

Горелов Ю. Н., Морозова М. В., Пыринов Н. И., Юрин В. Е.

МЕТОД СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕНАЦЕЛИВАНИЯ АППАРАТУРЫ ЗОНДИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В [1, 2] для синтеза оптимального управления перенацеливанием аппаратуры зондирования космического аппарата (КА) рассматривалась схема последовательных приближений, которая была предложена в [3] и представляла собой соответствующую модификацию метода Пикара [4] для управляемых систем. По результатам проведенных вычисленных экспериментов была установлена высокая эффективность (по скорости сходимости) реализующих этот метод алгоритмов решения задач синтеза оптимального управления переориентацией КА, в том числе при сведении таких задач к двухточечным граничным задачам для линейных систем посредством «квазилинеаризации» уравнений углового движения КА и к последующему применению метода моментов или принципа максимума Н.Н. Красовского [5, 6]. Тем не менее, несмотря на экспериментально установленную высокую скорость сходимости рассматривавшегося в [1, 2] метода, там не затрагивались условия его существования. Поэтому целью настоящей статьи является не только изложение метода синтеза оптимального управления для квазилинейных систем, но и анализ условий его сходимости.

1. Постановка задачи. В [1] показано, что в общем случае уравнения углового движения КА приводятся к следующему виду управляемой квазилинейной системы:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + F(t, x), \quad (1)$$

где x – вектор переменных состояния, u – вектор управляющих параметров, A и B – матрицы соответствующих размерностей, для которых выполняются условия полной управляемости, $F(t, x)$ – некоторая заданная вектор-функция. Предполагается, что правая часть (1) для любого непрерывного или кусочно-непрерывного (с разрывами первого рода) управления $u(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Пикара [4].

Соответственно, в задачах управления ориентацией КА компоненты вектора x суть параметры его ориентации, компоненты вектора u – относительные управляющие моменты по каналам управления ориентацией, а возмущающие моменты (градиентно-гравитационный, гироскопический и др.) моделируются с помощью $F(t, x)$. Следует отметить, что модель управляемой системы (1) охватывает существенно более широкий класс прикладных задач управления.

Для системы (1) рассматривается двухточечная граничная задача управления с фиксированными начальным и конечным состояниями:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (2)$$

где \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_f – заданные векторы, моменты времени t_0 и t_f фиксированы. Требуется найти решение задачи оптимального управления на минимум заданного функционала $J(\mathbf{u})$:

$$J(\mathbf{u}) \rightarrow \min. \quad (3)$$

Если задача управления (1) - (3) связана с оптимальной переориентации КА при переацеливании оптико-электронной аппаратуры зондирования, то функционал $J(\mathbf{u})$ обычно выбирается в виде нормы в L_q ($1 \leq q \leq \infty$) для $\mathbf{u}[t_0, t_f]$ [1, 5]. Так как для решения вспомогательных задач оптимального управления линейными системами далее будет применяться метод моментов [5], то в связи с этим предполагается, что на вектор управляющих параметров \mathbf{u} ограничения не накладываются.

При построении последовательных приближений для синтеза оптимального управления в задаче (1) - (3) вначале следует найти какое-либо подходящее начальное приближение. Как и в [1 - 3], в качестве такого приближения можно выбирать решение рассматриваемой задачи оптимального управления, принимая в (1) $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = 0$:

$$\frac{d\mathbf{x}^{(0)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(0)}; \quad \mathbf{x}^{(0)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^{(0)}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ – оптимальное управление. В общем случае в зависимости от свойств вектор-функции $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ в качестве начального приближения метода можно выбирать любое допустимое решение двухточечной граничной задачи (1), (2) в виде соответствующей пары $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ и $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ на интервале $[t_0, t_f]$, для которой требуется построить процедуру последовательных приближений к решению задачи оптимального управления (1) - (3), а также указать для них условия сходимости.

2. Построение первого приближения по начальному. Вначале изложим процедуру построения первого приближения для указанной задачи оптимального управления, исходя из полученного решения соответствующей задачи управления для (4) начального приближения в виде пары $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ и $\mathbf{x}^{(0)}(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f]$.

