

## **МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПРОЕКТНО-БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕЛЕТОВ С МАЛОЙ ТЯГОЙ НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ**

В настоящее время наиболее распространенной орбитой для размещения спутников связи является геостационарная (ГСО). Традиционные схемы перелетов с использованием химических двигателей имеют малую эффективность и требуют применения ракет-носителей (РН) тяжелого класса. Использование электроракетных двигателей (ЭРД) при довыведении комических аппаратов (КА) позволяет увеличить массу полезной нагрузки. Перелеты с применением ЭРД имеют ряд характерных особенностей, одной из которых является проблема отыскания оптимального закона управления.

Среди множества баллистических схем перелетов КА на геостационарную орбиту с применением ЭРД можно выделить два основных:

- 1) с помощью РН формируется начальная высокоэллиптическая орбита. Функцию довыведения КА выполняет собственная электроракетная двигательная установка (рис. 1);
- 2) формируется низкая круговая орбита с помощью РН, затем с помощью химического разгонного блока (ХРБ) реализуется переходная орбита. В дальнейшем довыведение осуществляется собственным ЭРД КА аналогично с вариантом 1.

Схема выведения с использованием круговой промежуточной орбиты и соответствующий закон управления движением КА с ЭРД хорошо исследованы [1]. Использование промежуточных эллиптических орбит в настоящее время исследовано меньше. Наличие дополнительного баллистического параметра (эксцентриситет орбиты) дает расширенные возможности по оптимизации схемы выведения.

### **Математическая модель управляемого движения КА**

Космические аппараты с электроракетными двигателями могут иметь весьма большую протяженность активных участков, поэтому анализ активного участка полета аппаратов с ЭРД проводится на основе полной математической модели в оскулирующих элементах, где ускорение КА от работающей ЭРДУ рассматривается как возмущающее. Эта система уравнений имеет особенности при  $e=0$  и  $i=0$ , поэтому перед интегрированием будем задавать фиксированные конечные значения эксцентриситета и наклона, отличные от нуля и соответствующие требуемой точности решения задачи.

### Постановка задачи оптимизации

Сформулируем задачу об оптимальном изменении основных элементов орбиты.

В качестве критерия оптимальности примем продолжительность перелета  $T_k$ .

Введем две правые системы координат: орбитальную ( $Onrb$ ) и связанную с КА ( $OXYZ$ ) (рис. 2). Вектор тяги  $\vec{P}$  направлен вдоль оси  $OX$ .

Запишем выражения для компонент реактивного ускорения в орбитальной системе координат:

$$\begin{aligned} T_r &= \delta a \cos \lambda \cos \psi, \\ S_r &= \delta a \sin \lambda \cos \psi, \\ W_r &= \delta a \sin \psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $a$  – модуль полного реактивного ускорения ( $a = a_0 / (1 - a_0 t / c)$ ),  $\delta$  – функция включения-выключения двигателей ( $\delta = \{0, 1\}$ );  $\lambda$  – угол между проекцией вектора тяги на мгновенную плоскость орбиты и трансверсалью  $\vec{T}$  ( $\lambda \in [0^\circ; 180^\circ]$ );  $\psi$  – угол между проекцией вектора тяги на мгновенную плоскость местного горизонта и трансверсалью  $\vec{T}$  ( $\psi \in [-90^\circ; 90^\circ]$ ) (рис. 2). Очевидно, что при постоянной работе двигателя ( $\delta \equiv 1$ ) время перелета равно моторному времени  $T_m$ .

Управлениями в указанной задаче являются углы ориентации вектора тяги  $\lambda, \psi$ .

