АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА ПУЧКОВ ЭРМИТА–ГАУССА С ВНЕДРЁННЫМ ОПТИЧЕСКИМ ВИХРЕМ

А.В. Устинов [1]

[1] *Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия*

Аннотация

В данной работе детально теоретически исследуется прохождение через линзу пучков Эрмита–Гаусса с внедрённой в них вихревой фазой. Особое внимание уделяется расположению в фокальной плоскости вихревых фазовых особенностей. Получены достаточные условия для нулевого значения интенсивности в центре фокальной плоскости. Численный расчёт подтверждает теоретический анализ.

Ключевые слова: пучок Эрмита–Гаусса, фазовая особенность, тригонометрические преобразования.

Цитирование: **Устинов, А.В.** Анализ пространственного спектра пучков Эрмита–Гаусса с внедрённым оптическим вихрем / А.В. Устинов // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 617-625. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-617-625.

Введение

Вихревыми называют лазерные пучки с вихревой фазовой особенностью, характеризующейся нулевой интенсивностью в области неопределённости фазы [1–6]. Среди вихревых пучков хорошо известны моды Лагерра–Гаусса и Бесселя [7–9], также угловые гармоники содержат гипергеометрические пучки [10] и функции Цернике [11]. Все упомянутые распределения разделимы (факторизуются) в полярной системе координат, т.е. представимы в виде произведения функции, зависящей только от радиуса, и угловой гармоники $\exp(im\varphi)$, m – порядок оптического вихря.

Пучки, факторизующиеся в декартовой системе координат, такие как моды Эрмита–Гаусса, пучки Эйри, не являются вихревыми, хотя их определённые суперпозиции используются для преобразования в вихревые пучки [12, 13].

Заметим, однако, что в последнее время часто рассматривают пучки Эйри с внедрённой в них вихревой фазой [14–16]. Кроме того, в работе [17] были рассмотрены так называемые вихревые пучки Эрмита–Гаусса, зависящие от комплексного аргумента. В работе [18] оптический элемент, согласованный с модами Эрмита–Гаусса, использовался в качестве низкочастотной решётки для размножения вихревой фазовой сингулярности первого порядка.

В данной работе детально теоретически исследуются пучки Эрмита–Гаусса с внедрённым оптическим вихрем произвольного порядка. Особое внимание уделяется пространственно-спектральной картине рассматриваемых пучков и формированию в фокальной области вихревых фазовых особенностей.

1. Теоретические основы

Рассмотрим пучки Эрмита–Гаусса с внедрённой в них вихревой фазой:

$$\Psi_{nms}(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) H_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) H_m\left(\frac{y}{\sigma}\right)\left(x+iy\right)^s, \quad (1)$$

где $H_n(x)$ – полином Эрмита.

У многочленов Эрмита есть одна особенность – все члены имеют одинаковую чётность степени. Однако сейчас мы не будем это учитывать, а для общности рассмотрим случай, когда вместо произведения многочленов Эрмита стоит произвольный многочлен от двух переменных (Гауссова функция также может быть заменена другой осесимметричной функцией). Отдельный член имеет вид:

$$P_{pqs}(x,y) = A(r)x^p y^q \left(x+iy\right)^s. \quad (2)$$

Для удобства дальнейшего анализа запишем функцию (2) в полярных координатах:

$$P_{pqs}(r,\varphi) = A(r)\left(r\cos\varphi\right)^p \left(r\sin\varphi\right)^q r^s \exp\left(is\varphi\right). \quad (3)$$

Рассмотрим преобразование Фурье от функции (3):

$$F_{pqs}(\rho,\theta) = \frac{2\pi}{\lambda f}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} P_{pqs}(r,\varphi)\times \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda f}\rho r\cos(\varphi-\theta)\right] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \quad (4)$$

где λ – длина волны излучения, f – фокусное расстояние параболической линзы, выполняющей преобразование Фурье.

Хорошо известно, что вихревые пучки при распространении в однородной среде, а также при прохождении через параболические линзы сохраняют вихревую фазовую особенность и нулевое значение интенсивности на оптической оси [1–6]. Однако в анизотропных средах [19, 20] или при астигматических преобразованиях [12, 13, 21] такие пучки теряют осевую симметрию в распределении интенсивности, и на оптической оси может появляться ненулевое значение.

Так как пучок (1) не обладает осевой симметрией, то при своём распространении или прохождении через линзу он может претерпевать изменения, аналогичные анизотропному или астигматическому преобразованию.

1.1. Анализ поля в центре фокальной плоскости

В этом подпараграфе ограничимся выяснением, будет ли в центре фокальной плоскости (на оси) нулевое значение. В этой точке (4) принимает вид:

$$F_{pqs}(0,0)=\frac{2\pi}{\lambda f}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}A(r)\left(r\cos\varphi\right)^p\times$$
$$\times\left(r\sin\varphi\right)^q r^s\exp\left(is\varphi\right)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=$$
$$=\frac{2\pi}{\lambda f}\int_0^{\infty}A(r)r^{p+q+s+1}\mathrm{d}r\times \tag{5}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\right)^p\left(\sin\varphi\right)^q\exp\left(is\varphi\right)\mathrm{d}\varphi.$$

Нулевое или ненулевое значение в фокусе определяется значением интеграла по углу в выражении (5). Этот интеграл всегда вычисляется аналитически в элементарных функциях:

$$E=\int_0^{2\pi}\cos^p\varphi\cdot\sin^q\varphi\cdot\left(\cos s\varphi+i\sin s\varphi\right)\mathrm{d}\varphi= \tag{6}$$
$$=E_1+iE_2.$$

Далее используем то, что числа p, q, s – целые неотрицательные, причём $s>0$ ($s<0$ приведёт к смене знака в (6)), и хотя бы одно из p, q больше нуля.

Для преобразования подынтегральных выражений в (6) степень косинуса / синуса выражаем через функции кратных дуг, что выполняется с помощью известных формул произведения и степени:

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta),$$
$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta), \tag{7}$$
$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

Чётные степени:

$$\sin^n\alpha=\frac{C_n^{n/2}}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{(n/2)-1}(-1)^{(n/2)-k}C_n^k\cos((n-2k)\alpha),$$
$$\cos^n\alpha=\frac{C_n^{n/2}}{2^n}+ \tag{8}$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{(n/2)-1}C_n^k\cos((n-2k)\alpha).$$

Нечётные степени:

$$\sin^n\alpha=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(-1)^{(n-1)/2-k}C_n^k\sin((n-2k)\alpha),$$
$$\cos^n\alpha=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{(n-1)/2}C_n^k\cos((n-2k)\alpha). \tag{9}$$

Вначале проанализируем частные случаи, когда многочлен зависит только от одной переменной.