Следуя схеме метода последовательных приближений Пикара [4] и учитывая принятое начальное приближение, для полученной из (4) программы управления $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ и началь-

ного приближения $\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{x}_0^{(0)}(t)$ можно было бы последовательно решить такие начальные задачи:

$$\frac{d\mathbf{x}_i^{(0)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1}^{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(0)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_{i-1}^{(0)}); \quad \mathbf{x}_i^{(0)}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (i=1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

В силу теоремы Пикара для них имеет место: $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i^{(0)}(t) = \mathbf{x}_\infty^{(0)}(t)$, где $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty^{(0)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_\infty^{(0)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(0)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(0)}), \quad \mathbf{x}_\infty^{(0)}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (6)$$

В связи с этим необходимость решения задач (5) избыточна и, стало быть, вполне достаточно решить только задачу (6). Очевидно, что в общем случае для её решения будет получено $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t_f) \neq \mathbf{x}_f$. Иначе, то есть при выполнении с требуемой точностью условия $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t_f) = \mathbf{x}_f$, пара $\mathbf{u}^{(0)}(t)$, $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t)$ – возможное искомое решение задачи оптимального управления для (1) - (3). Соответствующий анализ этого случая будет рассмотрен далее при изложении основных соотношений метода. Если же для решения задачи (6) $\mathbf{x}_\infty^{(0)}(t_f) \neq \mathbf{x}_f$, то построение первого приближения должно быть завершено соответствующей коррекцией программы управления $\mathbf{u}^{(0)}(t)$, которая обеспечивает выполнение конечного условия (2). При этом нелинейность в (1) может быть заменена вектор-функцией $\tilde{\mathbf{F}}_0(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(0)}(t))$. Требуемая коррекция управления $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ связана с решением следующей вспомогательной задачи оптимального управления (с тем же функционалом $J(\mathbf{u})$) для «линеаризованной» указанным образом системы (1), а именно:

$$\frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(1)} + \tilde{\mathbf{F}}_1(t); \quad \mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^{(1)}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (7)$$

где $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ – скорректированное оптимальное управление, которое может находиться тем же методом, что и управление $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ в задаче (4). Полученное решение задачи в виде $\mathbf{u}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ можно принимать в качестве следующего (первого) приближения для задачи оптимального управления системой (1) - (3). Задачи управления типа (7) с каким-либо приближением для нелинейности в (1) в виде вектор-функций времени рассматривались в [1] как опорные задачи управления предлагаемого метода решения задачи оптимального управления (1) - (3).

Вводя обозначения: $\delta \mathbf{u}^{(1)}(t) = \mathbf{u}^{(1)}(t) - \mathbf{u}^{(0)}(t)$; $\delta \mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}_\infty^{(0)}(t)$ и вычитая (7)

из (6), получим следующее уравнение в отклонениях:

$$\frac{d\delta \mathbf{x}^{(1)}}{dt} = A\delta \mathbf{x}^{(1)} + B\delta \mathbf{u}^{(1)}(t), \quad (8)$$

решение которого с учётом нулевого начального условия имеет вид

$$\delta \mathbf{x}^{(1)}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B \delta \mathbf{u}^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где $\Phi(t, \tau)$ – переходная матрица для системы (8) (или интегральный экспоненциал – матрицант для матрицы A). При $t = t_f$ из (9) получим $\delta \mathbf{x}^{(1)}(t_f) = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_\infty^{(0)}(t_f)$ в силу построения оптимального управления $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ при решении задачи (7).

Для заданного $\mathbf{u}^{(0)}(t)$ и полученного решения задач (6) и (9) изложенная здесь процедура построения первого приближения для решения задачи (1) - (3), по существу, представляет собой соответствующую модификацию последовательных приближений Пикара для управляемых систем вида (1), связанную с дополнительным введением корректирующего управления $\delta \mathbf{u}^{(1)}(t)$.

