УДК 629.78 : 681.51

Сомов Е.И.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ ОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Введение

Проблемы динамического синтеза и нелинейного анализа систем управления ориентацией космических аппаратов (КА) [1] –[3] остаются актуальными и требуют дальнейшего исследования как в теоретическом, так и в прикладном аспектах. В данной статье пристальное внимание намеренно уделяется существенной нелинейности кинематических соотношений при гиросиловом управлении пространственным угловым движением КА в виде твёрдого тела. В отличие от общеизвестных тригонометрических функций углов Эйлера-Крылова, здесь применяются алгебраические функции от компонентов нормированного кватерниона, вектора параметров Эйлера (Родрига-Гамильтона) и вектора модифицированных параметров Родрига.

1. Математические модели и постановка задачи

Ориентация связанной с корпусом КА системы координат (ССК) (базиса $\mathbf{B}$) в инерциальном базисе $\mathbf{I}_{\oplus}$ определяется кватернионом $\mathbf{\Lambda}=(\lambda_0,\boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda}=\{\lambda_i\}$, вектором параметров Эйлера $\mathbf{\Lambda}=\{\lambda_0,\boldsymbol{\lambda}\}$, который при обозначениях $C_\alpha=\cos\alpha$, $S_\alpha=\sin\alpha$ представляется в форме $\mathbf{\Lambda}=\{C_{\Phi/2},\mathbf{e}^{\mathrm{e}}S_{\Phi/2}\}$ с ортом $\mathbf{e}^{\mathrm{e}}$ оси Эйлера и углом Φ собственного поворота, и самым современным вектором модифицированных параметров Родрига (МПР) $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_i\}=\mathbf{e}^{\mathrm{e}}\,\mathrm{tg}(\Phi/4)$, который взаимно-однозначно связан с кватернионом $\mathbf{\Lambda}$ явными прямыми $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\lambda}/(1+\lambda_0)$ и обратными $\lambda_0=(1-\sigma^2)/(1+\sigma^2)$, $\boldsymbol{\lambda}=2\boldsymbol{\sigma}/(1+\sigma^2)$ соотношениями. При тензоре инерции КА $\mathbf{J}$, векторе $\mathbf{H}$ кинетического момента (КМ) силового гироскопического кластера (СГК) и отсутствии внешних возмущений угловое движение КА описывается уравнениями кинематики и динамики

$$\dot{\mathbf{\Lambda}}=\mathbf{\Lambda}\circ\boldsymbol{\omega}/2\,; \qquad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}=-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{G}+\mathbf{M}^{\mathrm{g}}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{G}=\mathbf{K}+\mathbf{H}$, $\mathbf{K}=\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ – вектор КМ КА; $\boldsymbol{\omega}=\{\omega_i\}$ – вектор угловой скорости КА в базисе $\mathbf{B}$ и вектор $\mathbf{M}^{\mathrm{g}}=-\dot{\mathbf{H}}$ является управляющим моментом СГК. Кватернионному уравнению в (1) соответствует кинематическое уравнение для вектора МПР

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tfrac{1}{4}(1-\sigma^2)\boldsymbol{\omega} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\omega} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega})\,. \qquad (2)$$

Пусть система управления ориентацией КА сбалансирована по вектору суммарного КМ $\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{H}$, что соответствует тождеству $\mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$, а для формирования управления применяются измерения кватерниона $\Lambda(t)$, которые используются для вычисления вектора МПР $\boldsymbol{\sigma}(t)$, и вектора угловой скорости $\omega(t)$.

