

Шахов В.Г.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОКНЕРА-СКЭН

Приводятся результаты применения приближённого метода Тарга-Швеца для решения уравнений автомодельных ламинарных пограничных слоев несжимаемой жидкости.

Близкие по идее приближённые методы решения уравнений ламинарного пограничного слоя конечной толщины предложили М.Е. Швец [1] и С.М. Тарг [2]. Исключая с помощью уравнения неразрывности поперечную скорость, они записывают уравнение движения в виде интегро-дифференциального уравнения для продольной скорости, которое разрешается относительно второй производной этой скорости по поперечной координате пограничного слоя. Так как толщина пограничного слоя является ещё одной неизвестной, то искомое решение подчиняют дополнительному граничному условию: плавность смыкания профилей продольной скорости в пограничном слое и невязком внешнем течении. Это означает, что на внешней границе пограничного слоя продольная скорость имеет нулевую первую производную по поперечной координате.

Отличие рассматриваемых методов заключается в способах задания продольной скорости начального приближения и последовательности удовлетворения граничным условиям [3]. С учётом этих замечаний можно говорить о методе Швеца-Тарга.

1. Задача Блазиуса о ламинарном пограничном слое несжимаемой жидкости на плоской пластине [3] состоит в нахождении решения уравнения для продольной скорости

$$\frac{d^2u}{d\eta^2} = -\frac{1}{2} \frac{du}{d\eta} \int_0^\eta u d\eta, \quad (1)$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$u = 0 \text{ при } \eta = 0 \text{ и } u \rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty.$$

Здесь u – безразмерная продольная скорость в пограничном слое.

Так как метод Швеца-Тарга разработан для ламинарного пограничного слоя конечной толщины, граничные условия принимают следующий вид:

$$\eta = 0 : u = 0; \quad \eta = \Delta : u = 1, \frac{du}{d\eta} = 0, \quad (2)$$

где для безразмерной толщины пограничного слоя использовано обозначение Δ .

Следуя методу М.Е. Швеца, подставляя в правую часть (1) $u = 0$, дважды интегрируя и используя первые два граничных условия (2), получаем нулевое приближение

$$u^{(0)} = \frac{\eta}{\Delta}.$$

Тогда дифференциальное уравнение первого приближения принимает вид

$$\frac{d^2 u^{(1)}}{d\eta^2} = -\frac{1}{4} \frac{\eta^2}{\Delta^2}.$$

Интегрируя это уравнение один раз и используя третье условие (2), имеем

$$\frac{du^{(1)}}{d\eta} = \frac{\Delta}{12} \left(1 - \frac{\eta^3}{\Delta^3} \right). \quad (3)$$

Выполняя эту операцию повторно, с учётом первого условия (2) получаем

$$u^{(1)} = \frac{\Delta^2}{48} \left(4 \frac{\eta}{\Delta} - \frac{\eta^4}{\Delta^4} \right).$$

Для удовлетворения второго граничного условия (2) необходимо, чтобы

$$\Delta = 4.$$

Тогда из (3) следует, что определяющая касательное напряжение на поверхности пластины величина оказывается равной

$$\left. \frac{du^{(1)}}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \frac{1}{3} \approx 0,33333,$$

которая отличается от «точного» значения 0,33206 менее, чем на 0,4%.

2. В случае степенного распределения скорости невязкого течения вне пограничного слоя задача пограничного слоя сводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению [3], полученному Фокнером и Скэн. Также, как и в предыдущем случае, оно может быть преобразовано к интегро-дифференциальному уравнению для безразмерной продольной скорости u :

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = \beta(u^2 - 1) - \frac{1}{2} \frac{du}{d\xi} \int_0^\xi u d\xi, \quad (4)$$

где $\beta = \frac{2m}{m+1}$, m – показатель степени в распределении скорости невязкого течения вне пограничного слоя.

Используя новую переменную $\zeta = \frac{\xi}{\Delta}$, уравнению (4) придадим вид

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} = \Delta^2 \left[\beta(u^2 - 1) - \frac{1}{2} \frac{du}{d\zeta} \int_0^\zeta u d\zeta \right]. \quad (5)$$

Те же граничные условия (2) для новой переменной ζ преобразуются к виду

$$\zeta = 0 : u = 0; \quad \zeta = 1 : u = 1, \quad \frac{du}{d\zeta} = 0. \quad (6)$$

Для варианта метода С.М. Тарга возьмём несколько нулевых приближений [4]:

$$\text{а) } u^{(0)} = \zeta, \quad \text{б) } u^{(0)} = \frac{1}{2}(3\zeta - \zeta^3), \quad \text{в) } u^{(0)} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\zeta\right).$$

Подстановка этих функций в правую часть уравнения (5), повторное интегрирование с учётом граничных условий (6) и возвращение к переменной ξ приводит к следующим результатам:

$$\text{а) } \left. \frac{du^{(1)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{4\beta+1}{\sqrt{2\beta+1}}, \quad \text{б) } \left. \frac{du^{(1)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{\sqrt{2}}{70} \frac{288\beta+84}{\sqrt{20\beta+11}}, \quad \text{в) } \left. \frac{du^{(1)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{\pi\beta+4-\pi}{\sqrt{(\pi^2-2)\beta+\pi^2-6}}.$$

На графиках рис. 1,2 приводится сравнение «точной» [3] и приближённых зависимостей, отмеченных соответственно цифрами 1, 2, 3 и 4.

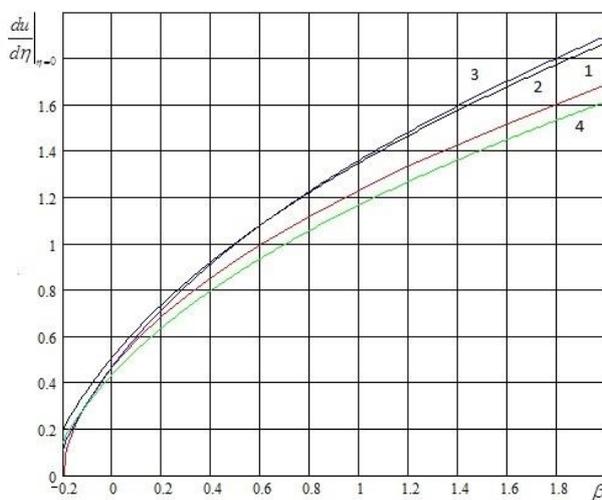


Рис. 1.

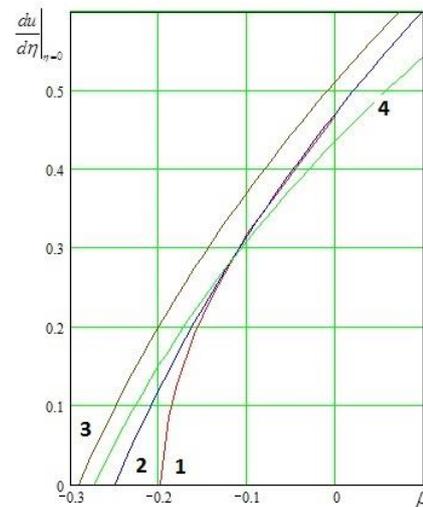


Рис. 2.

Библиографический список

1. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13. – № 3. С. 257-266.

2. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.: Гостехиздат, 1951. – 420 С.
3. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.:Физматгиз, 1962. – 480 С.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. – 712 С.