УДК 517-946

А.Л.Бухгейм, С.Г.Казанцев

ЗАДАЧА РАДОНА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Приводится точное решение бесконечной системы уравнений в виде интеграла типа Коши. Полученное решение позволяет получить новые алгоритмы для восстановления функции по известным от нее интегралам по заданному семейству кривых.

В работе задача Радона интерпретируется как задача Коши для бесконечномерного аналога эллиптической системы типа Бельтрами. Для этой системы получена формула Коши и даны необходимые и достаточные условия разрешимости, которые приводят соответственно к формуле обращения и критериям разрешимости задачи Радона. Предлагаемый подход интересен, в частности, тем, что допускает обобщение на криволинейный случай. Перейдем к точным формулировкам.

Рассматривается плоская задача Радона в ограниченной строго выпуклой области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$: найти непрерывную функцию $a(x,y)$ в области Ω через интегралы от нее по всевозможным прямым, пересекающим данную область. Известно, что в дифференциальной форме указанная задача сводится к нахождению правой части уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi=a(x,y) \qquad (1)$$

по известным значениям решения $u(x,y,\varphi)$ на поверхности

$$\Sigma\equiv\partial\Omega\times[-\pi,\pi],$$

$$u(x,y,\varphi)\big|_{\Sigma}=f(x,y,\varphi).$$

Будем считать, что Ω -область в $\mathbb{C}$ и $a(z)\equiv a(x,y)$,

$$u(z,\varphi)\equiv u(x,y,\varphi),\quad z=x+iy.$$

Удобное для наших целей частное решение уравнения (1) представляется через искомую функцию $a(z)$ в виде

$$u(z,\varphi)=\frac{1}{2}\Big(\int_{L_2}a(\zeta)|d\zeta|-\int_{L_1}a(\zeta)|d\zeta|\Big), \qquad (2)$$

где L_1, L_2 - отрезки прямой L, соединяющей точки $t_1, t_2 \in \partial\Omega$,

$$L_1 = \{\xi : \xi = t_1 + s(z - t_1),\ s \in [0,1]\},$$

$$L_2 = \{\eta : \eta = t_2 + s(z - t_2),\ s \in [0,1]\},$$

$$\varphi = \arg(z - t_2) = \arg(t_1 - z) = \arg(t_1 - t_2).$$

На поверхности Σ функция $u(z,\varphi)$ выражается через данные Радона

$$u(z,\varphi)\Big|_{\Sigma} = f(z,\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_{L} a(\eta)|d\eta|, & \text{если } z = t_1,\ \varphi = \arg(t_1 - t_2) \\ -\frac{1}{2}\int\limits_{L} a(\eta)|d\eta|, & \text{если } z = t_2,\ \varphi = \arg(t_1 - t_2). \end{cases} \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$f(t_1,\varphi) = -f(t_2,\varphi) \quad \text{для } \forall t_1, t_2 \in \partial\Omega,\ \varphi = \arg(t_1 - t_2).$$

Разложив функцию $u(z,\varphi)$ в ряд Фурье по переменной φ

$$u(z,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n e^{-i(2n+1)\varphi} + \bar{u}_n e^{i(2n+1)\varphi}) = 2Re \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{-i(2n+1)\varphi}$$

и используя формулу (I), получим рекуррентные соотношения

$$2Re(u_{0x} - u_{0y}) = a(z), \tag{4}$$

$$u_{nx} + i u_{ny} + u_{(n+1)x} - i u_{(n+1)y} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Введем вектор $u(z) = \{u_0(z), u_1(z), \ldots\}$, оператор сдвига влево $U^*\{u_0, u_1, \ldots\} = \{u_1, u_2, \ldots\}$ и операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Тогда для вектор- функции $u(z)$ из (5) получим бесконечномерный аналог уравнения типа Бельтрами

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u + U^* \frac{\partial}{\partial z} u = 0 . \tag{6}$$

Для $z \in \partial\Omega$ имеет место разложение

$$f(z, \varphi) = 2 Re \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-i(2n+1)\varphi},$$

поэтому на границе области $\partial\Omega$ вектор-функция $u(z)$ удовлетворяет равенству

$$u(z)\Big|_{\partial\Omega} = \{f_0, f_1, \dots\}. \tag{7}$$

Условие (3) в этом случае имеет вид

$$Re \sum_{n=0}^{\infty} (f_n(t_1) + f_n(t_2)) \left(\frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_2}{t_1 - t_2}\right)^n \frac{|t_1 - t_2|}{t_1 - t_2} = 0, \ \forall t_1, t_2 \in \partial\Omega . \tag{8}$$

Определив вектор-функцию $u(z)$ в задача (6),(7), по формуле (4) найдем искомую функцию $a(z)$.