Зависимость только от переменной x (q=0)

При $q=0$ выражение (6) можно переписать следующим образом:

$$E_1=\int_0^{2\pi}\cos^p\varphi\cdot\cos s\,\varphi\mathrm{d}\varphi, \tag{10}$$

$$E_2=\int_0^{2\pi}\cos^p\varphi\cdot\sin s\,\varphi\mathrm{d}\varphi. \tag{11}$$

Согласно (8)–(9) степень косинуса всегда выражается через *косинусы* кратных углов с *положительными* коэффициентами и максимальной кратностью p. Поэтому под интегралом в (11) не может быть квадрата тригонометрической функции, соответственно, E_2 будет равно нулю независимо от значений p и s.

Так как в представлении степени максимальная кратность равна p, то при $s>p$ не будет квадрата, то есть $E_1=0$. Кроме того, все кратности угла имеют ту же чётность, что и число p, поэтому если p и s имеют разную чётность, то не будет квадратов и $E_1=0$. Если же чётность одинакова, то одно слагаемое будет квадратом, поэтому $E_1\neq 0$.

В итоге получаем, что на оси будет нуль амплитуды (вещественная и мнимая части равны нулю) при условии:

$$(s>p)\ \textit{или}\ (p+s-\textit{нечётное}). \tag{12}$$

Причём это условие не только достаточное, но и *необходимое* (так как квадратом будет *лишь одно* слагаемое, оно не может сократиться). Если (12) не выполнено, то $E_1>0$ и $E_2=0$.

Зависимость только от переменной y (p=0)

С геометрической точки зрения условие нулевой амплитуды должно быть симметрично (12), но доказательство отличается. В отличие от косинуса, степень синуса выражается через синусы только при нечётном показателе, при этом слагаемые будут *знакочередующимися*. Не приводя доказательства, выпишем условие нулевой амплитуды на оси

$$(s>q)\ \textit{или}\ (q+s-\textit{нечётное}). \tag{13}$$

Как видим, оно действительно симметрично (12) и по-прежнему является не только достаточным, но и *необходимым*. Различие наблюдается, когда это условие не выполняется. Объяснение отличия от $q=0$ следующее: ось x переходит в y при повороте на 90 градусов, что соответствует умножению на мнимую единицу. При этом степень единицы всегда равна единице, а степень мнимой единицы имеет 4 значения. Впрочем, при наблюдении *интенсивности* поля упомянутое различие исчезает.

Общий случай (p>0 и q>0)

Доказательство основано на формулах (7)–(9) и рассмотрении разной чётности показателей p и q. Подход аналогичен предыдущим двум пунктам, поэтому выпишем лишь конечное условие равенства амплитуды нулю:

$$(s>p+q)\ \textit{или}\ (p+q+s-\textit{нечётное}). \tag{14}$$

Условия (12) и (13) получаются из него как частные случаи. Существенное отличие в том, что это условие *достаточное*, но может и не быть *необходимым*. Необходимость (12) и (13) обосновывалась тем, что квадрат под интегралом могло дать только одно слагаемое. Здесь при перемножении выражений для степеней косинуса и синуса в общем случае будут *подобные* слагаемые. То есть при нарушении *второго* условия (14) не исключена ситуация, при которой под интегралом *будут* квадраты, которые сократятся между собой.

Примером является $p = q = s = 2$. В этом случае первый интеграл равен

$$E_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2\varphi)\cdot(1-\cos 2\varphi)\cdot \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\underline{\cos 2\varphi}-\underline{\cos 2\varphi}-\cos^2 2\varphi)\cdot \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Подчёркнуты слагаемые, которые дают сокращающиеся квадраты. То, что $E_2 = 0$, не показываем, так как в нём нет квадратов. В итоге получаем, что амплитуда на оси равна нулю, хотя условие (14) и не выполнено.

Выше был исключён случай $s = 0$ (отсутствие вихря). Для него имеет место следующее условие равенства амплитуды нулю:

$$p \text{ или } q - \text{нечётное}. \tag{14a}$$

Оно необходимо и достаточно и приведено отдельно, так как не получается из (14) при $s = 0$.

Из (14) следует, что при рассмотрении *произвольного* многочлена амплитуда на оси, скорее всего, будет *не равна нулю*, так как у различных слагаемых $p + q$ имеет несовпадающую чётность. Если все слагаемые имеют одинаковую чётность, как это имеет место у пучков Эрмита–Гаусса, то, основываясь на первом условии (14), можно ограничиться рассмотрением одного слагаемого с наибольшей степенью.

Сразу отметим, что рассмотрение одного слагаемого даёт только *достаточные* условия того, что интеграл от всего многочлена равен нулю, так как учитывается только ситуация, когда *все слагаемые* дадут нуль. Например, если многочлен имеет вид $(x^2 + y^2)^n$, то мы имеем радиально-симметричный случай, а значит, амплитуда на оси, очевидно, будет равна нулю, хотя интегралы от каждого слагаемого могут и не равняться нулю. Хотя, если многочлен *произвольный*, то такие случаи имеют меру нуль.

1.2. Внеосевое распределение поля в фокальной плоскости

В предыдущем подпараграфе рассмотрено, какое значение будет в центре фокальной плоскости – нулевое или ненулевое. Здесь сделаем следующий шаг: найдём внеосевое распределение для *частного* случая, когда многочлен зависит только от переменной x ($q = 0$). Тогда внутренний интеграл в (4) выглядит следующим образом:

$$A = \int_0^{2\pi} \cos^p\varphi \cdot e^{is\varphi} \cdot \exp\left[-\frac{ik}{f}\rho r \cos(\varphi-\theta)\right]\mathrm{d}\varphi. \tag{15}$$

