УДК 629.78

Заболотнов Ю. М., Лобанков А. А.

МЕТОД РАСЧЁТА РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Рассматривается метод расчёта приближённо оптимального регулятора для стабилизации движения твёрдого тела относительно неподвижной точки. Метод основывается на совместном применении принципа динамического программирования Беллмана и метода усреднения. Метод усреднения применяется для приближённого решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана, что позволяет осуществить синтез регулятора. Методика синтеза может быть применена для стабилизации движения КА в атмосфере, при движении КА на тросе при развёртывании космической тросовой системы.

Постановка задачи и уравнения движения

Движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки описывается классическими динамическими и кинематическими уравнениями Эйлера относительно некоторой неподвижной системы координат. Имея в виду синтез управления, стабилизирующего движение твёрдого тела относительно статически устойчивого положения равновесия, определим углы Эйлера относительно неподвижной системы координат $Ox_1y_1z_1$ так, как это показано на рис. 1 Здесь ψ, θ и φ - углы прецессии, нутации и собственного вращения; $Oxyz$ - связанная с твёрдым телом система координат; $\vec{G}$ - вектор силы тяжести; C - центр масс тела; $\Delta\vec{r}$ - радиус-вектор, определяющий положение центра масс тела относительно неподвижной точки O.

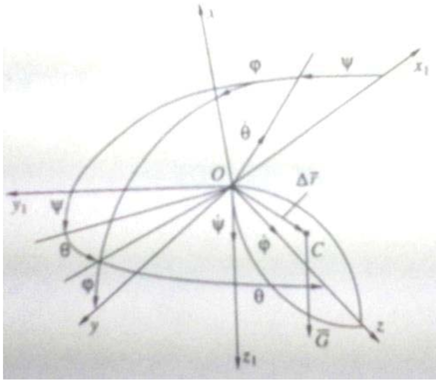

Рисунок 1

Уравнения движения твёрдого тела записываются в комплексной форме при малых углах нутации [1]

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - i\bar{J}_z\omega_z\frac{d\xi}{dt} + \omega^2(r)\xi = \varepsilon F\left(r,\xi,\frac{d\xi}{dt},\omega_z\right) + \varepsilon u \quad (1)$$

где $\xi = \beta + i\alpha$ - комплексный угол нутации ($|\xi| = \theta$), i - мнимая единица, ω_z - угловая скорость вращения твёрдого тела вокруг продольной оси, $\bar{J}_z = J_z / J$, J_z и J - моменты инерции, $\bar{J}_z = J_z / J$, $u = u_\beta + iu_\alpha$ - управление, $F\left(r,\xi,\frac{d\xi}{dt},\omega_z\right)$ - возмущающие функции, $\omega^2(r)$ - с точностью до множителя момент от силы тяжести, r - вектор медленно изменяющихся параметров, ε - малый параметр задачи.

Решение невозмущенного уравнения (1) при $\varepsilon = 0$ можно записать в виде

$$\xi = a_1 e^{i\psi_1} + a_2 e^{i\psi_2}, \quad (2)$$

где a_1 и a_2 - амплитуды колебаний (вещественные величины), $\gamma_1=\omega_1 t+\gamma_1(0)$ и $\gamma_2=\omega_2 t+\gamma_2(0)$ - фазы; $\gamma_1(0), \gamma_2(0)$ - начальные значения фаз; $\omega_{1,2} = \bar{J}_z\omega_z / 2 \pm \omega_\theta$ - частоты колебаний; $\omega_\theta = \sqrt{\bar{J}_z^2\omega_z^2 / 4 + \omega^2}$.

Ставится задача определения управления εu, обеспечивающего динамическую устойчивость движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки в силу уравнения (1) и исходя из минимума квадратичного критерия оптимальности

$$I = \varepsilon\int_0^T W\left(a_1,a_2,u_\alpha,u_\beta\right)dt, \quad (3)$$

где $W\left(a_1,a_2,u_\alpha,u_\beta\right) = b_1a_1^2 + b_2a_2^2 + c\left(u_\alpha^2 + u_\beta^2\right)$, $b_1,b_2,c > 0$ - весовые коэффициенты. Амплитуды колебаний определяются в силу возмущённой системы и должны удовлетворять условиям динамической устойчивости $\frac{da_1}{dt},\frac{da_2}{dt} < 0$ в каждый момент времени.

Движение твёрдого тела рассматривается на асимптотически большом промежутке времени $T = L / \varepsilon$, где $L < \infty$ - некоторая константа, и поэтому функционал (3) изменяется на величину порядка $O(1)$.

