

ВЕКТОРНЫЕ СПЛАЙНОВЫЕ ЗАКОНЫ НАВЕДЕНИЯ МАНЕВРИРУЮЩЕГО СПУТНИКА ЗЕМЛЕОБОЗОРА

Введение. Представляются разработанные методы синтеза векторных сплайновых законов углового наведения КА землеобзора при выполнении маршрутов сканирующей съемки произвольной длительности и пространственных поворотных маневров (ПМ) с гладким сопряжением краевых условий общего вида. Законы углового наведения спутника землеобзора при сканирующей съёмке вычисляются на основе численного интегрирования дифференциального уравнения для кватерниона Λ при одновременном его согласовании с вектором угловой скорости ω и учёте как орбитального, так и углового движения КА, геодезических координат наблюдаемых наземных объектов, вращения Земли и других факторов [1].

Математические модели и постановка задач. Используются стандартные системы координат (СК) – инерциальная (ИСК) и геодезическая гринвичская (ГСК) с началом в центре Земли, орбитальная (ОСК $Ox^o y^o z^o$) и связанная с КА (ССК $Oxуz$) системы координат с началом в его центре масс O . Далее используются обозначения $col(\cdot) = \{\cdot\}$, $line(\cdot) = [\cdot]$, $(\cdot)^t$, $[a \times]$ и \circ, \sim для векторов, матриц и кватернионов. Вводятся кватернион Λ^o и углы ориентации ССК относительно ОСК по крену ϕ_1 , рысканию ϕ_2 и тангажу ϕ_3 , которые используются при формировании матриц элементарных поворотов $[\phi_i]_i$ в последовательности 312 при индексах осей $i = 1, 2, 3 \equiv 1 \div 3 \equiv x, y, z$. Кватернион $\Lambda = (\lambda_0, \lambda)$, $\lambda = \{\lambda_i\}$ ориентации КА в ИСК представляется как $\Lambda = \Lambda_o \circ \Lambda^o$, где Λ_o – кватернион ориентации ОСК в ИСК. Пусть вектор $G = J\omega + H$ представляет кинетический момент (КМ) механической системы, где $H = \{H_i\}$ – вектор КМ кластера четырех двигателей-маховиков (ДМ). Вектор M^r управляющего момента кластера ДМ формируется в виде $M^r = -H^*$, где $(\cdot)^*$ – символ локальной производной по времени. При простейшем моделировании корпуса КА с телескопом в виде свободного твердого тела с тензором инерции J вектор его КМ $G = J\omega + H \equiv G_o$, где G_o является постоянным вектором. Пусть система управления ориентацией (СУО) КА сбалансирована по КМ с условием $G_o \equiv 0$. Тогда модель динамики углового движения КА принимает вид $\dot{\omega} = \varepsilon$,

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}^T$ – вектор углового ускорения, а модель углового движения КА – кинематическое представление

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}(t) \circ \boldsymbol{\omega}(t)/2; \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}(t); \quad \boldsymbol{\varepsilon}^*(t) = \mathbf{v}. \quad (1)$$

Модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)$ ограничены, $|\boldsymbol{\omega}(t)| \leq \bar{\omega}$, $|\boldsymbol{\varepsilon}(t)| \leq \bar{\varepsilon}$ и $|\boldsymbol{\varepsilon}^*(t)| \leq \bar{\varepsilon}^*$, что обусловлено ограниченностью областей вариации векторов КМ \mathbf{H} и управляющего момента $\mathbf{M}^T = -\mathbf{H}^*$ кластера ДМ, а также допустимым темпом его изменения. Вектор модифицированных параметров Родрига (МПП) $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_i\} = \mathbf{e} \operatorname{tg}(\Phi/4)$ с традиционными обозначениями орта Эйлера \mathbf{e} и угла Φ собственного поворота. Вектор $\boldsymbol{\sigma}$ взаимно-однозначно связан с кватернионом $\boldsymbol{\Lambda}$ прямыми $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\lambda}/(1 + \lambda_0)$ и обратными $\lambda_0 = (1 - \sigma^2)/(1 + \sigma^2)$, $\boldsymbol{\lambda} = 2\boldsymbol{\sigma}/(1 + \sigma^2)$ соотношениями. Кинематические уравнения для этого вектора имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{4}(1 - \sigma^2)\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega} \rangle; \quad \boldsymbol{\omega} = 4[(1 - \sigma^2)\dot{\boldsymbol{\sigma}} - 2(\boldsymbol{\sigma} \times \dot{\boldsymbol{\sigma}}) + 2\boldsymbol{\sigma} \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle]/(1 + \sigma^2)^2, \quad (2)$$

причём $\ddot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2}[-\langle \boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}(1 - \sigma^2)\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \boldsymbol{\sigma} \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\omega} \rangle + \boldsymbol{\sigma} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle]$.