Далее будем использовать обозначение $a = (k\rho r)/f$ и табличные формулы из [22] (Т. 1, с. 440):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \sin(a\cos x) \\ \cos(a\cos x) \end{Bmatrix} \sin nx \,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \begin{Bmatrix} \sin(a\cos x) \\ \cos(a\cos x) \end{Bmatrix} \cos nx \,\mathrm{d}x = \tag{16}$$

$$= 2\pi \begin{Bmatrix} \sin(n\pi/2) \\ \cos(n\pi/2) \end{Bmatrix} J_n(a).$$

Разделив вещественную и мнимую части в (15), получаем

$$\begin{aligned} A = e^{is\theta}\cdot\Bigg\{ &\int_0^{2\pi} \cos(a\cos t)\cos(st)\cos^p(t+\theta)\,\mathrm{d}t + \\ &+\int_0^{2\pi} \sin(a\cos t)\sin(st)\cos^p(t+\theta)\,\mathrm{d}t + \\ &+i\int_0^{2\pi} \cos(a\cos t)\sin(st)\cos^p(t+\theta)\,\mathrm{d}t - \\ &-i\int_0^{2\pi} \sin(a\cos t)\cos(st)\cos^p(t+\theta)\,\mathrm{d}t \Bigg\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Амплитуда на горизонтальной оси – общие рассуждения

Сделаем ещё одно ограничение – рассмотрим амплитуду только на горизонтальной оси, то есть положим $\theta = 0°$ (это лишь половина оси, но при $\theta = 180°$ получатся такие же значения, умноженные на $e^{is\pi}(-1)^p$). Для понижения степени косинуса и преобразования произведений используем формулы (7–9). Из них и первой формулы (16) следует, что второе и третье слагаемые в (17) всегда дадут нуль (степень косинуса выражается только через косинусы, а произведение синуса и косинуса через синусы). Оставшиеся слагаемые объединяем в виде

$$A = \int_0^{2\pi} \exp(-ia\cos t)\cos(st)\cos^p t \,\mathrm{d}t.$$

и используем следующую из (16) формулу (18):

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ia\cos x}\cos nx\,\mathrm{d}x = 2\pi e^{-in\pi/2} J_n(a). \tag{18}$$

Далее приведём примеры вычисления величины A для небольших значений p, которые помогут уяснить структуру получаемых выражений в общем случае. Опуская промежуточные рассуждения, получаем следующий результат.

$$A(p) = \pi e^{-is\pi/2}\cdot\frac{i^p}{2^{p-1}}\cdot\sum_{q=0}^{p}(-1)^q C_p^q J_{s-p+2q}(a). \tag{19}$$

Вид этого выражения показывает, что общий чисто фазовый множитель можно вынести за интеграл по радиусу в (4) и во всех случаях либо действительная, либо мнимая часть амплитуды равна нулю. Также видно, что выражение под знаком суммы (именно оно используется для интегрирования по радиусу) есть линейная комбинация функций Бесселя с номерами от $(s-p)$ до $(s+p)$, идущими *через два*. На основе формул (4), (5) и (19) получим, опустив постоянные множители:

$$F_{p,0,s}(\rho,0)= \\ =\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r^{p+s+1}\left(\sum_{l=0}^p a_l J_{s-p+2l}\left(k\rho r/f\right)\right)\mathrm{d}r. \quad (20)$$

Представим показатель степени в виде $(p+s+2)-1$. Весьма существенно, что разность числа $p+s+2$ и номера функции Бесселя $2p+2-2l$ является <u>чётным</u> числом. Это позволяет использовать табличную формулу из [22] (Т. 2, с. 186):

$$\int_0^\infty x^{(\nu+2+2n)-1} e^{-px^2} J_\nu(cx)\,\mathrm{d}x= \\ =\frac{n!\cdot c^\nu}{2^{\nu+1}\cdot p^{n+\nu+1}}\exp\left(-\frac{c^2}{4p}\right)L_n^\nu\left(\frac{c^2}{4p}\right), \quad (21)$$

где $L_n^\lambda(x)=\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n+\lambda}{n-k}x^k$ – обобщённый многочлен Лагерра, а c в нашем случае равно $k\rho/f$.

Подставив (21) в (20), получаем следующее выражение для амплитуды:

$$F_{p,0,s}(\rho,0)=\exp\left(-\frac{k^2\rho^2\sigma^2}{2f^2}\right)\sigma^{2s+2}\times \\ \times\sum_{l=0}^p a_l\cdot(p-l)!\cdot 2^{p-l}\cdot\sigma^{2l}\cdot\left(\frac{k\rho}{f}\right)^{s-p+2l}\times \\ \times L_{p-l}^{s-p+2l}\left(\frac{k^2\rho^2\sigma^2}{2f^2}\right). \quad (22)$$

Здесь для наглядности не все множители вынесены за знак суммы. Получили следующую зависимость амплитуды от ρ: экспоненциальная функция $\exp(-\beta\rho^2)$, умноженная на *сумму многочленов* вида $\rho^{m2}L_{m1}^{m2}(\beta\rho^2)$. Именно здесь проявляется важность чётности упомянутой выше разности – иначе вместо (21) пришлось бы использовать другую табличную формулу, в которой правая часть содержит модифицированную функцию Бесселя $I_\nu()$ как минимум одного номера, что резко затруднило бы анализ результата.

<u>Амплитуда на горизонтальной оси – примеры и комментарии</u>

<u>Рассмотрим вначале случай $s\geq p$.</u> При этом все номера функций Бесселя в (20) различны и неотрицательны. Многочлен $\rho^{m2}L_{m1}^{m2}(\beta\rho^2)$ имеет степень $2m1+m2=p+s$, не зависящую от l, – все многочлены в сумме имеют одинаковую степень $p+s$. Поэтому суммой будет многочлен этой же степени. Уменьшения степени произойти не может, потому что знаки коэффициентов многочлена Лагерра и величин a_l в (20) распределены так, что при приведении подобных слагаемых отрицательные числа складываются с отрицательными, а положительные с положительными. Поэтому ни одна степень не сократится, и знаки коэффициентов будут как у многочлена Лагерра наибольшей степени. В итоге общая кратность корней равна $p+s$. Кратность нулевого корня в каждом слагаемом равна $m2$, а в итоговом многочлене – минимальному номеру функции Бесселя, то есть $s-p$, тогда степень многочлена, оставшегося после вынесения множителя ρ^{s-p}, равна $2p$, причём он содержит *только чётные* степени ρ. Последнее свойство обеспечивает симметричность корней относительно начала координат (отрицательное значение ρ соответствует второй половине оси: $\theta=180°$). Таким образом, можно сделать следующий вывод.

При $s=p$ имеется $2p$ ненулевых однократных корней, а при $s>p$ будет $2p+1$ корень: $2p$ ненулевых однократных корней и корень в нуле кратности $s-p$.

