

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЛУННОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ ПРИТЯЖЕНИЯ ЗЕМЛИ

**Введение.** Актуальность исследований динамики и разработка законов управления движения тросовых спутниковых группировок объясняется возможностью создания космических систем, состоящих из нескольких малых космических аппаратов, соединённых тросами. Обзор применения КТС приведён в работах [1, 2].

Многие проекты освоения Луны и Марса предполагают использование космической станции на окололунной орбите [3,4].

**Постановка задачи.** В работе рассматривается развёртывание радиальной КТС, состоящей из космической станции и МКА, на окололунной орбите с учётом притяжения Земли (рис. 1).

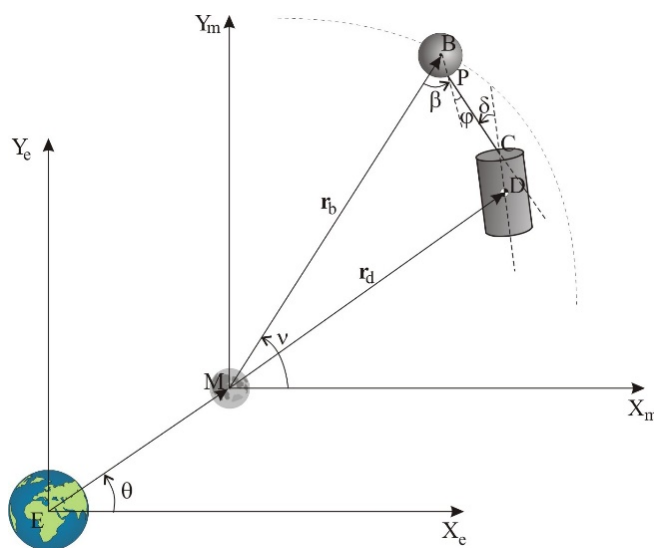


Рис. 1. Радиальная окололунная тросовая система

Развёртывание производится по закону управления, который обеспечивает развёртывание троса на заданную длину при небольших отклонениях от вертикального положения. Приводится сравнение процесса развёртывания при наличии притяжения Земли и без его учёта.

**Математическая модель.** Рассматриваемая в работе механическая система (рис. 1) состоит из космической станции  $D$  и малого космического аппарата  $B$ ,

который прикреплен к станции невесомым нерастяжимым тросом длины  $l_b$ . Станцию будем считать цилиндром, масса которого  $m_d$ , длина  $d$ , радиус –  $\rho_d$ , спутник – шаром, масса которого  $m_b$ , радиус  $\rho_b$ .  $\nu, \theta$  – углы истинной аномалии спутника и Луны;  $\beta$ – угол отклонения центральной оси спутника В от локальной вертикали;  $\varphi$ – угол отклонения троса, соединяющего станцию и спутник, от оси симметрии спутника;  $\delta$  – угол отклонения оси симметрии станции от троса в месте его крепления к станции;  $r_b$  – радиус орбиты спутника В.

С помощью второго закона Ньютона и теоремы об изменении кинетического момента запишем уравнения движения [5]:

$$\begin{aligned} m_b \ddot{\mathbf{r}}_b &= \mathbf{T} + \mathbf{G}_b^m + \mathbf{G}_b^e, \\ m_d \ddot{\mathbf{r}}_d &= -\mathbf{T} + \mathbf{G}_d^m + \mathbf{G}_d^e, \\ J_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_b - \boldsymbol{\omega}_b \times J_b \boldsymbol{\omega}_b - \mathbf{r}_b \times \mathbf{T} - \mathbf{M}_b^m - \mathbf{M}_b^e, \\ J_d \dot{\boldsymbol{\omega}}_d &= \boldsymbol{\omega}_d \times J_d \boldsymbol{\omega}_d - \mathbf{r}_d \times \mathbf{T} - \mathbf{M}_d^m - \mathbf{M}_d^e, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $G_b^m = -m_b \mu_M r_b |r_b|^{-3}$ ,  $G_d^m = -m_d \mu_M r_d |r_d|^{-3}$ ,  $G_b^e = -m_b \mu_E r_b |r_b|^{-3}$ ,  $G_d^e = -m_d \mu_E r_d |r_d|^{-3}$ , с индексом  $m$  векторы сил притяжения Луны и с индексом  $e$  – Земли, действующих на спутник В и станцию D соответственно.