Пусть на некотором интервале времени $t \in T$ с помощью численного интегрирования кинематического уравнения в (1) выполнен расчет закона углового наведения КА, соответствующий требуемому маршрутному движению $\boldsymbol{\Lambda}(t), \boldsymbol{\omega}(t)$ сканирующей съемке произвольного типа (трассовая, ортодромическая, с оптимальным выравниваем продольной скорости движения изображения (СДИ), стереосъемка) и получены численные данные в точках $t_i \in T$. Первая задача состоит в векторном сплайновом представлении такого закона наведения с заданной точностью без каких-либо ограничений на длительность временного интервала сканирования.

Если имеются два смежных временных интервала сканирующей съемки, то в результате аналитического представления законов наведения становятся известными краевые условия пространственного ПМ по кватерниону, векторам $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, а также по вектору $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в момент времени начала второго маршрута оптико-электронной съемки. Пространственные поворотные маневры КА землеобзора на интервале времени $t \in T_p \equiv [t_0^p, t_f^p]$, $t_f^p \equiv t_0^p + T_p$ с краевыми условиями общего вида

$$\boldsymbol{\Lambda}(t_0^p) = \boldsymbol{\Lambda}_0; \quad \boldsymbol{\omega}(t_0^p) = \boldsymbol{\omega}_0; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t_0^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_0; \quad \boldsymbol{\Lambda}(t_f^p) = \boldsymbol{\Lambda}_f; \quad \boldsymbol{\omega}(t_f^p) = \boldsymbol{\omega}_f; \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t_f^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_f; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^*(t_f^p) = \boldsymbol{\varepsilon}_f^* \quad (3)$$

при ограничениях на модули векторов $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ не являются единственными, и поэтому ставится вторая задача – аналитический синтез закона наведения КА при ПМ.

Синтез закона наведения при сканирующей съёмке. Рассмотрим временной интервал $T \equiv [0, T]$ сканирующей съёмки и введем обозначения четырёх точек τ_p , $p=1 \div 4$ этого интервала: $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = T/3$, $\tau_3 = 2T/3$ и $\tau_4 = T$. Пусть выполнен расчет маршрутного движения и получен указанный массив численных данных в точках t_l . По шести значениям $\boldsymbol{\omega}_l = \boldsymbol{\omega}(t_l)$ в односторонних окрестностях краев интервала T ($\tau_1 = 0$ и $\tau_4 = T$) выполняется стандартная интерполяция значений вектора угловой скорости векторным сплайном 5-го порядка. Аналитическое дифференцирование этого сплайна позволяет вычислить значения вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau_1)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_4 = \dot{\boldsymbol{\omega}}(\tau_4)$. Для 4 точек $\tau_p \in T$ по явным формулам вычисляются значения вектора $\boldsymbol{\sigma}_p = \boldsymbol{\sigma}(\tau_p)$, $p=1 \div 4$, а в граничных точках интервала – также значения производных $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_p$ и $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_p$, $p=1, 4$. Интерполяция вектора МПР $\boldsymbol{\sigma}(t) \quad \forall t \in T$ выполняется сплайном 7-го порядка $\boldsymbol{\sigma}_a(t) = \sum_0^7 \mathbf{a}_s t^s$ с 8 векторами-столбцами $\mathbf{a}_s \in \mathbf{R}^3$, $s=0 \div 7$ неизвестных коэффициентов. Производные функции $\boldsymbol{\sigma}_a(t)$ представляются соотношениями $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_a(t) = \sum_1^7 s \mathbf{a}_s t^{s-1}$; $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_a(t) = \sum_2^7 s(s-1) \mathbf{a}_s t^{s-2}$. Восемь столбцов \mathbf{a}_s сплайна $\boldsymbol{\sigma}_a(t)$ определяются на основе:

(i) трёх краевых условий $\boldsymbol{\sigma}_a(0) = \boldsymbol{\sigma}_1$; $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_a(0) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$; $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_a(0) = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_1$ на левом конце интервала T , что даёт $\mathbf{a}_0 = \boldsymbol{\sigma}_1$, $\mathbf{a}_1 = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1$ и $\mathbf{a}_2 = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_1/2$;

(ii) двух условий $\boldsymbol{\sigma}_a(\tau_2) = \boldsymbol{\sigma}_2$; $\boldsymbol{\sigma}_a(\tau_3) = \boldsymbol{\sigma}_3$ в точках τ_2 и τ_3 , что даёт два уравнения $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 \tau_2 + \mathbf{a}_5 \tau_2^2 + \mathbf{a}_6 \tau_2^3 + \mathbf{a}_7 \tau_2^4 = \mathbf{b}_3$, $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 \tau_3 + \mathbf{a}_5 \tau_3^2 + \mathbf{a}_6 \tau_3^3 + \mathbf{a}_7 \tau_3^4 = \mathbf{b}_4$ при обозначениях $\mathbf{b}_3 = \boldsymbol{\sigma}_2 - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \tau_2 + \mathbf{a}_2 \tau_2^2) / \tau_2^3$ и $\mathbf{b}_4 = \boldsymbol{\sigma}_3 - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \tau_3 + \mathbf{a}_2 \tau_3^2) / \tau_3^3$;

(iii) краевых условий $\boldsymbol{\sigma}_a(T) = \boldsymbol{\sigma}_4$; $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_a(T) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_4$; $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_a(T) = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_4$, что приводит к трём уравнениям $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 \tau_4 + \mathbf{a}_5 \tau_4^2 + \mathbf{a}_6 \tau_4^3 + \mathbf{a}_7 \tau_4^4 = \mathbf{b}_5$, $3\mathbf{a}_3 + 4\mathbf{a}_4 \tau_4 + 5\mathbf{a}_5 \tau_4^2 + 6\mathbf{a}_6 \tau_4^3 + 7\mathbf{a}_7 \tau_4^4 = \mathbf{b}_6$, $6\mathbf{a}_3 + 12\mathbf{a}_4 \tau_4 + 20\mathbf{a}_5 \tau_4^2 + 30\mathbf{a}_6 \tau_4^3 + 42\mathbf{a}_7 \tau_4^4 = \mathbf{b}_7$ с явным представлением столбцов $\mathbf{b}_5 = \boldsymbol{\sigma}_4 - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \tau_4 + \mathbf{a}_2 \tau_4^2) / \tau_4^3$, $\mathbf{b}_6 = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_4 - (\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \tau_4) / \tau_4^2$ и $\mathbf{b}_7 = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_4 - 2\mathbf{a}_2 / \tau_4$.

Для определения пяти векторов \mathbf{a}_s , $s=3 \div 7$ формируется соотношение $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B}$, где строчные матрицы $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7]$, $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6, \mathbf{b}_7]$ и $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6, \mathbf{c}_7]$ составлены из столбцов \mathbf{a}_s , \mathbf{b}_s , $\mathbf{c}_3 = \mathbf{t}_2$; $\mathbf{c}_4 = \mathbf{t}_3$; $\mathbf{c}_5 = \mathbf{t}_4$; $\mathbf{c}_6 = \mathbf{D}_6 \mathbf{t}_4$ и $\mathbf{c}_7 = \mathbf{D}_7 \mathbf{t}_4$ при $\mathbf{t}_p = \{1, \tau_p, \tau_p^2, \tau_p^3, \tau_p^4\}$, $p=2, 3, 4$ и $\mathbf{D}_6 = \text{diag}\{3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathbf{D}_7 = \text{diag}\{6, 12, 20, 30, 42\}$.

Вычисление 5 столбцов \mathbf{a}_s , $s = 3 \div 7$ выполняется по соотношению $[\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7] = \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$.