Для наглядного подтверждения сказанного приведём несколько примеров выражений для амплитуды поля на оси, найденных по формуле (22). При этом использован явный вид многочленов Лагерра:

$$L_0^\lambda(x)=1,\quad L_1^\lambda(x)=(1+\lambda)-x, \\ L_2^\lambda(x)=(1+\lambda)(2+\lambda)/2-(2+\lambda)x+x^2/2, \\ L_3^\lambda(x)=(1+\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)/6- \\ -(2+\lambda)(3+\lambda)x^2/2+x^3/6,$$

$$F_{0,0,s}(\rho,0)=\frac{\sigma^{2s+2}}{f^s}\exp\left(-y/2\right)(k\rho)^s\cdot 2, \\ F_{1,0,s}(\rho,0)=\frac{\sigma^{2s+2}}{f^{s-1}}\exp\left(-y/2\right)(k\rho)^{s-1}\cdot 2\cdot\left(s-y\right), \\ F_{2,0,s}(\rho,0)=\frac{\sigma^{2s+2}}{f^{s-2}}\exp\left(-y/2\right)(k\rho)^{s-2}\cdot(-2)\times \\ \times\left(s(s-1)-(2s+1)y+y^2\right), \\ F_{3,0,s}(\rho,0)=\frac{\sigma^{2s+2}}{f^{s-3}}\exp\left(-y/2\right)(k\rho)^{s-3}\times \\ \times\left(-2s(s-1)(s-2)+6s(s+1)y- \\ -3(5s/2+2)y^2+2y^3\right). \quad (23)$$

Здесь обозначено $y=(k^2\sigma^2\rho^2)/f^2$.

Из формул (19) также следует, что если взять не одно слагаемое x^p, а многочлен, имеющий степени *разной чётности* (в простейшем виде $1\pm x$), то амплитуда (с точностью до меры нуль) не будет иметь нулей кроме $\rho=0$. Причина в том, что степени разной чётности дадут вещественную и мнимую часть результата, поэтому ответ нельзя будет свести к одному многочлену.

<u>Пусть теперь $s<p$.</u> В этом случае несколько номеров функции Бесселя в (19) станут отрицательными. Хотя переход к положительному номеру тривиален, отсутствие некоторых номеров приведёт к изменению степени многочлена. После перехода к положительным номерам из-за того, что номера идут *через два*, наименьший номер будет или 0 (при p и s <u>одинаковой</u> чётности), или 1 (при p и s <u>разной</u> чётности), при этом

новых положительных номеров не появится. Поэтому общая степень по-прежнему будет $p+s$, а в нуле не будет корня при одинаковой чётности p и s (сравните с условием (12)) либо будет *однократный* корень при разной чётности.

При $s \le p$ <u>все корни</u> являются однократными, поэтому их «визуальное» количество увеличивается на единицу при увеличении на единицу числа s, при этом корень в нуле попеременно появляется и исчезает.

Как и для случая $s \ge p$, приведём несколько примеров выражений для амплитуды поля.

$$\begin{aligned}
&F_{1,0,0}(\rho,0)=\frac{\sigma^4}{f}\exp\left(\frac{-y}{2}\right)(k\rho)\cdot(-2),\\
&F_{2,0,0}(\rho,0)=\sigma^4\exp\left(\frac{-y}{2}\right)\cdot 2\cdot(1-y),\\
&F_{2,0,1}(\rho,0)=\frac{\sigma^6}{f}\exp\left(\frac{-y}{2}\right)(k\rho)\cdot 2\cdot(3-y),\\
&F_{3,0,0}(\rho,0)=-F_{2,0,1}(\rho,0),\\
&F_{3,0,1}(\rho,0)=\sigma^6\exp\left(\frac{-y}{2}\right)\cdot 2\cdot\left(3-6y+y^2\right),\\
&F_{3,0,2}(\rho,0)=\frac{\sigma^8}{f}\exp\left(\frac{-y}{2}\right)(k\rho)\cdot 2\times\\
&\qquad\times\left(12-9y+y^2\right).
\end{aligned} \tag{24}$$

<u>Амплитуда на всей плоскости – примеры и комментарии</u>

Рассмотрим теперь для некоторых простейших случаев вычисление поля на всей фокальной плоскости, используя формулу (17) для произвольного угла θ. В силу громоздкости ограничимся простейшими случаями, хотя за счёт формул косинуса/синуса суммы процесс решения сводится к случаю нулевого угла.

<u>Пусть $x^p = x$ $(p=1)$.</u> Аналогично выводу формул (19) после ряда преобразований имеем

$$\begin{aligned}
&A(p=1)=\\
&=e^{is\theta}\pi e^{-is\pi/2}\cdot i\cdot\left[J_{s-1}(a)\cdot e^{-i\theta}-J_{s+1}(a)\cdot e^{+i\theta}\right].
\end{aligned} \tag{25}$$

При $\theta=0°$ (25) совпадает со второй формулой (19). После интегрирования по радиусу получим значение амплитуды:

$$\begin{aligned}
&F_{1,0,s}(\rho,\theta)=e^{is\theta}\pi e^{-is\pi/2}\cdot i\cdot\frac{\sigma^{2s+2}}{f^{s-1}}\exp\left(-y/2\right)\times\\
&\times(k\rho)^{s-1}\cdot 2\cdot\left(se^{-i\theta}-y\cos\theta\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

При $\theta=0°$ (26) совпадает со второй формулой (23) с точностью до множителей, опущенных в (23). В (26) предполагается, что $s \ge 1$. При $s=0$ имеется отдельная формула

$$F_{1,0,0}(\rho,\theta)=-2\pi i\cos\theta\cdot\frac{\sigma^4}{f}\exp\left(\frac{-y}{2}\right)(k\rho)\,. \tag{27}$$

Сравнение (27) и (24) показывает, что зависимость от угла сказывается только в масштабном множителе $\cos\theta$; при $\theta=90°$ амплитуда равна нулю при любом радиусе ρ: вертикальная ось всегда чёрная. Если бы не Гауссов множитель, то линия уровня интенсивности была бы кривая $\rho_l \sim \cos^2\theta$, похожая на восьмёрку.

Теперь сравним (26) и (23). В начале координат нуль одинаковой кратности, что очевидно – в начале координат нет угла поворота. Перепишем множитель в скобках, разделив действительную и мнимую части.

$$(s-y)\cos\theta - is\sin\theta\,. \tag{28}$$

Так как $s \ge 1$, мнимая часть равна нулю только при $\theta=0°$, то есть все нули уже найдены и лежат на горизонтальной оси. Результаты моделирования показывают, что это свойство сохраняется и для $p>1$.