При векторе управляющего углового ускорения $\mathbf{u} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{M}^{\mathrm{g}}$, который формируется СГК, модель (1), (2) представляется в нормированной векторной форме

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \tfrac{1}{4}(1-\sigma^2)\boldsymbol{\omega} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\omega} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega})\,; \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{u} \qquad (3)$$

с заданными начальными условиями $\boldsymbol{\sigma}(t_0) = \boldsymbol{\sigma}_{\text{o}}$, $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}_{\text{o}}$ при $t_0 = 0$, где вектор $\boldsymbol{\sigma}_{\text{o}} \equiv \mathbf{e}_{\text{o}}^{\text{e}}\,\mathrm{tg}(\Phi_{\text{o}}/4)$ является произвольным с условием $|\,\Phi_{\text{o}}\,| < 2\pi$, а вектор $\boldsymbol{\omega}_{\text{o}}$ ограничен по норме $\|\,\boldsymbol{\omega}_{\text{o}}\,\| \le \omega_*$ заданной постоянной ω_*.

Задача состоит в синтезе векторного нелинейного закона управления

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega}) \qquad (4)$$

с ограниченными компонентами при обеспечении асимптотической устойчивости нулевого решения замкнутой нелинейной системы (3), (4)

$$\lim_{t\to\infty}\|\,\boldsymbol{\sigma}(t)\,\| = 0\,, \quad \lim_{t\to\infty}\|\,\boldsymbol{\omega}(t)\,\| = 0 \qquad (5)$$

и в получении оценок её динамических свойств.

2. Синтез нелинейного закона управления

Как известно, кватернион $-\boldsymbol{\Lambda} = -(C_{\Phi/2}, \mathbf{e}^{\text{e}} S_{\Phi/2}) = (\cos(\pi-\Phi/2), -\mathbf{e}^{\text{e}}\sin(\pi-\Phi/2))$ задаёт вращение КА на угол $2\pi - \Phi$ вокруг орта Эйлера $-\mathbf{e}^{\text{e}}$, которое совпадает с вращением этого объекта на угол Φ вокруг орта Эйлера $\mathbf{e}^{\text{e}}$. Поэтому для $\Phi_{\text{o}} = \pi$, когда $C_{\Phi_{\text{o}}/2} = 0$ и $S_{\Phi_{\text{o}}/2} = 1$, возникает проблема двузначности кватерниона $\boldsymbol{\Lambda}_{\text{o}}$ и требуется конкретизировать его значение вместе с направлением орта Эйлера [4]. Для вектора МПР $\boldsymbol{\sigma}_{\text{o}} \equiv \mathbf{e}_{\text{o}}^{\text{e}}\,\mathrm{tg}(\Phi_{\text{o}}/4)$ эта проблема не проявляется, т.к. здесь $\mathrm{tg}(\Phi_{\text{o}}/4) = \mathrm{tg}(\pi/4) = 1$.

При использовании диадного произведения $[\mathbf{ab}]$ трёхмерных векторов $\mathbf{a} = \{a_i\}$ и $\mathbf{b} = \{b_j\}$, которое представляется матрицей $[\mathbf{ab}] \equiv \mathbf{ab}^{\text{t}} = \mathbf{C} = \|\,c_{ij}\,\| = \|\,a_i b_j\,\|$, векторное уравнение (2) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\tfrac{1}{4}(1-\sigma^2)\mathbf{I}_3 + \tfrac{1}{2}([\boldsymbol{\sigma}\times] + [\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}])\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega} \qquad (6)$$

с обратным векторно-матричным соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = (4/(1+\sigma^2)^2)(\mathbf{I}_3(1-\sigma^2) - 2([\boldsymbol{\sigma}\times] - [\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}]))\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \mathbf{D}_{\omega}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{7}$$

Вторая производная $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}$ вектора МПР получается дифференцированием (2), что приводит к соотношению $\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}(-(\boldsymbol{\sigma},\dot{\boldsymbol{\sigma}})\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(1-\sigma^2)\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\sigma}(\dot{\boldsymbol{\sigma}},\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}))$. В итоге модель (3) сводится к нелинейной управляемой системе в форме Бруновского

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v} \equiv \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma},\dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{u}, \tag{8}$$