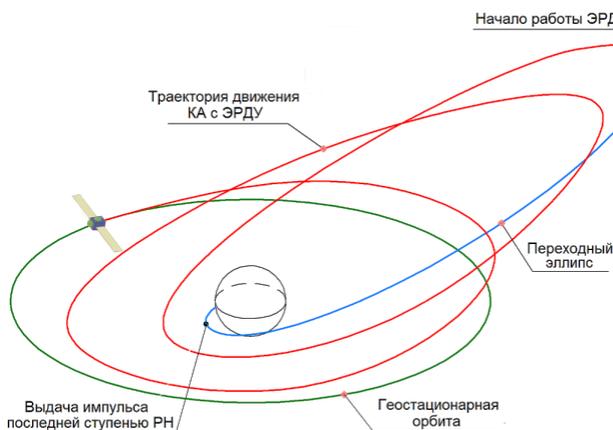


Рис. 1. Схема перелета на ГСО

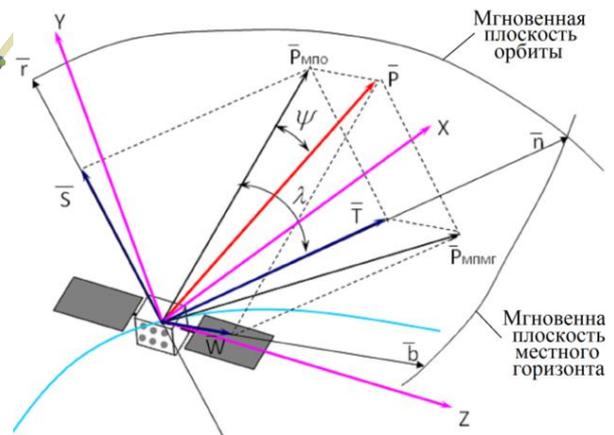


Рис. 2. К определению углов ориентации вектора тяги КА с ЭРДУ

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} t = t_0 & \quad t = t_k \\ A(t_0) = A_0 & \quad A(t_k) = A_k \\ e(t_0) = e_0 & \quad e(t_k) = e_k \\ i(t_0) = i_0 & \quad i(t_k) = i_k \end{aligned} \quad \rightarrow$$

## Приближенный метод

Наиболее точным методом отыскания оптимального закона управления является принцип максимума Понтрягина [2]. Его применение позволяет свести оптимизационную задачу к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Он позволяет найти оптимальное решение, но связан с большими вычислительными трудностями и требует высокой квалификации исследователя. На первый план выходит проблема сходимости и устойчивости алгоритма решения краевой задачи и единственности решения [3].

При расчете проектных характеристик перелетов КА полезными могут оказаться методы решения, не требующие решения краевой задачи и позволяющие дать быстрый ответ на вопрос о длительности перелета и требуемой характеристической скорости. Поэтому к таким методам не предъявляются высокие требования по точности.

В дальнейшем для решения задачи будет применяться приближенный метод на основе теории локальной оптимизации.

В соответствии с принципом взаимности в теории оптимального управления вариационная задача о минимуме продолжительности динамического маневра с фиксированными граничными условиями эквивалентна задаче минимизации обобщенной невязки по отклонениям терминальных значений компонентов вектора состояния при фиксированной продолжительности маневра [4].

Введем терминальный критерий в виде квадратичного функционала  $I$ , представляющий собой сумму квадратов невязок по большой полуоси, эксцентриситету и наклонению орбиты, умноженные на соответствующие им постоянные весовые (неопределенные) коэффициенты.

Локально-оптимальными управлениями будем называть такие управления, которые минимизируют не функционал динамической задачи  $I$  (интегральный), а подынтегральное выражение, то есть производную  $\frac{dI}{dt}$  в каждый момент времени. Если подынтегральное выражение не меняет знака и представляет собой монотонную функцию, то описанная постановка эквивалентна исходной [4].

В общем случае метод не гарантирует абсолютного оптимума в исходной постановке задачи. Однако для задач, содержащих малый параметр (в частности, реактивное ускорение, создаваемое ЭРД), приближенные управления стремятся к оптимальным с уменьшением управляющего воздействия [5]. Полный алгоритм решения вариационных задач на основе теории локальной оптимизации изложен в [6].

Полученный закон управления  $\tilde{\psi}(t)$ ,  $\tilde{\lambda}(t)$  имеет достаточно простую структуру и позволяет провести расчет динамического маневра без процедуры решения краевой задачи.

### **Алгоритм и результаты решения задачи оптимизации перелета между эллиптической и геостационарной орбитами**

Ниже приведены результаты расчета довыведения тяжелого геостационарного спутника связи, оснащенного электроракетной двигательной установкой, с использованием предлагаемого метода. Для примера взяты параметры миссии выведения КА «Arabsat-6a» с помощью РН «Falcon Heavy» на ГСО [7]. Будем рассматривать перелет при помощи ЭРД с переходной высокоэллиптической орбиты, сформированной последней ступенью РН, на геостационарную (таблица 1).

Для определения оптимальных параметров орбиты с точки зрения минимального времени перелета проведем анализ параметров орбиты с перебором высоты апогея со значениями  $H_a = [25000, 35786, 45000, 50000, 55000, 60000, 65000]$  км. Результаты расчета приведены на рис. 4.