$\mathbf{T}_b^m = -\mathbf{T}_d^m = \{T \sin(\beta + \varphi), -T \cos(\beta + \varphi), 0\}^T$  – векторы силы натяжения троса,

$\boldsymbol{\omega}_b = \{0, 0, \dot{\nu} + \dot{\beta}\}^T$ ,  $\boldsymbol{\omega}_d = \{0, 0, \dot{\nu} + \dot{\beta} + \dot{\varphi} + \dot{\delta}\}^T$  – угловые скорости спутника В и

станции С относительно центра масс механической системы,  $J_b, J_d$  – диагональ-

ные матрицы моментов инерции спутника В и станции D. Радиус-векторы, за-

дающие положение станции и спутника в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_b &= \{r_b \cos \nu, r_b \sin \nu, 0\}^T, \mathbf{r}_d = \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\cos \nu \left( \rho_b \sin \beta + l_b \sin(\beta + \varphi) + \frac{d \sin(\beta + \varphi + \delta)}{2} \right) - \sin \nu \left( r_b - \rho_b \cos \beta - l_b \cos(\beta + \varphi) - \frac{d \cos(\beta + \varphi + \delta)}{2} \right) \\ &\sin \nu \left( \rho_b \sin \beta + l_b \sin(\beta + \varphi) + \frac{d \sin(\beta + \varphi + \delta)}{2} \right) + \cos \nu \left( r_b - \rho_b \cos \beta - l_b \cos(\beta + \varphi) - \frac{d \cos(\beta + \varphi + \delta)}{2} \right) \end{aligned} \right\}^T, \\ &0 \end{aligned}$$

Гравитационные моменты, действующие на спутник  $B$  и станцию  $D$ , обусловленные притяжением Луны, в общем виде записываются как [5]

$$M_b^m = \left\{ \frac{3\mu_M(J_{bz} - J_{by})r_{by}r_{bz}}{|r_b|^3}, \frac{3\mu_M(J_{bx} - J_{bz})r_{bz}r_{bx}}{|r_b|^3}, \frac{3\mu_M(J_{by} - J_{bx})r_{bx}r_{by}}{|r_b|^3} \right\}^T;$$

$$M_d^m = \left\{ \frac{3\mu_M(J_{dz} - J_{dy})r_{dy}r_{dz}}{|r_d|^3}, \frac{3\mu_M(J_{dx} - J_{dz})r_{dz}r_{dx}}{|r_d|^3}, \frac{3\mu_M(J_{dy} - J_{dx})r_{dx}r_{dy}}{|r_d|^3} \right\}^T.$$

Положение Луны относительно Земли:  $r_m = \left\{ \frac{\rho_m \cos \theta}{1 + e_m \cos \theta}, \frac{\rho_m \sin \theta}{1 + e_m \cos \theta}, 0 \right\}^T$ , где

$e_m, \rho_m$  – эксцентриситет и фокальный параметр Луны.

Движение Луны вокруг Земли описывается уравнением [1]:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\mu_E / \rho_M^3 (1 + e_M \cos \theta)^2}, \quad (2)$$

где  $\mu_E$  – гравитационный параметр Земли.

Запишем в общем виде выражения гравитационного момента, действующего на станцию  $D$  и спутник  $B$ , обусловленного притяжением Земли:

$$M_d^e = \left\{ \frac{3\mu_E(J_{dz} - J_{dy})ED_yED_z}{|r_d|^3}, \frac{3\mu_E(J_{dx} - J_{dz})ED_zED_x}{|r_d|^3}, \frac{3\mu_E(J_{dy} - J_{dx})ED_xED_y}{|r_d|^3} \right\}^T,$$

$$M_b^e = \left\{ \frac{3\mu_E(J_{bz} - J_{by})EB_yEB_z}{|r_b|^3}, \frac{3\mu_E(J_{bx} - J_{bz})EB_zEB_x}{|r_b|^3}, \frac{3\mu_E(J_{by} - J_{bx})EB_xEB_y}{|r_b|^3} \right\}^T,$$

где векторы  $ED = r_m + r_d$ ,  $EB = r_m + r_b$ .