Рассмотрим случай $p=2$ (пусть только для $s\ge 2$). При $p=2$ вместо (25) имеем

$$\begin{aligned}
&A(p=2)=e^{is\theta}\pi e^{-is\pi/2}\times\\
&\times\left[-\frac{1}{2}J_{s-2}(a)\cdot e^{-i2\theta}+J_s(a)-\frac{1}{2}J_{s+2}(a)\cdot e^{+i2\theta}\right].
\end{aligned} \tag{29}$$

При $\theta=0°$ (29) совпадает с третьей формулой (19). Наблюдение результатов при $p=1$ и $p=2$ подсказывает, что подобная структура будет и для произвольного показателя. После интегрирования по радиусу получим значение амплитуды:

$$\begin{aligned}
&F_{2,0,s}(\rho,\theta)=\\
&=e^{is\theta}\pi e^{-is\pi/2}\cdot\frac{\sigma^{2s+2}}{f^{s-2}}\exp\left(-y/2\right)(k\rho)^{s-2}\cdot(-2)\times\\
&\times\left[s(s-1)e^{-i2\theta}-\left(s(1+e^{-i2\theta})+1\right)y+\frac{1+\cos 2\theta}{2}y^2\right].
\end{aligned} \tag{30}$$

При $\theta=0°$ (30) совпадает с третьей формулой (23). В начале координат нуль одинаковой кратности $s-2$. Для анализа множителя в квадратных скобках разделим действительную и мнимую части.

$$\begin{aligned}
&\Big[s(s-1)\cos 2\theta-\left(s+1+s\cos 2\theta\right)y+\\
&+\frac{1+\cos 2\theta}{2}y^2\Big]+is(y-s+1)\sin 2\theta.
\end{aligned} \tag{31}$$

В отличие от $p=1$, здесь мнимая часть равна нулю не только при $\theta=0°$, но и при $\theta=90°$ и при $y=s-1$. Первый случай соответствует уже рассмотренной горизонтальной оси. Если $\theta=90°$ (вертикальная ось), то действительная часть равна нулю при $y=-s(s-1)$, этот корень не имеет физического смысла, так как отрицателен ($y \sim \rho^2$). Если взять $y=s-1$, то действительная часть равна нулю при угле, определяемом равенством $\cos 2\theta=(s+3)/(s-1)$. Дробь больше единицы, поэтому равенство невозможно. Получаем, что все корни лежат на горизонтальной оси. Результаты моделирования это подтверждают, хотя и косвенно: при моделировании использовался не одночлен x^2, а многочлен Эрмита $H_2(x)$, который кроме квадрата имеет и член нулевой степени. Формула (30) верна для $s\ge 2$, значения $s=0$ и $s=1$ рассматриваются отдельно.

Наконец, рассмотрим первый *истинно двумерный* случай, когда на входе одночлен xy, для которого

$p=1$, $q=1$. Интегрирование по углу приводит в выражению, похожему на получаемое для x^2.

$$A(p=1,q=1)=e^{is\theta}\frac{\pi}{2}e^{-is\pi/2}\cdot(-1)i\times \times\left[J_{s-2}(a)\cdot e^{-i2\theta}-J_{s+2}(a)\cdot e^{+i2\theta}\right]. \quad (32)$$

Оно отличается от (29) отсутствием слагаемого с $J_s(a)$. Амплитуда поля равна:

$$F_{1,1,s}(\rho,\theta)=e^{is\theta}\frac{\pi}{2}e^{-is\pi/2}\cdot(-1)i\times \times\frac{\sigma^{2s+2}}{f^{s-2}}\exp(-y/2)(k\rho)^{s-2}\cdot 2\times \times\left[2s(s-1)e^{-i2\theta}-2se^{-i2\theta}y-i\sin 2\theta\cdot y^2\right]. \quad (33)$$

В начале координат имеем корень кратности $s-2$, для поиска остальных корней разделим действительную и мнимую части выражения в квадратных скобках.

$$2s(s-1-y)\cos 2\theta- -i\sin 2\theta\left[2s(s-1)-2sy+y^2\right]. \quad (34)$$

Мнимая часть равна нулю при $\theta=0°$ и $\theta=90°$ (квадратная скобка при $s\geq 2$ неотрицательна). В обоих случаях действительная часть равна нулю при $y=s-1$. Если $\theta=45°(135°)$, действительная часть равна нулю, но мнимая не равна нулю, кроме $s=2$, когда имеется корень $y=2$. Таким образом, с учётом симметрии, имеется по два корня на горизонтальной и вертикальной осях, расположенных в вершинах квадрата. При $s=2$ добавляются 4 корня на диагоналях, также образующие квадрат. Корень $y=2$ является двукратным, поэтому вокруг соответствующего нуля амплитуды не будет полного оборота фазы.

Для полноты приведём выражения для амплитуды при $s=0$ и $s=1$.

$$A=-\pi\sin 2\theta\cdot J_2(a), \quad F_{1,1,0}(\rho,\theta)=-\pi\sin 2\theta\cdot\frac{\sigma^6}{f^2}\exp\left(\frac{-y}{2}\right)(k\rho)^2. \quad (35)$$

То есть при $s=0$ имеется нуль *второго* порядка в начале координат, также нулевая амплитуда будет на горизонтальной и вертикальной осях *целиком*. Без Гауссова множителя линия уровня интенсивности – кривая $\rho_l\sim\sin^2 2\theta$, имеющая 4 лепестка.

$$A=e^{i\theta}\frac{\pi}{2}\cdot\left(J_1(a)e^{-i2\theta}+J_3(a)e^{+i2\theta}\right), \quad F_{1,1,1}(\rho,\theta)=e^{i\theta}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sigma^6}{f}\exp\left(\frac{-y}{2}\right)(k\rho)\times \times 2\left[2e^{-i2\theta}+iy\sin 2\theta\right]. \quad (36)$$

При $s=1$ в начале координат имеется нуль *первого* порядка. Квадратная скобка равна величине

$$2\cos 2\theta+i(y-2)\sin 2\theta. \quad (37)$$

Отсюда получаем, что есть корень при $\theta=45°(135°)$ и $y=2$. Таким образом так же, как в случае $s>2$, имеется четыре нуля в вершинах квадрата, но не на горизонтали и вертикали, а на диагоналях.

Также приведём примеры другой ситуации, когда p и q произвольны, но из соображений экспериментальной реализуемости [18] фиксировано $s=1$. Так как для ситуаций $s\geq p$ и $s<p$ выражения отличаются, подставить $s=1$ в формулы, приведённые выше, не всегда возможно.

