

Клюев Н.И., Благих Д.В.

## ПЛЕНОЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Задачи о течении пленки жидкости довольно часто встречаются в технических приложениях. В работе [1] представлены результаты исследования пленок для газожидкостного двухфазного потока в коротких горизонтальных трубах. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными. В работе [2] приведены динамические характеристики течения пленки при воздействии встречного потока воздуха. Расчетные данные подтверждаются экспериментом.

В работе [3] рассматривается трехмерная динамическая модель течения пленки на цилиндрической поверхности. На пленку действует сила тяжести и поверхностное натяжение, а также сила сопротивления от встречного потока газа. В работе [4] представлено решение сопряженной задачи для потока воздуха над плоской пластиной, имеющей тонкую пленку жидкости на поверхности. Пленка образуется путем выдавливания жидкости из пористой стенки. В работе [5] пленка формируется из внешней среды (например, капли дождя). Влияние капель дождя на пограничный слой игнорируется, и математическая модель получена для нулевого приближения.

Целью данного исследования является разработка математической модели течения жидкой пленки на плоской поверхности при воздействии силы тяжести и внешнего потока воздуха для последующего моделирования волнового течения пленки переменной толщины.

Рассмотрим течение жидкой пленки на плоской пластине под действием силы тяжести и межфазного трения. Плоская пластина располагается под углом к горизонту. Жидкость равномерно поступает в пленку через пористую поверхность пластины (рис. 1).

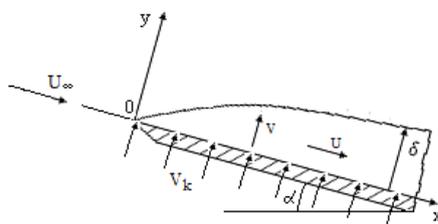


Рис. 1. Схема течения пленки:  $u, v$  – компоненты вектора скорости,  $v_k$  – скорость вдува массы,  $U_\infty$  – скорость набегающего потока,  $\alpha$  – угол наклона пластины к горизонту

Рассмотрим установившееся течение жидкости в пленке переменной толщины под действием силы тяжести и трения от набегающего потока воздуха. Математическая

постановка задачи течения в тонкой плёнке жидкости имеет вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Граничные условия задачи

$$y = 0, \quad u = 0, v = v_k, \quad y = \delta, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau,$$

где  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\nu, \mu$  – кинематическая и динамическая вязкость,  $g$  – ускорение свободного падения,  $\tau$  – напряжение трения на границе раздела жидкая пленка – набегающий воздушный поток,  $\delta$  – толщина пленки.

Дополним уравнения движения кинематическим условием на поверхности пленки

$$y = \delta, \quad v(\delta) = \frac{d\delta}{dx} u(\delta).$$

Объединяя уравнение движения и уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (1)$$

Поскольку толщина пленки достаточно мала, то силы вязкости будут играть определяющую роль в формировании течения. В этом случае можно принять для продольной скорости квадратичный закон распределения в поперечном сечении пленки и воспользоваться выражением для скорости пленки постоянной толщины, стекающей по плоской вертикальной стенке

$$u(x, y) = 3 \langle u \rangle \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] + \frac{\tau}{2\mu} \left( \frac{3y^2}{2\delta} - y \right). \quad (2)$$

Здесь  $\langle u \rangle$  значение скорости  $u$  на поверхности плёнки.

Используя формулу Лейбница

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial t} dy = \frac{d}{dt} \int_0^\delta u dy - u(\delta) \frac{\partial \delta}{\partial t},$$

уравнению движения (1) придадим вид (угловые скобки у средней скорости в дальнейшем опускаем)

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \delta \frac{du}{dx} \left( 12u + \frac{1}{4\mu} \tau \delta \right) - \left( \frac{21}{20} u^2 + \frac{13}{20\mu} \tau \delta u + \frac{3}{80\mu^2} \tau^2 \delta^2 \right) \frac{d\delta}{dx} + \frac{1}{20\mu} \delta^2 \frac{\partial \tau}{\partial x} \left( u + \frac{1}{3\mu} \tau \delta \right) + \\ + u(\delta) v(\delta) = g \delta \sin \alpha + \frac{3\tau}{2\rho} - \frac{3\nu u}{\delta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности по  $y$  от 0 до  $\delta$

$$v(\delta) = v_k - \frac{du}{dx} \delta + \frac{u}{2} \frac{d\delta}{dx} + \frac{\tau\delta}{4\mu} \frac{d\delta}{dx},$$

подставив результат в уравнение (3) и учитывая (2), будем иметь

$$\begin{aligned} \delta \frac{du}{dx} \left( \frac{9}{10} u - \frac{3}{10\mu} \tau \delta \right) - \left( \frac{3}{10} u^2 - \frac{1}{40\mu^2} \tau^2 \delta^2 + \frac{3}{20\mu} \tau \delta u \right) \frac{d\delta}{dx} + \left( \frac{3u}{2} + \frac{\delta\tau}{4\mu} \right) v_k + \\ + \frac{1}{20\mu} \delta^2 \frac{d\tau}{dx} \left( u + \frac{1}{3\mu} \tau \delta \right) = \delta g \sin \alpha + \frac{3}{2\rho} \tau - 3v \frac{u}{\delta}. \end{aligned} \quad (4)$$