3. Основные соотношения метода. Очевидно, что для полученной пары $\mathbf{u}^{(1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ далее можно решать задачи, аналогичные (6), (7), то есть вначале вычислять $\mathbf{x}_\infty^{(1)}(t)$ и пару $\mathbf{u}^{(2)}(t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$, затем $\mathbf{x}_\infty^{(2)}(t)$, $\mathbf{u}^{(3)}(t)$, $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ и т.д. Таким образом, по завершении $(k-1)$ -го шага будет получена пара $\mathbf{u}^{(k-1)}(t)$, $\mathbf{x}^{(k-1)}(t)$, где $\mathbf{x}^{(k-1)}(t_0) = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}^{(k-1)}(t_f) = \mathbf{x}_f$.

Соответственно, на k -м шаге решаются следующие задачи:

во-первых, находится решение $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)$, для которого $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_0) = \mathbf{x}_0$, но в общем случае может быть $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f) \neq \mathbf{x}_f$;

во-вторых, для $\tilde{\mathbf{F}}_{k-1}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t))$ решается опорная задача управления, решение которой и доставляет k -е приближение к решению задачи оптимального управления для (1), (2).

Решение первой задачи на k -м шаге представляется решением начальной задачи:

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}}{dt} = A\mathbf{x}_\infty^{(k-1)} + B\mathbf{u}^{(k-1)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}), \quad \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (10)$$

для которого в общем случае (но для заданной точности) будет получено $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f) \neq \mathbf{x}_f$.

Если это так, то далее решается опорная задача управления для (1) – (3) с заданной следующим образом нелинейностью: $\tilde{\mathbf{F}}_{k-1}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t))$, а именно:

$$\frac{d\mathbf{x}^{(k)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(k)}(t) + \tilde{\mathbf{F}}_{k-1}(t); \quad \mathbf{x}^{(k)}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (11)$$

где $\mathbf{u}^{(k)}(t)$ – оптимальное управление для задачи (2), (3), (11).

Вычитая уравнение (11) из уравнения (10), получим

$$\frac{d\delta\mathbf{x}^{(k)}}{dt} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{B}\delta\mathbf{u}^{(k)}(t), \quad (12)$$

где $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{x}^{(k)}(t) - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)$, $\delta\mathbf{u}^{(k)}(t) = \mathbf{u}^{(k)}(t) - \mathbf{u}^{(k-1)}(t)$ – корректирующее управление на k -м шаге, которое по построению будет обеспечивать (с точностью до малых порядка выше первого) выполнение условия $\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f)$. Так как общее решение уравнения (12) имеет вид

$$\delta\mathbf{x}^{(k)}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B} \delta\mathbf{u}^{(k)}(\tau) d\tau, \quad (13)$$

то при $t = t_f$ отсюда следует

$$\delta\mathbf{x}^{(k)}(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \mathbf{B} \delta\mathbf{u}^{(k)}(\tau) d\tau = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f). \quad (14)$$

Если в (14) $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f) \neq \mathbf{x}_f$, то решением задачи (11) k -й шаг завершается, а полученная при этом пара $\mathbf{u}^{(k)}(t)$, $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ есть k -е приближение к решению задачи оптимального управления (1) - (3). Если же при решении задачи (10) получено $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f) = \mathbf{x}_f$ (с заданной и достаточно высокой точностью), то в этом случае решение задачи (11) не требуется. Тем не менее, следует учитывать, что уравнение (14) при $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t_f) = \mathbf{x}_f$ с учётом полной управляемости пары матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} из (1) допускает существование тождественно ненулевых решений в виде нуль-финитных управлений [7], для которых имеет место:

$$\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t, \tau) \mathbf{B} \delta\mathbf{v}^{(k)}(\tau) d\tau = 0. \quad (15)$$