Для общности приведём пример с постоянной амплитудой ($p=0$).

$$F_{0,0,1}(\rho,\theta)=(-2\pi i)\cdot e^{i\theta}\frac{\sigma^4}{f}(k\rho)\exp\left(\frac{-y}{2}\right). \quad (38)$$

Для $p=1$ результат получаем, подставив $s=1$ в (26):

$$F_{1,0,1}(\rho,\theta)= =\pi e^{i\theta}\cdot\sigma^4\cdot\exp(-y/2)\cdot 2\cdot\left(e^{-i\theta}-y\cos\theta\right). \quad (39)$$

Для $p>1$ результат получается независимо от найденного выше и выражается формулами:

$$F_{2,0,1}(\rho,\theta)=-\pi ie^{i\theta}\cdot\frac{\sigma^6}{f}\cdot(k\rho)\exp\left(\frac{-y}{2}\right)\times \times\left(4+2e^{-i2\theta}-y(1+\cos 2\theta)\right). \quad (40)$$

$$F_{3,0,1}(\rho,\theta)=\frac{1}{4}\pi e^{i\theta}\cdot\sigma^6\exp(-y/2)\times \times\left(24e^{-i\theta}-6y(6\cos\theta+e^{-i\theta}+e^{-i3\theta})+ +y^2(6\cos\theta+2\cos 3\theta)\right). \quad (41)$$

$$F_{4,0,1}(\rho,\theta)=-\frac{1}{8}\pi ie^{i\theta}\cdot\frac{\sigma^8}{f}\cdot(k\rho)\exp\left(\frac{-y}{2}\right)\times \times\left((96+64e^{-i2\theta})-8y\left(9+8\cos 2\theta+2e^{-i2\theta}+ +e^{-i4\theta}\right)+2y^2(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\right). \quad (42)$$

Можно доказать (аналогично предыдущим примерам), что амплитуда имеет $p+1$ однократных нулей, которые лежат на горизонтальной оси и расположены симметрично относительно начала координат, в том числе при чётном p имеется нуль в начале координат.

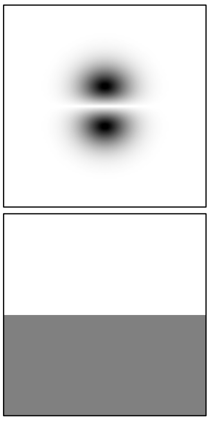
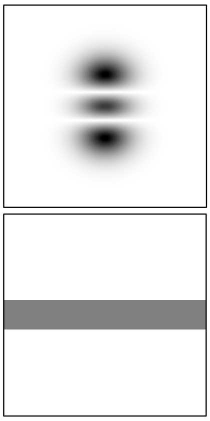
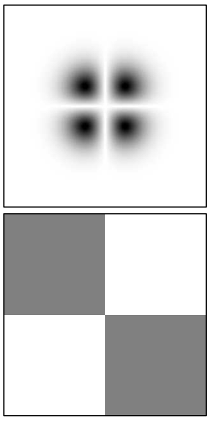
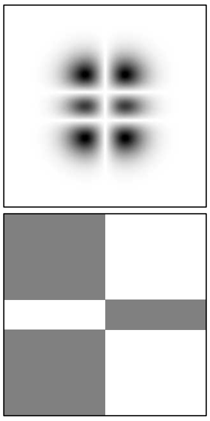
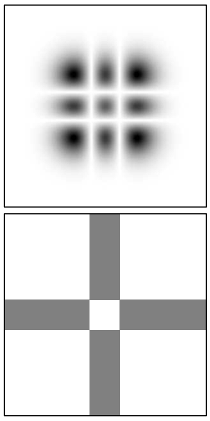
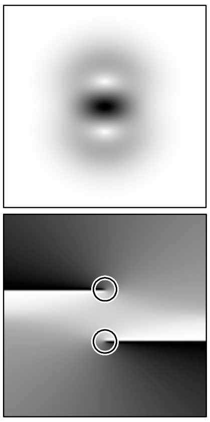
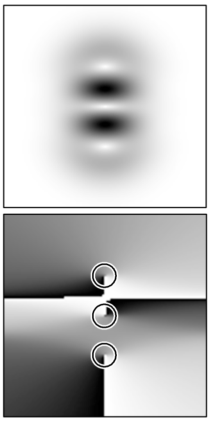
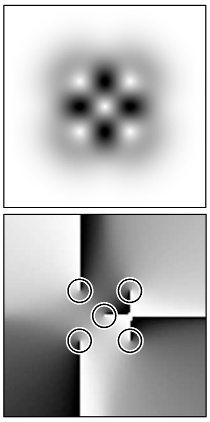
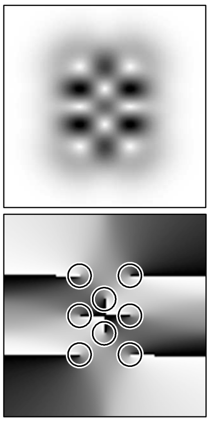
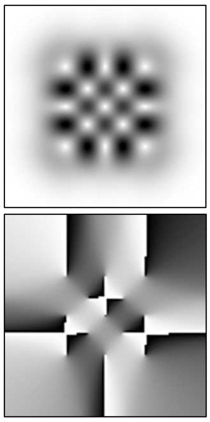
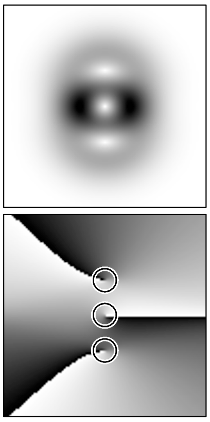
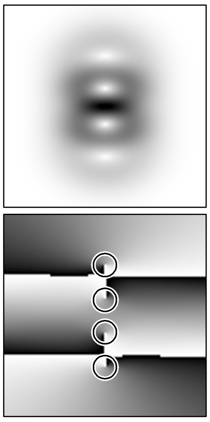
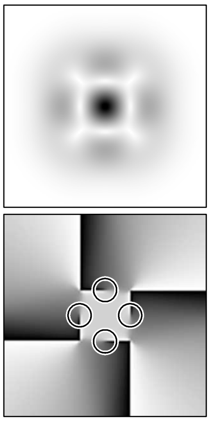
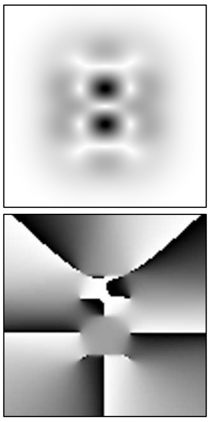
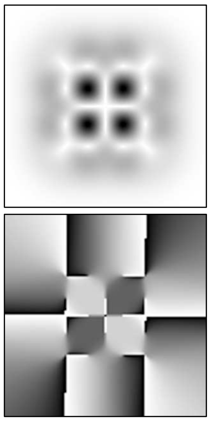
2. Численное моделирование

В этом параграфе приведены результаты моделирования для пучков, заданных выражением (1). В табл. 1 показаны распределения в фокальной плоскости для различных значений n, m и s.