Переход к переменным «амплитуды – фазы»

Дифференцируя функцию (2) по времени в силу невозмущённой системы, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = i\left(a_1\,\omega_1 e^{i\psi_1} + a_2\omega_2\, e^{i\psi_2}\right). \tag{4}$$

Рассматривая соотношения (2) и (4) как замену переменных $\left(\xi, \frac{d\xi}{dt}\right) \Rightarrow \left(a_1, a_2, \psi_1, \psi_2\right)$ и применяя метод вариации произвольных постоянных, найдем [1]:

$$\frac{da_{1,2}}{dt} = \mp\frac{1}{2\omega_\theta}\left[a_{1,2}\dot{\omega}_{1,2} + a_{2,1}\dot{\omega}_{2,1}\cos\left(\psi_2 - \psi_1\right) - \varepsilon\,\mathrm{Im}\left(\left(F+u\right)e^{-i\psi_{1,2}}\right)\right], \tag{5}$$

$$\frac{d\psi_{1,2}}{dt} = \omega_{1,2} + \frac{1}{2\omega_\theta a_{1,2}}\left[a_{2,1}\dot{\omega}_{2,1}\sin\left(\psi_1 - \psi_2\right) \mp \varepsilon\,\mathrm{Re}\left(\left(F+u\right)e^{-i\psi_{1,2}}\right)\right], \tag{6}$$

где $\dot{\omega}_{1,2} = \frac{d\omega_{1,2}}{dt} = O\left(\varepsilon\right)$, так как частоты зависят от вектора r медленно изменяющихся параметров; $\mathrm{Re}\left(\cdot\right)$ и $\mathrm{Im}\left(\cdot\right)$ - действительная и мнимая части приведённых функций.

Определение оптимального управления

Согласно принципу динамического программирования, оптимальное управление определяется из условия [2]:

$$\min_{u_\alpha, u_\beta}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + W\left(a, u_\alpha, u_\beta\right)\right) = 0, \tag{7}$$

где $V\left(a,\phi,r\right)$ - производящая функция, а точка $\left(\cdot\right)$ означает скалярное произведение векторов.

Выражение, стоящее под знаком минимума, представляет собой квадратичный степенной полином по компонентам управления u_α, u_β. Поэтому, взяв от этого выражения частные производные по u_α, u_β и приравняв их к нулю, нетрудно получить оптимальное управление в виде

$$u_{\beta}^{o}=\frac{1}{4c\omega_{\theta}}\sum_{k=1}^{2}\left(-1\right)^{k}\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\cos\psi_k-\frac{1}{a_k}\frac{\partial V}{\partial\psi_k}\sin\psi_k\right), \qquad (8)$$

$$u_{\alpha}^{o}=\frac{1}{4c\omega_{\theta}}\sum_{k=1}^{2}\left(-1\right)^{k+1}\left(\frac{\partial V}{\partial a_k}\sin\psi_k+\frac{1}{a_k}\frac{\partial V}{\partial\psi_k}\cos\psi_k\right). \qquad (9)$$

Выражения (8) - (9) обеспечивают минимум функционала (3) в силу положительной определенности функции $W\left(a_1,a_2,u_{\alpha},u_{\beta}\right)$ и при надлежащем определении производящей функции V. Подставив соотношения (8) - (9) в выражение (7) приходим к уравнению в частных производных Гамильтона – Якоби – Беллмана

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial a}\cdot X\left(a,\phi,r\right)+\varepsilon\frac{\partial V}{\partial\phi}\cdot Y\left(a,\phi,r\right)+\frac{\partial V}{\partial\phi}\cdot\omega\left(r\right)+\frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt}+$$

$$+\varepsilon\sum_{k=1}^{2}b_k a_k^2+U=0. \qquad (10)$$

Здесь $\frac{dr}{dt}=O\left(\varepsilon\right)$, $\quad U=-\varepsilon c\left[\left(u_{\alpha}^{o}\right)^2+\left(u_{\beta}^{o}\right)^2\right]$, где u_{α}^{o} и u_{β}^{o} определяются выражениями (8) - (9).

Для определения приближённого решения уравнения Гамильтона – Якоби – Беллмана используется стандартный метод усреднения. В этом случае управление удаётся определить аналитически, то есть осуществить синтез управления.

Так, например, приближённо оптимальное управление, когда $F=0$, имеет вид

$$u_{\alpha}=\frac{\sqrt{b_1}a_1\sin\gamma_1+\sqrt{b_2}a_2\sin\gamma_2}{\sqrt{c\omega_{\theta}}},\quad u_{\alpha}=\frac{\sqrt{b_1}a_1\cos\gamma_1+\sqrt{b_2}a_2\cos\gamma_2}{\sqrt{c\omega_{\theta}}}.$$

Библиографический список

1 Заболотнов Ю. М., Любимов В.В. Вторичные резонансные эффекты при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 49-59.

2 Летов А. М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.