Отыскание тождественно ненулевого решения уравнения (15) в виде управления $\delta \mathbf{v}^{(k)}$ сводится к решению изопериметрической (с учётом ограничения (15)) задачи, в которой для заданного $\mathbf{u}^{(k-1)}(t)$ требуется минимизировать функционал $J(\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{v}^{(k)})$ по $\delta \mathbf{v}^{(k)}$. Если при этом будет получено $\delta \mathbf{v}^{(k)}(t) \neq 0$ и $J(\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{v}^{(k)}) < J(\mathbf{u}^{(k-1)})$, то k -й шаг тем самым завершается и здесь будет получено $\mathbf{u}^{(k)}(t) = \mathbf{u}^{(k-1)}(t) + \delta \mathbf{v}^{(k)}(t)$, для которого $\mathbf{x}^{(k)}(t)$ получается из решения начальной задачи:

$$\frac{d\mathbf{x}^{(k)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(k)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}^{(k)}), \quad \mathbf{x}^{(k)}(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Если же $\delta \mathbf{v}^{(k)}(t) \equiv 0$, то программа управления $\mathbf{u}^{(k-1)}(t)$ есть искомое приближение к оптимальному управлению для задачи (1) - (3).

В общем случае, то есть при $k \rightarrow \infty$, имеет место: $\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t) \rightarrow \mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t)$;

$\mathbf{u}^{(\infty)}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(k)}(t)$, где $\mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t)$ – решение задачи Коши:

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty^{(\infty)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_\infty^{(\infty)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(\infty)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(\infty)}), \quad \mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

для которого выполняется условие $\mathbf{x}_\infty^{(\infty)}(t_f) = \mathbf{x}_f$, а $\mathbf{u}^{(\infty)}(t)$ – искомое оптимальное управление для рассматриваемой задачи (1) - (3) и $J(\mathbf{u}^{(\infty)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}^{(k)})$ есть её значение.

4. Об условиях сходимости метода. Для рассмотренного модифицированного метода последовательных приближений Пикара условия сходимости непосредственно связаны с условиями сходимости последовательностей $\delta \mathbf{x}^{(k)}(t_f) \rightarrow 0$ и $\Delta \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f) \rightarrow 0$, где $\delta \mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{x}^{(k)}(t) - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)$ и $\Delta \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t) = \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t) - \mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)$.

Итак, пусть $\mathbf{x}_\infty^{(k)}(t)$ – решение задачи (10) на $(k+1)$ -м шаге:

$$\frac{d\mathbf{x}_\infty^{(k)}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_\infty^{(k)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(k)}(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_\infty^{(k)}), \quad \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (16)$$

Вычитая уравнение (16) из (10), с точностью до малых первого порядка получим

$$\frac{d\Delta \mathbf{x}_\infty^{(k)}}{dt} = \hat{\mathbf{A}}_k(t)\Delta \mathbf{x}_\infty^{(k)} + \mathbf{B}\delta \mathbf{u}^{(k)}(t), \quad \Delta \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_0) = 0. \quad (17)$$

где $\hat{\mathbf{A}}_k(t) = \mathbf{A} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_\infty^{(k-1)}(t)}$, вариация $\delta \mathbf{u}^{(k)}(t)$ – корректирующее управление из (12).

Переходную матрицу для (17) можно представить в виде $\hat{\Phi}_k(t, \tau) = \Phi(t, \tau) + \Delta\Phi_k(t, \tau)$. Решая далее уравнение (17) с нулевым начальным условием, получим

$$\Delta x_\infty^{(k)}(t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \hat{\Phi}_k(t_f, \tau) B \delta u^{(k)}(\tau) d\tau \quad (18)$$

Следует отметить, что $\delta x^{(k+1)}(t_f) = \delta x^{(k)}(t_f) - \Delta x_\infty^{(k)}(t_f)$ (рис. 1). Поэтому, вычитая (18) из (14), с точностью до малых первого порядка тогда получим:

$$\delta x^{(k+1)}(t_f) = - \int_{t_0}^{t_f} \Delta\Phi_k(t_f, \tau) B \delta u^{(k)}(\tau) d\tau \quad (19)$$