В первой строке табл. 1 приведены распределения для Фурье-образов обычных мод Эрмита–Гаусса ($s=0$). В этом случае распределения подобны исходным функциям и имеют бинарную фазу. Здесь действует формула (14а) (с заменой p и q на n и m соответственно), а именно: значение в центре равно нулю, когда хотя бы один индекс является нечётным.

Во второй строке табл. 1 приведены распределения пространственно-спектральной картины для мод Эрмита–Гаусса с внедрённым оптическим вихрем первого порядка ($s=1$). В этом случае вместо сингулярных линий (линейных скачков фазы на π радиан) формируются наборы изолированных оптических вихрей первого порядка.

Табл. 1. Распределения в фокальной плоскости для различных значений n, m и s (показаны амплитуды и фазы) (негативные изображения)

	$n=0,\ m=1$	$n=0,\ m=2$	$n=1,\ m=1$	$n=1,\ m=2$	$n=2,\ m=2$
$s=0$					
$s=1$					
$s=2$					

Число этих вихрей можно определить по формуле:

$$N_{s=1}=(n+1)(m+1)+nm\ . \qquad (43)$$

Определить, будет ли в центре фокуса нуль интенсивности, можно по формуле (14).

В третьей строке табл. 1 приведены фокальные картины для мод Эрмита–Гаусса с внедрённым оптическим вихрем второго порядка ($s=2$). Как видно, в этом случае имеет место проявление различия между достаточным условием и необходимым для $n=2$, $m=2$, $s=2$. Причём это различие проявляется дважды. Во-первых, слагаемое с наибольшей степенью x^2y^2 даёт нуль, хотя $n+m+s=6$ – чётное число, что показано в примере выше. Во-вторых, здесь имеет место ситуация, когда не все слагаемые многочлена дадут нуль. Более точно, интегралы (6) имеют следующие значения (других слагаемых нет):

$$E(p=0,\ q=0,\ s=2)=0;\ E(p=2,\ q=0,\ s=2)=\pi/2;$$

$$E(p=0,\ q=2,\ s=2)=-\pi/2;\ E(p=2,\ q=2,\ s=2)=0.$$

Многочлен Эрмита индекса 2 равен $H_2(z)=4z^2-2$, а их произведение в (1) равно $16x^2y^2-8x^2-8y^2+4$. При интегрировании в (5) первое и последнее слагаемые дадут нуль, а второе и третье сократятся: степени радиуса равны, а интегралы по углу (6) имеют противоположные значения. В результате сумма окажется равной нулю, что мы и видим на рисунке.

Таким образом, теоретические рассуждения, приведённые в параграфе 1, полностью согласуются с результатами расчёта.

Заключение

В данной работе рассмотрены моды Эрмита–Гаусса с внедрённой в них вихревой фазой. В отличие от осесимметричных распределений вихревая фаза (и нулевое значение интенсивности на оптической оси) для таких пучков не сохраняется при распространении или при прохождении через сферическую линзу.

Выполнен теоретический и численный анализ преобразования Фурье для мод Эрмита–Гаусса с внедрённой вихревой фазой. Получено условие (с учётом исключений), при котором в центре фокальной плоскости будет иметь место нулевое значение интенсивности. Численный расчёт подтверждает теоретический анализ.

На основе моделирования показано, что для мод Эрмита–Гаусса с внедрённым оптическим вихрем первого порядка в фокальной плоскости вместо сингулярных линий (линейных скачков фазы на π радиан) формируются наборы изолированных оптических вихрей первого порядка. Получена формула, позволяющая оценить число этих вихрей.

Благодарность

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) № 16-07-00825.

Литература

1. **Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // Proceedings of the Royal Society A. – 1974. – Vol. 336. – P. 165-190. - DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
2. **Coullet, P.** Optical vortices / P. Coullet, G. Gil, F. Rocca // Optics Communications. – 1989. – Vol. 73. – P. 403-408. – DOI: 10.1016/0030-4018(89)90180-6.
3. **Баженов, В.Ю.** Лазерные пучки с винтовыми дислокациями волнового фронта / В.Ю. Баженов, М.В. Васнецов, М.С. Соскин // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Том 52, Вып. 8. – P. 1037-1039.
4. **Khonina, S.N.** The rotor phase filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, M.V. Shinkarev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev // Journal of Modern Optics. – 1992. – Vol. 39, Issue 5. – P. 1147-1154. - DOI: 10.1080/09500349214551151.
5. **Soskin, M.S.** Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov. – In book: Progress in Optics / E. Wolf, ed. – Chapter 4. – Amsterdam, North Holland: Elsevier Science, 2001. – P. 219-276. – ISBN: 978-0-444509086.
6. Structured light and its applications: An introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces / ed. by D.L. Andrews. – Burlington, San Diego, London: Elsevier Inc., 2008. – 373 p. – ISBN: 978-0-12-374027-4.
7. **Котляр, В.В.** Вращение световых многомодовых пучков Гаусса-Лагерра в свободном пространстве / В.В. Котляр, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 23, Вып. 17. – С. 1-6.
8. **Khonina, S.N.** Bessel-mode formers / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // Proceedings of SPIE. – 1995. – Vol. 2363. – P. 184-190. - DOI: 10.1117/12.199633.
9. **Arlt, J.** Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon / J. Arlt, K. Dholakia // Optics Communications. – 2000. – Vol. 177, Issues 1-6. – P. 297-301. – DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00572-1.
10. **Kotlyar, V.V.** Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, Issue 7. – P. 742-744. – DOI: 10.1364/OL.32.000742.
11. **Khonina, S.N.** Diffractive optical element matched with Zernike basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, Ya. Wang // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2001. – Vol. 11, Issue 2. – P. 442-445.
12. **Abramochkin, E.G.** Beam transformation and nontransformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83, Issues 1-2. – P. 123-135. - DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
13. **Beijersbergen, M.W.** Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum / M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E. Van der Veen, J.P. Woerdman // Optics Communications. – 1993. – Vol. 96, Issues 1-3. – P. 123-132. – DOI: 10.1016/0030-4018(93)90535-D.
14. **Mazilu, M.** Accelerating vortices in Airy beams / M. Mazilu, J. Baumgartl, T. Cizmar, K. Dholakia // Proceedings of SPIE. – 2009. – Vol. 7430. – 74300C. – DOI: 10.1117/12.826372.
15. **Dai, H.T.** Propagation dynamics of an optical vortex imposed on an Airy beam / H.T. Dai, Y.J. Liu, D. Luo, X.W. Sun // Optics Letters. – 2010. – Vol. 35, Issue 23. – P. 4075-4077. – DOI: 10.1364/OL.35.004075.
16. **Chen, R.-P.** Dynamic control of collapse in a vortex Airy beam / R.-P. Chen, K.-H. Chew, S. He // Scientific Reports. – 2013. – Vol. 3. – P. 1406. – DOI: 10.1038/srep01406.
17. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite–Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40, Issue 5. – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.
18. **Porfirev, A.P.** Simple method for efficient reconfigurable optical vortex beam splitting / A.P. Porfirev, S.N. Khonina // Optics Express. – 2017. – Vol. 25, Issue 16. – P. 18722-18735. - DOI: 10.1364/OE.25.018722.
19. **Hacyan, S.** Evolution of optical phase and polarization vortices in birefringent media / S. Hacyan, R. Jáuregui // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11, Issue 8. – 085204. – DOI: 10.1088/1464-4258/11/8/085204.
20. **Khonina, S.N.** Astigmatic transformation of Bessel beams in a uniaxial crystal / S.N. Khonina, V.D. Paranin, A.V. Ustinov, A.P. Krasnov // Optica Applicata. – 2016. – Vol. XLVI, No. 1. – P. 5-18. – DOI: 10.5277/oa160101.
21. **Kotlyar, V.V.** Elliptic Laguerre-Gaussian beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Almazov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // Journal of the Optical Society of America A. – 2006. – Vol. 23, Issue 1. – P. 43-56. – DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
22. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды: в 2 т. Т. 2. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 748 с.