где нелинейная векторная функция

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma},\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \equiv \tfrac{1}{2}([\dot{\boldsymbol{\sigma}}\times] + [\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\sigma}}])\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}([\dot{\boldsymbol{\sigma}}\times] + [\boldsymbol{\sigma}\dot{\boldsymbol{\sigma}}])\mathbf{D}_{\omega}(\boldsymbol{\sigma})\dot{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{9}$$

В соответствии с методом линеаризующей обратной связи сначала выполняется синтез закона $\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma},\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ вспомогательного управления $\mathbf{v}$ для линейной системы $\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v}$. При модальном синтезе на одном спектре $S_o = \{-\alpha \pm j\beta\}$ по всем трём каналам ориентации КА получается линейный стационарный закон формирования вспомогательного управления $\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma},\dot{\boldsymbol{\sigma}}) = -(k_0\boldsymbol{\sigma} + k_1\dot{\boldsymbol{\sigma}})$, а нелинейный закон управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega})$ предварительно определяется в аналитическом виде

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega})) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega})). \tag{10}$$

Для векторов $\mathbf{x} = \{x_i\}, \mathbf{y} = \{y_i\}$ и параметра $a^m > 0$ введём функцию $\mathbf{y} = \mathbf{SC}(\mathbf{x}, a^m)$ с алгоритмическим определением $q = \max_i |x_i|$; *if* $q \ge a^m$ *then* $y_i = a^m x_i / q$. Эта функция ограничивает все компонеты вектора $\mathbf{x}$ по модулю параметром a^m, но сохраняет пропорциональность между ними. Принимаемый в итоге нелинейный закон управления

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{SC}(\mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\sigma})(\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega})) - \mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\omega})), a^m) \tag{11}$$

учитывает ограниченность компонентов вектора управляющего ускорения.

3. Оценки динамических свойств с помощью векторной функции Ляпунова

Построение векторной функции Ляпунова (ВФЛ) выполняется одновременно с синтезом линейной системы $\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v}$ по явным аналитическим соотношениям [5]. В рассматриваемой задаче размерность ВФЛ $\mathbf{V} = \{V_i\}$, $i = 1 \div 3$ равна трём, что соответствует числу каналов пространственной ориентации. Для каждого канала при векторе состояния $\mathbf{x}^i = \{x_1^i, x_2^i\}$ с компонентами $x_1^i = \sigma_i$, $x_2^i = \dot{\sigma}_i$ и вспомогательном скалярном управлении $v_i = -(k_0 x_1^i + k_1 x_2^i)$ с применением матрицы Вандермонда на спектре S_o выполняется линейное преобразование координат с приведением модели замкнутого канала к вещественной форме Жордана с вектором $\tilde{\mathbf{x}}^i = \{\tilde{x}_1^i, \tilde{x}_2^i\}$ канонических переменных. Функция Ляпунова V_i для i-го линейного замкнутого канала ориентации принимается в виде модуля вектора $\tilde{\mathbf{x}}^i$ канонических переменных, т.е. $\mathrm{V}_i = ((\tilde{x}_1^i)^2 + (\tilde{x}_2^i)^2)^{1/2}$. В результате при векторе состояния $\mathbf{x}^i$ функция Ляпунова V_i представляется квадратным корнем из квадратичной формы переменных $x_1^i = \sigma_i$ и $x_2^i = \dot{\sigma}_i = \omega_i / 4$, а ВФЛ $\mathbf{V} = \{\mathrm{V}_i\}$ удовлетворяет векторному уравнению $\dot{\mathbf{V}} = -\alpha\, \mathbf{V}$ с решением $\mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{V}_{\mathrm{o}} \exp(-\alpha\, t)$.