В уравнениях (1) введём замену:  $u_b = \dot{l}_b / l_b$ , где  $u_b$  – предлагаемый закон управления выпуском троса:

$$u_b = (1/2\dot{v} - (\dot{\beta} + \dot{\varphi} + \dot{\delta})l_b/l_{b\max}) \cdot (l_{b\max} - l_b)/l_{b\max}. \quad (3)$$

Выражая из (3)  $\dot{l}_b$  и дифференцируя по  $t$ , получим:

$$\ddot{l}_b = \left( \frac{l_{b\max} - l_b}{l_{b\max}} \left( \frac{\dot{v}}{2} - \frac{(\ddot{\beta} + \ddot{\varphi})l_b - \dot{\beta} - \dot{\varphi}}{l_{b\max}} \right) - \frac{\dot{l}_b}{l_{b\max}} \left( \frac{\dot{v}}{2} - \frac{\dot{\beta} + \dot{\varphi}l_b}{l_{b\max}} \right) \right) l_b + \dot{l}_b \left( \frac{\dot{v}}{2} - \frac{(\dot{\beta} + \dot{\varphi})l_b}{l_{b\max}} \right). \quad (4)$$

Таким образом, в систему уравнений движения КТС входят уравнения (1) без первого уравнения, уравнение (2) и уравнение (4).

**Результаты моделирования.** При численном моделировании использовались следующие массово-геометрические параметры: масса станции  $m_d = 2000$  кг, её длина  $d = 2$  м и радиус  $\rho_d = 1$  м, масса спутника  $m_b = 20$  кг, его радиус  $\rho_b = 1$  м. Конечное значение длины троса  $l_{b\max} = 500$  м. Начальные условия:  $\theta_0 = \pi/2$  рад,  $\nu_0 = -\pi/2$  рад,  $\beta_0 = 0.01$  рад,  $\delta_0 = \varphi_0 = 0$  рад,  $l_{b0} = 0.01$  м,  $r_{b0} = 500$  км,  $\dot{\nu} = 0.00066$  рад/с,  $\dot{\beta}_0 = \dot{\delta}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$  рад/с,  $\dot{l}_{b0} = 0.00033$  м/с. На рис. 2,3 показаны графики изменения параметров системы при её движении по возмущённой (графики синего цвета) и невозмущённого (графики красного цвета) окололунной орбите.

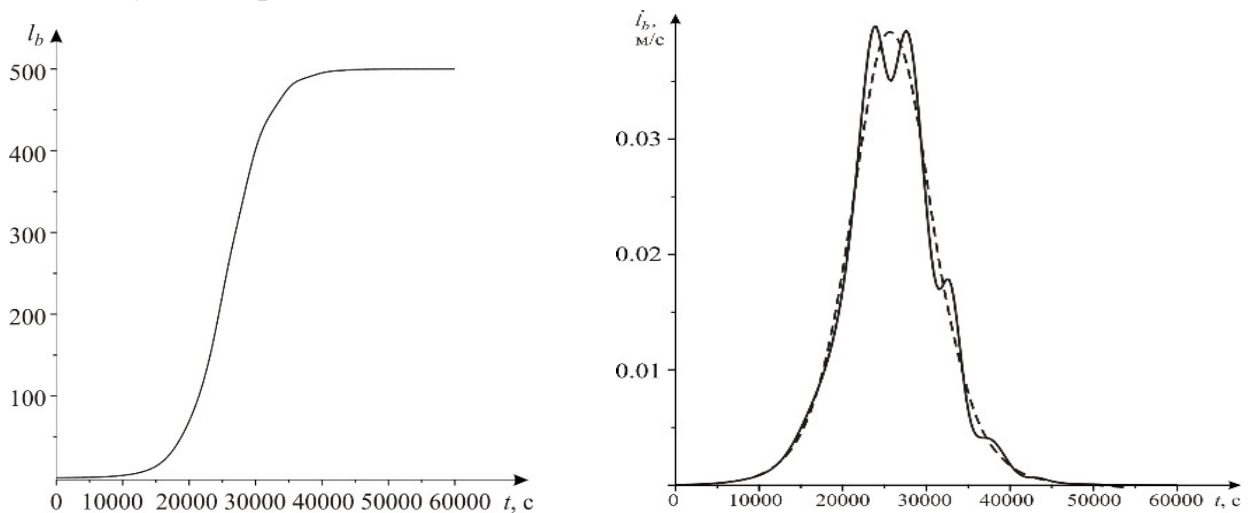


Рис. 2. Изменение длины троса  $l_b(t)$  и скорости изменения длины троса  $\dot{l}_b(t)$