Строго согласованные кинематические параметры $\Lambda = \Lambda(t), \omega = \omega(t)$, полученные интегрированием кватернионного уравнения, принимаются за эталонные координатные функции углового движения КА при выполнении сканирующей съёмки. Кватернион $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e})$ рассогласования между кватернионом $\Lambda(t)$ и кватернионом $\Lambda_a(t)$ его сплайновой интерполяции, который соответствует вектору $\sigma_a(t)$ и вычисляется по обратному уравнению в (2), определяется как $\mathbf{E}(t) \equiv (\mathbf{e}_0(t), \mathbf{e}(t)) = \tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_a(t)$. При этом матрица угловой погрешности интерполяции $\mathbf{C}_e = \mathbf{I}_3 - 2[\mathbf{e} \times] \mathbf{Q}_e^t$, где $\mathbf{Q}_e = \mathbf{I}_3 \mathbf{e}_0 + [\mathbf{e} \times]$, вектор-столбец $\delta\phi = \{\delta\phi_i\}$ углов погрешности интерполяции $\delta\phi = 2\mathbf{e}_0 \mathbf{e}$, а вектор $\delta\omega = \{\delta\omega_i\}$ погрешности интерполяции вектора угловой скорости $\omega(t)$ определяется как $\delta\omega(t) = \omega_a(t) - \mathbf{C}_e \omega(t)$.

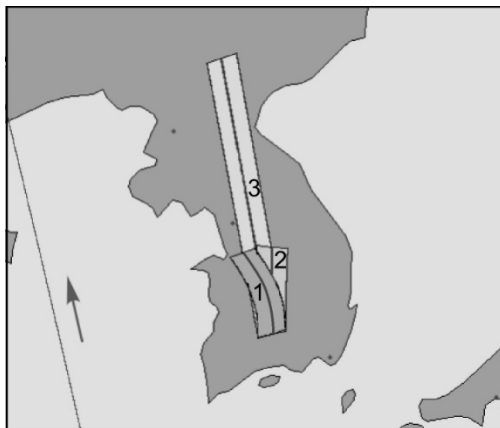


Рисунок 1 – Маршруты на карте:
1 – с выравниванием, 2 – ортодромическая,
3 – трассовая

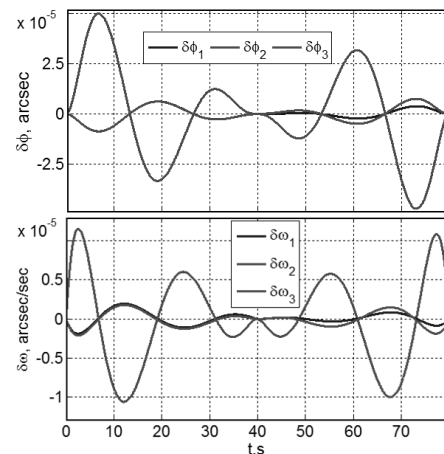


Рисунок 2 – Погрешности интерполяции маршрута трассовой съёмки

С целью верификации разработанного метода выполнен анализ зависимости длительности T маршрутов всех указанных выше типов съёмки для КА на солнечно-синхронной орбите высотой 600 км (рисунок 1). Установлено, что при длительности маршрута съёмки $T \leq 40$ максимальные отклонения сплайна $\sigma_a(t)$ от эталонного вектора $\sigma(t)$ составили $\delta\phi^m = \max |\delta\phi| = 0,03$ угл. сек по углу и $\delta\omega^m = \max |\delta\omega| = 0,04$ угл. сек/сек по угловой скорости. На рисунке 2 приведены результаты интерполяции маршрута трассовой съёмки с длительностью $T = 80$ с при

гладком сопряжении двух векторных сплайнов 7-го порядка на интервалах длительностью $T = 40$ с.

В [2] детально представлены технология синтеза и полученные результаты для всех указанных типов съёмки.

Законы наведения для последовательности съёмки и поворотных манёвров.

Приближенное аналитическое решение задачи оптимизации пространственного ПМ по критерию энергетического типа основывается на необходимом и достаточном условии разрешимости классической задачи Дарбу. Здесь решение представляется как результат сложения трёх одновременно происходящих элементарных поворотов «вложенных» базисов E_k вокруг ортов e_k осей Эйлера, положение которых определяется краевыми условиями (3). При этом кватернион $\Lambda(t) = \Lambda_1 \circ \Lambda_1(t) \circ \Lambda_2(t) \circ \Lambda_3(t)$, где $\Lambda_k(t) = (\cos(\varphi_k(t)/2), e_k \sin(\varphi_k(t)/2))$, $\varphi_k(t)$ – угол k -го поворота, $k = 1 \div 3$, и векторы $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon^*(t)$ представляются в аналитическом виде. Выполнена верификация точности приближенной оптимизации ПМ в сравнении со строгой численной оптимизацией для исходной нелинейной задачи (1) с ограничениями и краевыми условиями (3) на основе принципа максимума и стандартного итерационного метода Ньютона. Установлено, что различие между приближенно оптимальным (в виде набора векторных сплайнов с гладким сопряжением) и строго оптимальным «управлением» весьма незначительно – до 10 % по функционалу при традиционных размерах полосы землебзора [3].