В конечном случае свойства решений системы типа Бельтрами изучены и полностью аналогичны свойствам голоморфного вектора [2]. В настоящей работе эти свойства формулируются для решений системы (6) и используются для решения задачи Радона. Решение системы (6), как и в конечномерном случае, будем называть U^* -голоморфным вектором. Обозначим через ℓ_2^m $(m \geq 1)$ пространство всех последовательностей $f = \{f_0, f_1, \dots\}$ с нормой $\|f\|_{2,m} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} |(1+j)^m f_j|^2\right]^{1/2}$.
Будем говорить, что вектор - функция $u(z) \in C^k(\bar{\Omega}; \ell_2^m)$, если

$u(z) = \{u_0(z), u_1(z), \dots\} \in \ell_2^m$, а каждая координата $u_j(z)$ есть функция из $C^k(\bar{\Omega})$. Норму в $C^k(\bar{\Omega}; \ell_2^m)$ вводим по формуле

$$\|u\|^2_{C^k(\bar\Omega;\,l_2^m)}=\sum_{j=0}^{\infty}(1+j)^{2m}\|u_j\|^2_{C^k(\bar\Omega)}.$$

Через $C^{k,loc}(\Omega;\,l_2^m)$ обозначим пространство вектор-функций $u(z)$ таких, что $u(z)\in C^k(K;\,l_2^m)$ для каждого компакта $K\subset\Omega$. Для функций, определенных на контуре $\partial\Omega$, аналогично определим пространство функций $C^k(\partial\Omega;\,l_2^m)$ и пространство Гельдера $C^{0,\alpha}(\partial\Omega;\,l_2^m)$, состоящее из функций $u(z)=\{u_0(z),u_1(z),\ldots\}\in l_2^m$, где каждая координата $u_j(z)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$. Норма в этом пространстве равна:

$$\|u\|^2_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega;\,l_2^m)}=\sum_{j=0}^{\infty}(1+j)^{2m}\|u_j\|^2_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)},\ 0<\alpha\leq 1.$$

<u>Теорема I.</u> Пусть $u(z)$ есть U^*-голоморфная функция в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, такая, что

а) $u(z)\in C^1(\bar\Omega;\,l_2^m)$;

б) $u(t)\big|_{\partial\Omega}=f(t)\in C(\partial\Omega;\,l_2^3)$.

Тогда при любом z, не лежащем на границе $\partial\Omega$, существует интеграл типа Коши

$$v(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left[(\zeta-z)E-(\bar\zeta-\bar z)U^*\right]^{-1}(d\zeta-U^*d\bar\zeta)f(\zeta) \qquad (9)$$

и выполняются равенства (формула Коши)

$v(z)=u(z)$, если $z\in\Omega$;

$v(z)=0$, если $z\in\mathbb{C}\setminus(\Omega\cup\partial\Omega)$.

<u>Замечание.</u> Если условие б) теоремы имеет вид $u(t)\big|_{\partial\Omega}\in C(\partial\Omega;\,l_2^m)$, $m\geq 3$, то производные $\dfrac{\partial^k u}{\partial z^k}$ для $k=1,2,\ldots,m-2$ существуют и являются U^*-голоморфными функциями в области Ω.

Теорема 2. Пусть $f(t)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega;e_2^m)$. Функция $f(t)$ будет граничным значением функции $u(z)$, V^* – голоморфной в Ω, непрерывной вплоть до границы $\partial\Omega$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{1}{2}f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\left[(\zeta-t)E-(\bar\zeta-\bar t)V^*\right]^{-1}(d\zeta-V^*d\bar\zeta)f(\zeta). \qquad (10)$$

Теорема 3. Пусть $u(z)$ есть V^* – голоморфная функция в области Ω, непрерывная вплоть до границы области $\partial\Omega$, так что

а) $u(t)\big|_{\partial\Omega}=f(t)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega;e_2^3)$;

б) $Re\sum\limits_{n=0}^{\infty}(f_n(t_1)+f_n(t_2))\left(\frac{\bar t_1-\bar t_2}{t_1-t_2}\right)^2\frac{|t_1-t_2|}{t_1-t_2}=0,\ \forall t_1,t_2\in\partial\Omega.$

Функция $u(z,\varphi)=2Re\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(z)e^{-i(2n+1)\varphi}$ удовлетворяет условию (2), если функция $a(z)=2Re\frac{\partial u_0}{\partial z}$.

Из теорем (2),(3) следуют условия разрешимости задачи интегральной геометрии в области Ω. В другой форме условия разрешимости задачи Радона в круге получены Л.Н.Пестовым [I].

Библиографический список

I. Пестов Л.Н. О разрешимости задачи интегральной геометрии в круге //Методы исследования обратных и некорректных задач. Новосибирск, 1987. С. 99-105.

2. Hell G.N. Function Theory for Generalized Beltrami systems // Contemporary Mathematics, 1982, Vol. 11, p. 101-125.