После интегрирования уравнения неразрывности поперек плёнки получим

$$v_k = u \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{du}{dx}. \quad (5)$$

Введём безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta^*}, \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta^*}, \bar{u} = \frac{u}{u^*}, \bar{v} = \frac{v}{v_k}, \text{Re} = \frac{u^* \delta^*}{\nu}, \bar{\tau} = \frac{\tau \delta^*}{\mu u^*}. \quad (6)$$

где  $L$  длина пластины,  $\delta^*$  и  $u^*$  – соответственно масштабы для толщины пленки и продольной скорости, которые подлежат определению.

При течении пленки сила тяжести уравновешивается вязким трением, тогда

$$g = \frac{\nu u^*}{\delta^{*2}}.$$

Отсюда получаем масштабы величин

$$\delta^* = \sqrt[3]{\frac{\nu_k L \nu}{g}}, \quad u^* = \sqrt[3]{\frac{\nu_k^2 L^2 g}{\nu}}.$$

Подставим безразмерные переменные (6) в уравнения (4) и (5) и получим (черта над безразмерными переменными в дальнейшем опущена)

$$\begin{aligned} \varepsilon \delta \frac{du}{dx} \left( \frac{9}{10} u - \frac{3\text{Re}}{10} \tau \delta \right) - \varepsilon \left( \frac{3}{10} u^2 - \frac{\text{Re}^2}{40} \tau^2 \delta^2 + \frac{3\text{Re}}{20} \tau \delta u \right) \frac{d\delta}{dx} + \varepsilon \left( \frac{3u}{2} + \frac{\text{Re} \delta \tau}{4} \right) = \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left( \delta \sin \alpha - \frac{3u}{\delta} \right) + \frac{3\tau}{2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$1 = u \frac{d\delta}{dx} + \delta \frac{du}{dx}, \quad x=0, \quad u=0, \quad \delta=0, \quad \varepsilon = \frac{\delta^*}{L} \ll 1. \quad (8)$$

Воспользуемся наличием в уравнении (7) малого параметра и представим решение задачи в виде ряда

$$u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots, \quad \delta(x) = \delta_0(x) + \varepsilon \delta_1(x) + \dots \quad (9)$$

Подставим разложение (9) в уравнения (7) и (8) и перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В результате получаем задачу для нулевого приближения

$$\frac{1}{\text{Re}} \left( \delta_0 \sin \alpha - \frac{3u_0}{\delta_0} \right) + \frac{3\tau}{2} = 0, \quad 1 = u_0 \frac{d\delta_0}{dx} + \delta_0 \frac{du_0}{dx}, \quad x=0, \quad u_0=0, \quad \delta_0=0.$$

Её решение в неявном виде представляется как

$$x = \frac{\delta_0^3}{3} \sin \alpha + \frac{\delta_0^2}{2} \tau \text{Re}, \quad u_0 = \frac{1}{3} \left( \delta_0^2 \sin \alpha + \frac{3\delta_0}{2} \tau \text{Re} \right).$$

Уравнения для первого приближения имеют вид

$$f(x) = \left( \frac{2 \sin \alpha}{\text{Re}} \delta_0 + \frac{3\tau}{2} \right) \delta_1 - \frac{3}{\text{Re}} u_1, \quad (10)$$

$$0 = u_0 \frac{d\delta_1}{dx} + u_1 \frac{d\delta_0}{dx} + \delta_0 \frac{du_1}{dx} + \delta_1 \frac{du_0}{dx}, \quad (11)$$

где

$$f(x) = \delta_0^2 \frac{du_0}{dx} \left( \frac{9}{10} u_0 - \frac{3\text{Re}}{10} \tau \delta_0 \right) - \left( \frac{3}{10} u_0^2 - \frac{\text{Re}^2 \tau^2}{40} \delta_0^2 + \frac{3\text{Re} \tau}{20} \delta_0 u_0 \right) \frac{d\delta_0}{dx} + \left( \frac{3u_0}{2} + \frac{\text{Re} \tau \delta_0}{4} \right) \delta_0 - \frac{1}{\text{Re}} (\delta_0^2 \sin \alpha - 3u_0) - \frac{3\tau}{2} \delta_0. \quad (12)$$

Для численного решения системы (10)-(12) представим ее в стандартном виде

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{1}{f_1(x)} \left[ f'(x) - f_1'(x) \delta_1 + \frac{3}{\text{Re}} \frac{du_1}{dx} \right],$$

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{f_1(x)}{3u_0 + f_1(x) \delta_0} \left[ \left( f'(x) - f_1'(x) \right) \frac{u_0}{f_1(x)} - u_1 \frac{d\delta_0}{dx} - \delta_1 \frac{du_0}{dx} \right],$$