На карте (рисунок 3) представлены отображения двух маршрутов и ПМ между ними для КА землеобзора на солнечно-синхронной орбите с высотой 600 км и долготой восходящего узла (ВУ) $\Omega_0 = 29,5$ град. При отсчете времени t от момента прохождения ВУ синтез законов наведения выполнен для таких исходных данных: маршрут 1 – трассовая съёмка длительностью $T^{(1)} = 20$ с, начиная с $t_0^{(1)} = 580$ с при начальных углах $\phi_1 = -10$ град и $\phi_3 = 0$ град; ПМ длительностью $T_p = 33$ с, начиная с $t_i^p = 600$ с при $\bar{\omega} = 2$ град/с, $\bar{\varepsilon} = 1$ град/с² и $\bar{\varepsilon}^* = 1$ град/с³; маршрут 2 – съёмка с выравниванием СДИ длительностью $T^{(2)} = 20$ с, начиная с $t_0^{(2)} = 633$ с и точки съёмки в ГСК с долготой $L = 18,11$ град, широтой $B = 39,68$ град при начальном азимуте $A = +10$ град. На рисунке 4 приведены результаты компьютерного автоматического синтеза закона углового наведения КА землеобзора для указанной последовательности и значений параметров маршрутов и ПМ с использованием разработанных аналитических соотношений.

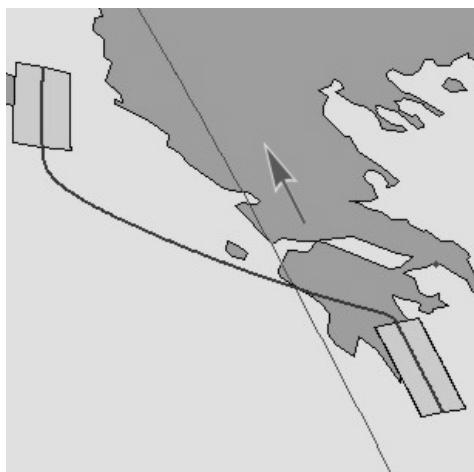


Рисунок 3 – Два маршрута съемки и ПМ между ними на карте

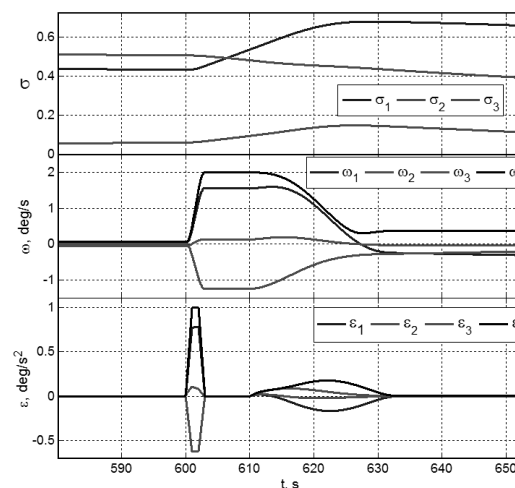


Рисунок 4 – Изменение векторов σ , ω и ϵ при двух маршрутах съемки и ПМ между ними

Работа поддержана РФФИ (грант 14-08-01091) и Отделением энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (программа фундаментальных исследований № 13).

Библиографический список

1. Сомов, Е.И. Оптимизация режимов сканирующей оптико-электронной съёмки и 3D-анимация движения маневрирующего спутника землеобзора [Текст] / Е.И. Сомов, С.А. Бутырин, Т.Е. Сомова, С.Е. Сомов // Техническое зрение. – 2013. – № 1. – С. 15-22.
2. Сомова, Т.Е. Векторное полиномиальное представление законов наведения и анимация движения спутника землеобзора [Текст] / Т.Е. Сомова // Известия Самарского научного центра РАН. – 2015. – Том 17. – № 6(3). – С. 726-733.
3. Somov, Ye., Butyrin, S., Somova, T. Synthesis of the vector spline guidance laws for a land-survey satellite at scanning observation and rotational maneuvers // Proceedings of International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems”. – 2016. – P. 1-4. DOI: 10.1109/STAB.2016.7541228.