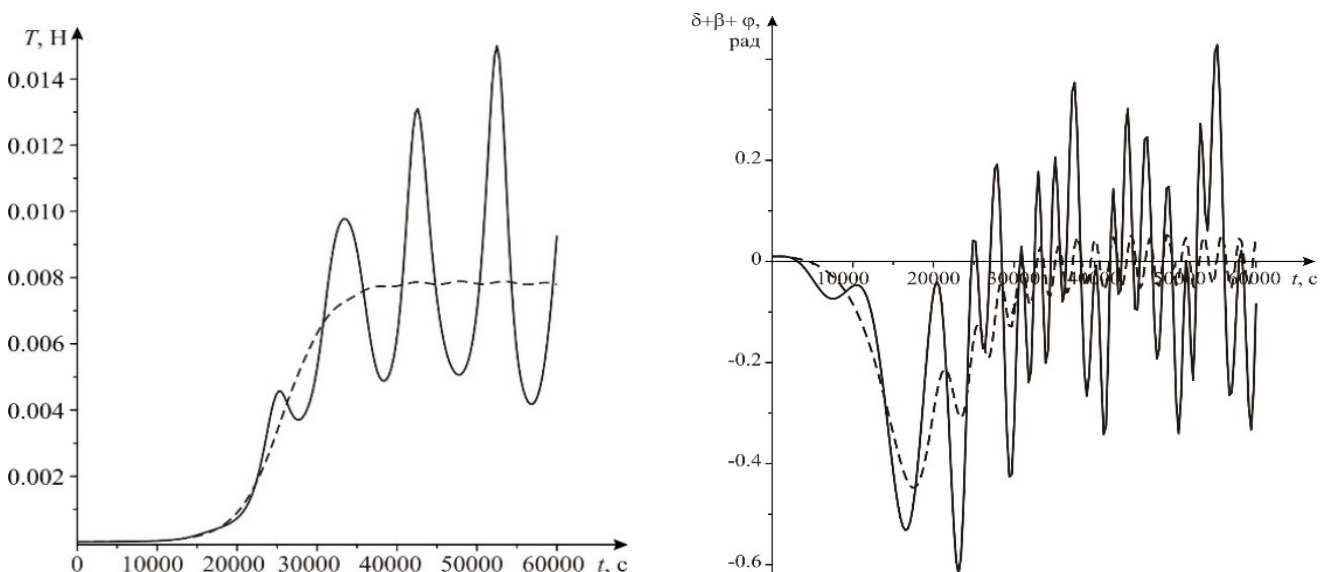


Рис. 3. Изменение силы натяжения троса  $T$  и отклонения спутника от местной вертикали

**Заключение.** Рассматривалось возмущённое движение при развёртывании по предложенному закону КТС, состоящей из космической станции и МКА. С помощью второго закона Ньютона и теоремы об изменении кинетического момента были составлены уравнения движения и разработана математическая модель движения. Показано, что предлагаемый закон управления выпуском троса обеспечивает развёртывание троса на заданную длину. Проведено сравнение графиков при движении тросовой системы по возмущённой и невозмущённой орбите.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая в рамках научного проекта №21-51-53002.

### **Библиографический список**

1. Белецкий, В.В. Динамика космических тросовых систем / В.В. Белецкий, Е.М. Левин. – М.: Наука, 1990. – 329 с.
2. Cartmell, M.P. A review of space tether research / M.P. Cartmell, D.J. McKenzie // Progress in Aerospace Sciences. – 2008. – Т. 44. – №1. – С. 1–21.
3. Cichan, T. Concept for a crewed lunar lander operating from the lunar orbiting platform-gateway / T. Cichan, S.A. Bailey, A. Burch, N.W. Kirby // 69th international astronautical congress (IAC). – 2018.
4. Haws, T.D. SLS, the Gateway, and a Lunar Outpost in the Early 2030s / T.D. Haws, J.S. Zimmerman, M.E. Fuller // IEEE Aerospace Conference Proceedings. – 2019.
5. Junkins, J.L. Analytical mechanics of space systems / J.L. Junkins, H. Schaub. – American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 2009.

УДК 531.36, 629.7

*Старинова О.Л., Марченко А.Д., Шарипова А.Р.*

## **РАСЧЁТ МИССИИ ЗЕМЛЯ – МАРС С ПОСАДКОЙ НА ПОВЕРХНОСТЬ ПЛАНЕТЫ**

Марс является четвёртой по удалённости от Солнца и седьмой по размерам планетой Солнечной системы. Это каменная планета, имеющая жидкое ядро, что подтверждается наличием вулканов. Масса Марса существенно меньше земной, атмосферное давление у поверхности в 160 раз меньше земного. Марс получает