамические процессы в ракетно-космических системах // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). – 2003. – №. 1.

6. Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска // Космические исследования. – 2002. – Т. 40. – №. 2. – С. 193-200.

7. Асланов В.С., Дорошин А.В. О двух случаях движения неуравновешенного гиростата // Изв. РАН. МТТ. 2006. №4, С. 42-55.

8. Doroshin A.V., Heteroclinic chaos and its local suppression in attitude dynamics of an asymmetrical dual-spinspacecraft and gyrostat-satellites. The part I – main models and solutions, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (2016), 31 (1-3), pp. 151-170.