где

$$f_1(x) = \frac{2 \sin \alpha}{\text{Re}} \delta_0 + \frac{3\tau}{2}.$$

Нахождение решения поставленной задачи требует задания трение на поверхности пленки. Будем пренебрегать толщиной пленки и рассмотрим задачу Блазиуса по обтеканию пластины набегающим потоком воздуха. Входные данные задачи: плоская горизонтальная пластина длиной  $L=1$  м обдувается потоком воздуха со скоростью  $U_\infty=14$  м/с при температуре  $t=20^\circ\text{C}$ . Число Рейнольдса набегающего потока воздуха  $\text{Re}_1 = U_\infty L / \nu_1 = 9,3 \cdot 10^5$ , где  $\nu_1$  – кинематическая вязкость воздуха. Решение задачи Блазиуса аппроксимируем формулой  $\tau = 0,07x^{-0,6}$  (черта над безразмерным трением в дальнейшем опущена).

Результаты решения представлены в размерном виде на рис. 2, 3 для  $\alpha = \pi/2$  и  $\text{Re} = 10$ , где  $\text{Re} = u\delta/\nu$ .

Как и следовало ожидать, спутный поток воздуха увеличивает среднюю продольную скорость и уменьшает толщину пленки. На рис. 4, 5 показано изменение средней продольной скорости и толщины пленки при  $\tau = 0$  и  $\text{Re}=10$  для разных углов

наклона пластины:  $1 - \alpha = \pi/18$ ,  $2 - \alpha = \pi/3$ .

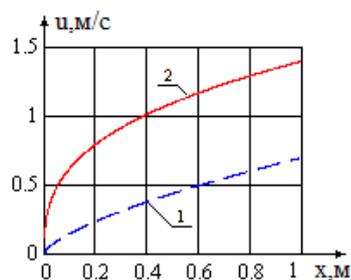


Рис. 2. Средняя продольная скорость,

$1 - \tau = 0$ ;  $2 - \tau = 0,14$

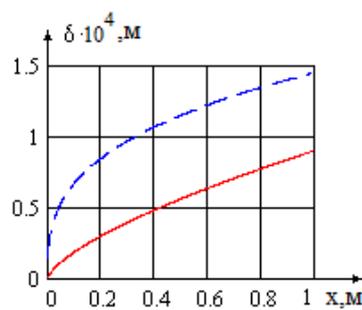


Рис. 3. Толщина пленки,

$1 - \tau = 0$ ;  $2 - \tau = 0,14$

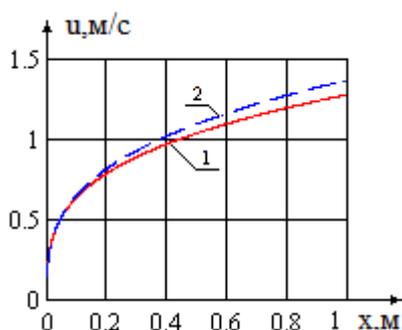


Рис. 4. Средняя продольная скорость

$1 - \alpha = \pi/18$ ,  $2 - \alpha = \pi/3$

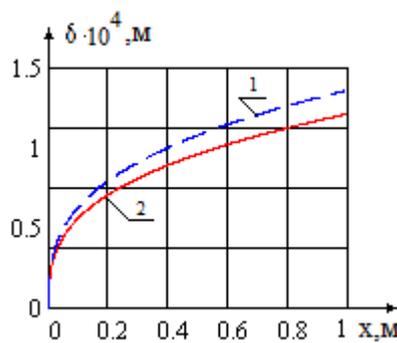


Рис. 5. Толщина пленки

$1 - \alpha = \pi/18$ ,  $2 - \alpha = \pi/3$

Из графиков видно, что увеличение угла наклона приводит к возрастанию продольной скорости и снижению толщины пленки. Число Рейнольдса, определяющее характер течения пленки, не превышает значения  $Re = 10$ , что соответствует ламинарному, не волновому течению.

#### Библиографический список

1. López, J., Pineda, H., Bello, D., Ratkovich, N. 2016. Study of liquid-gas two-phase flow in horizontal pipes using high speed filming and computational fluid dynamics. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 76: 126-134.
2. Lu, H., Lu, L., Luo, Y., Qi, R. 2016. Investigation on the dynamic characteristics of the counter-current flow for liquid desiccant dehumidification. *Energy*, 101: 229-238.
3. Li, M., Lu, Y., Zhang, S., Xiao, Y. 2016. A numerical study of effects of counter-current gas flow rate on local hydrodynamic characteristics of falling films over horizontal tubes. *Desalination*, 383: 68-80.
4. Klyuev, N.I., Gimadiev, A. G., Kryukov, Y. A. 2014. Two-media boundary layer on a flat plate. *IJET*, 6(5): 2368-2374.
5. Klyuev, N.I., Kryukov, Y.A. 2014. Influence of fluid film on friction of a flat plate. *Russian Aeronautics (Iz. VUZ)*, 57(4): 372-377.