Таблица 1 – Исходные данные ( $H_p$  – высота перигея;  $i$  – наклонение орбиты;  $m_0$  – стартовая масса КА;  $P$  – тяга двигателя;  $I_{уд}$  – удельный импульс)

$H_p$ , км	$i$ , град.	$m_0$ , кг	$P$ , мН	$I_{уд}$ , с
320	23	6500	1160	1770

В результате анализа результатов был выявлен минимум, соответствующий высоте апогея 55000 км, длительность перелета при этом составляет 163,24 сут., суммарная масса затраченного рабочего тела равна 942,23 кг. Зависимости элементов орбиты и управляющих переменных от времени для данного случая приведены на рис. 4-8.

В оригинальной миссии КА «Arabsat-6a» для довыведения применялись химические ракетные двигатели. Высота апогея переходной орбиты при этом равна 90000 км, запас топлива составлял 3000 кг, из которых около 2200 кг затрачено на формирование целевой орбиты. Проводя сравнение с полученными результатами, можно отметить снижение затрат рабочего тела на 57% (на 1257 кг), при этом высота апогея орбиты снизилась с 90000 км до 55000 км.

Полученный выигрыш по массе можно использовать для наращивания массы космического аппарата, увеличения срока активного существования за счет увеличения массы рабочего тела для коррекции орбиты либо для снижения требований к средствам

выведения (применение РН меньшей грузоподъемности).

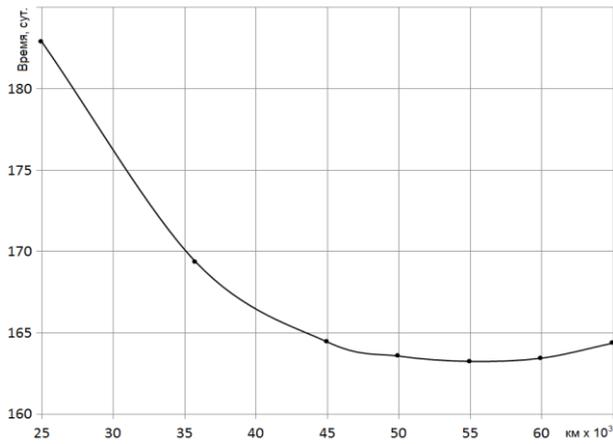


Рис. 3. Результаты анализа оптимального радиуса апогея

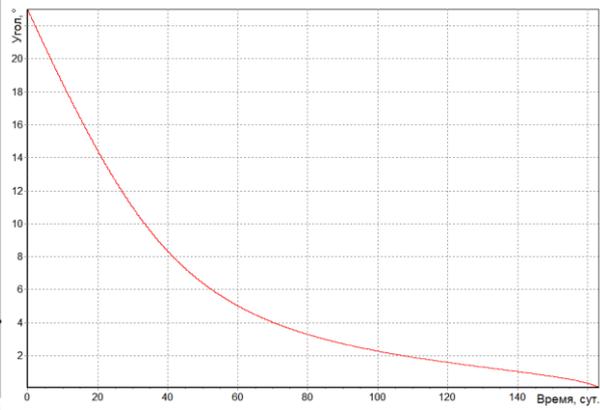


Рис. 4. Зависимость наклонения орбиты от времени

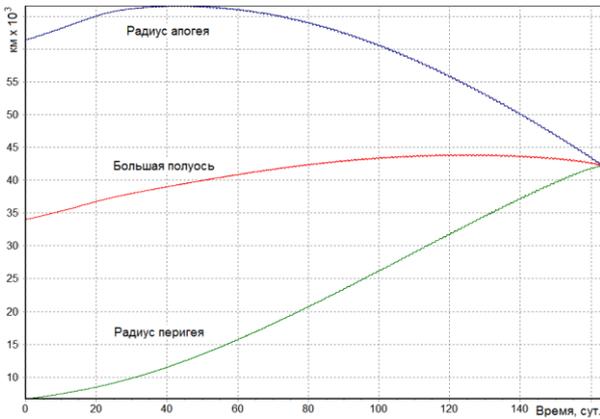


Рис. 5. Зависимость изменения большой полуоси, радиуса апогея и перигея от времени