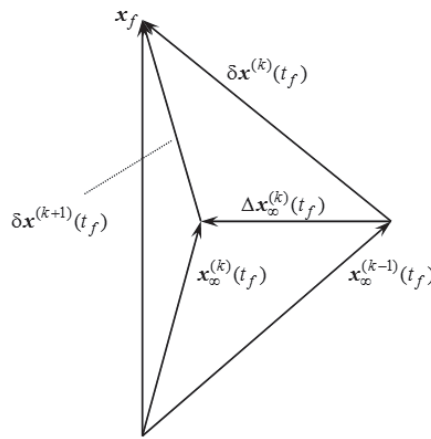


Рисунок 1

Кроме того, учитывая предполагаемую зависимость вариации $\delta u^{(k)}(t)$ от конечного условия $\delta x^{(k)}(t_f)$, представим $\delta u^{(k)}(t)$ в виде поточечной аппроксимации на $[t_0, t_f]$:

$$\delta u^{(k)}(t) = M_k(t) \delta x^{(k)}(t_f), \quad (20)$$

где $M_k(t)$ – матрица соответствующих размеров. Подставив (20) в (19), получим

$$\delta x^{(k+1)}(t_f) = -V_k \delta x^{(k)}(t_f), \quad (21)$$

где

$$V_k = \int_{t_0}^{t_f} \Delta\Phi_k(t_f, \tau) B M_k(\tau) d\tau \quad (22)$$

Очевидно, что из (21) следует

$$\|\delta x^{(k+1)}(t_f)\| \leq \rho(V_k) \|\delta x^{(k)}(t_f)\|, \quad (23)$$

где $\rho(\cdot)$ – максимальное сингулярное число матрицы (или её спектральная норма). Стало

быть, для сходимости последовательности $\delta \mathbf{x}^{(k)}(t_f)$, то есть $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}^{(k)}(t_f) \rightarrow 0$, достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\rho(\mathbf{V}_k) < 1 \quad \forall k \geq k_0, \quad 1 \leq k_0 < \infty. \quad (24)$$

Поскольку из (18) с учётом (20), (22) также следует $\Delta \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f) = (\mathbf{V}_k + \mathbf{Q}_k) \delta \mathbf{x}^{(k)}(t_f)$, где

$$\mathbf{Q}_k = \int_{t_0}^{t_f} \Phi_k(t_f, \tau) \mathbf{B} \mathbf{M}_k(\tau) d\tau, \quad \text{поскольку если } \lim_{k \rightarrow \infty} \delta \mathbf{x}^{(k)}(t_f) \rightarrow 0, \quad \text{то } \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{x}_\infty^{(k)}(t_f) \rightarrow 0, \quad \text{а}$$

также $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta \mathbf{u}^{(k)}(t)\| = 0 \quad (\forall t \in [t_0, t_f])$. Необходимые условия сходимости, также как и

достаточные условия (24), тесно связаны со свойствами матриц $\mathbf{M}_k(t)$, \mathbf{V}_k и \mathbf{Q}_k .

Исследование проведено при поддержке РФФИ, проекты № 13-08-97019 р_поволжье_a, № 13-01-97002-р_поволжье_a.

Библиографический список

- 1 Горелов Ю.Н., Данилов С.Б., Юрин В.Е. Синтез оптимального управления переориентацией космического аппарата одним методом последовательных приближений // Управление движением и навигация летательных аппаратов: Сб. тр. XVI Всеросс. научно-техн. семинара по управлению движением и навигации ЛА: Ч.III. Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2013. С.34-40.
- 2 Горелов Ю.Н., Курганская Л.В., Мантуров А.И., Соллогуб А.В., Юрин В.Е. К задаче оптимизации программ управления угловым движением космического аппарата дистанционного зондирования Земли // Гироскопия и навигация. 2014, №1 (84). С.81-97.
- 3 Горелов Ю.Н., Данилов С.Б., Тропкина Е.А. Об одном подходе к приближенному решению задачи оптимального управления переориентацией космического аппарата // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2011, т.18, в.3. С.429-431.
- 4 Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967. 564 с.
- 5 Мороз А.И. Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
- 6 Горелов Ю.Н. Об одном подходе к моделированию оптимального управления многомерными линейными системами // Вестник Самарского госуд. ун-та. 2013, № 9/2 (110). С.184-190.
- 7 Синяков А.Н. Системы управления упругими подвижными объектами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 200 с.