Для вектора состояния $\mathbf{x} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}\}$ нелинейной модели (3) введём совокупность непрерывных неотрицательных функционалов – векторные нормы $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})$ и $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{o}}(\mathbf{x}_{\mathrm{o}})$, которые связаны с ВФЛ $\mathbf{V}$ и её начальным значением $\mathbf{V}_{\mathrm{o}}$ векторными неравенствами

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \le \mathbf{R}(\mathbf{V}(\mathbf{x})),\ \mathbf{V}(\mathbf{x}) \le \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}));\quad \boldsymbol{\rho}_{\mathrm{o}}(\mathbf{x}_{\mathrm{o}}) \le \mathbf{R}_{\mathrm{o}}(\mathbf{V}_{\mathrm{o}}),\quad \mathbf{V}_{\mathrm{o}} \le \mathbf{Q}_{\mathrm{o}}(\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{o}}(\mathbf{x}_{\mathrm{o}})) \tag{12}$$

с выпуклыми векторными функциями $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}_{\mathrm{o}}$, $\mathbf{Q}_{\mathrm{o}}$. Отметим, что такая математическая конструкция позволяет охватить многие определения устойчивости и других динамических свойств (устойчивости относительно части переменных, устойчивости множества по отношению к другому множеству, устойчивости по двум мерам и т.д.). В частности, нетрудно установить, что оценки вектора состояния через компоненты ВФЛ в сугубо частном случае совпадают с известными оценками А.Д. Горбунова для модулей переменных, стеснённых определённо-положительной квадратичной формой, или, что эквивалентно, квадратным корнем из квадратичной формы.

Применение ВФЛ $\mathbf{V} = \{\mathrm{V}_i\}$, построенной для линейной модели $\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v}$, к замкнутой нелинейной системе (3), (11) с использованием мажорирования на основе (12) приводит к векторному дифференциальному неравенству $\dot{\mathbf{V}} \le -\alpha\, \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{V})$ с нелинейной функцией $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{V})$ полиномиального типа. Из соответствующей этому дифференциальному неравенству системы сравнения с ВФЛ очевидным образом следует асимптотическая устойчивость (5) нулевого решения замкнутой нелинейной системы, но при оценке области притяжения этого решения с учётом ограничений на норму $\|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{o}}\| \le \omega_*$ и компоненты вектора управляющего ускорения требуются компьютерные вычисления [6,7].

Заключение

Представлен метод синтеза нелинейного закона управления ориентацией космического аппарата при его произвольном начальном угловом положении с обеспечением асимптотической устойчивости равновесного состояния, основанный на использовании приёма линеаризации обратной связью. Приведена методика нелинейного анализа и оценивания динамических свойств нелинейной мкнутой системы управления ориентацией с применением векторных функций Ляпунова.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 17-48-630637 и 17-08-01708.

Библиографический список

1. Матросов В.М. Нелинейные методы динамического синтеза отказоустойчивых систем управления ориентацией космических аппаратов [Текст] / В.М. Матросов, М.Ф. Решетнев, В.А. Раевский, Е.И. Сомов // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 6. С. 120-130.

2. Somov Ye.I., Butyrin S.A., Matrosov V.M. et al. Ultra-precision attitude control of a large low-orbital space telescope // Control Engineering Practice. 1999. Vol. 7, no. 7. P. 1127-1142.

3. Matrosov V.M., Somov Ye.I. Nonlinear problems of spacecraft fault tolerant control systems // Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, vol. 12: Advanced in Dynamics and Control. A CRC Press Company / Taylor & Francis, Boca Raton – London – New York – Washington. 2003. P. 309-331.

4. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела [Текст] / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. М.: Наука. 1973. 320 с.

5. Сомов Е.И. Построение векторных функций Ляпунова при синтезе линейных управляемых систем с неполным измерением состояния [Текст] / Е.И. Сомов // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 73-86.

6. Кунцевич В.М.. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова [Текст] / В.М. Кунцевич, М.М. Лычак. М.: Наука.1977. 400 с.

7. Сомов Е.И. К синтезу нелинейных управляемых систем с применением векторных функций Ляпунова [Текст] / Е.И. Сомов // Дифференциальные уравнения и численные методы. Новосибирск: Наука. 1986. С.72-89.