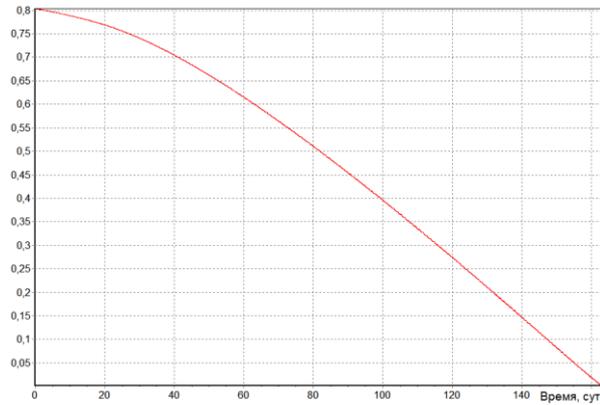


Рис. 6. Зависимость эксцентриситета орбиты от времени

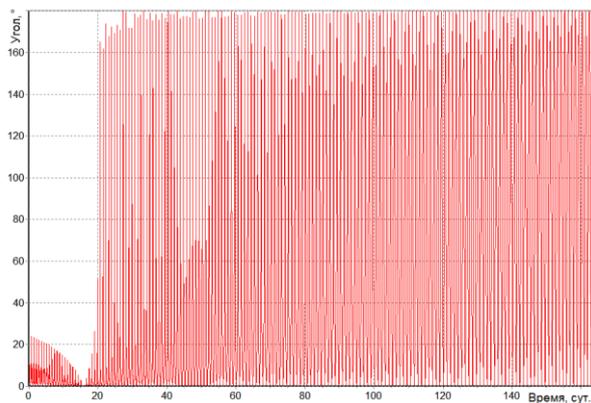


Рис. 7. Зависимость управляющего угла  $\psi$  от времени

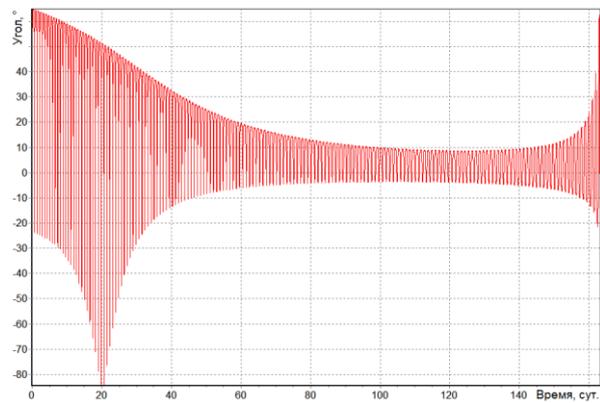


Рис. 8. Зависимость управляющего угла  $\lambda$  от времени



## **Выводы**

Рассмотрены вопросы разработки и моделирования схем перевода космического аппарата с двигателями малой тяги с высокоэллиптической на геостационарную орбиту. Предложен приближенно-оптимальный закон управления вектором тяги. Получены наиболее выгодные значения высоты апогея, рассчитано время перелета и потребный запас рабочего тела ЭРДУ.

Предлагаемый приближенный метод оптимизации удобен для проектно-баллистических расчетов и оценок и позволяет получать быстрые решения. С его помощью можно решать спектр задач с различными исходными данными и для любых типов замкнутых орбит. Полученные с помощью данного метода результаты могут быть использованы в качестве первого приближения для точных методов решения задачи оптимизации.

## **Библиографический список**

1. Лебедев, В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой [Текст] / В.Н. Лебедев. – М.: ВЦ АН СССР, 1968.– 108 с.
2. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, А.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1976.– 392 с.
3. Петухов, В.Г. Оптимальные многовитковые траектории выведения космического аппарата с малой тягой на высокую эллиптическую орбиту [Текст] / В.Г. Петухов // Космические исследования.– 2009.– Том 47.– №3.– С. 271-279.
4. Моисеев, Н.Н. Элементы теории оптимальных систем [Текст] / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1975.– 528с.
5. Иванов, Н.М. Баллистика и навигация космических аппаратов [Текст] / Н.М. Иванов, Л.Н. Лысенко. – М.: Дрофа, 2004.– 544 с.
6. Петрухина, К.В. Оптимизация баллистических схем перелётов между некомпланарными орбитами с помощью комбинации двигателей большой и малой тяги [Текст] / К.В. Петрухина, В.В. Салмин // Вестник Самарского научного центра РАН. – 2010.– Вып. 4.– С. 186-201.
7. NASA Spaceflight.com. SpaceX Falcon Heavy launches Arabsat-6A <https://www.nasaspaceflight.com/2019/04/spacex-falcon-heavy-second-launch-arabsat-6a>