Сведения об авторе

Устинов Андрей Владимирович, 1968 года рождения, в 1991 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук (2016 год), работает научным сотрудником в ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН; Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ моделирования работы оптических элементов; обработка изображений, в частности, гидродинамических процессов и биомедицинских изображений. E-mail: *andr@smr.ru* .

ГРНТИ: 29.31.15.
Поступила в редакцию 11 августа 2017 г. Окончательный вариант – 2 октября 2017 г.

AN ANALYSIS OF THE SPATIAL SPECTRUM OF HERMITE-GAUSS BEAMS WITH EMBEDDED OPTICAL VORTEX

A.V. Ustinov [1]
[1]*Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Samara, Russia*

Abstract

This work deals with a detailed theoretical study of Hermite-Gauss beams with embedded vortical phase passing through a lens. Special attention is given to the location of vortical phase singularities in the focal plane. Sufficient conditions for the intensity null in the focal plane centre are found. The theoretical analysis is confirmed by numerical calculations.

Keywords: Hermite-Gauss beam; phase singularity; trigonometric transforms.

Citation: Ustinov AV. An analysis of the spatial spectrum of Hermite-Gauss beams with embedded optical vortex. Computer Optics 2017; 41(5): 617-625. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-617-625.

Acknowledgments: The work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (RFBR), grant No. 16-07-00825.

References

[1] Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. Proc R Soc Lond A 1974; 336: 165-190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
[2] Coullet P, Gil G, Rocca F. Optical vortices. Opt Commun 1989; 73: 403-408. DOI: 10.1016/0030-4018(89)90180-6.
[3] Bazhenov VY, Vasnetsov MV, Soskin MS. Laser-beam with screw dislocations in the wavefront. JETP Lett 1990; 52(8): 429-431.
[4] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkarev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The rotor phase filter. J Mod Opt 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
[5] Soskin MS, Vasnetsov MV. Singular optics. In book: Wolf E, ed. Progress in Optics. Chapter 4. Amsterdam, North Holland: Elsevier Science; 2001: 219-276. ISBN: 978-0-444509086.
[6] Andrews DL, ed. Structured light and its applications: An introduction to phase-structured beams and nanoscale optical forces. Burlington, San Diego, London: Elsevier Inc.; 2008. ISBN: 978-0-12-374027-4.
[7] Kotlyar VV, Soifer VA, Khonina SN. Rotation of Gauss-Laguerre multimodal light beams in free space. Tech Phys Lett 1997; 23(9): 657-658.
[8] Khonina SN, Kotlyar VV. Bessel-mode formers. Proc SPIE 1994; 2363: 184-190. DOI: 10.1117/12.199633.
[9] Arlt J, Dholakia K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon. Opt Commun 2000; 177(1-6): 297-301. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00572-1.
[10] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. Opt Lett 2007; 32(7): 742-744. DOI: 10.1364/OL.32.000742.
[11] Khonina SN, Kotlyar VV, Wang Ya. Diffractive optical element matched with Zernike basis. Pattern Recognition and Image Analysis 2001; 11(2): 442-445.
[12] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Beam transformation and nontransformed beams. Opt Commun 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
[13] Beijersbergen MW, Allen L, Van der Veen HE, Woerdman JP. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum. Opt Commun 1993; 96: 123-132. DOI: 10.1016/0030-4018(93)90535-D.
[14] Mazilu M, Baumgartl J, Cizmar T, Dholakia K. Accelerating vortices in Airy beams. Proceedings of SPIE 2009; 7430: 74300C. DOI: 10.1117/12.826372.
[15] Dai HT, Liu YJ, Luo D, Sun XW. Propagation dynamics of an optical vortex imposed on an Airy beam. Opt Lett 2010; 35(23): 4075-4077. DOI: 10.1364/OL.35.004075.
[16] Chen R-P, Chew K-H, He S. Dynamic control of collapse in a vortex Airy beam. Scientific Reports 2013; 3: 1406. DOI: 10.1038/srep01406.
[17] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite–Gaussian laser beams. Opt Lett 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
[18] Porfirev AP, Khonina SN. Simple method for efficient reconfigurable optical vortex beam splitting. Opt Express 2017; 25(16): 18722-18735. DOI: 10.1364/OE.25.018722.
[19] Hacyan S, Jáuregui R. Evolution of optical phase and polarization vortices in birefringent media. J Opt A: Pure Appl Opt 2009; 11(8): 085204. DOI: 10.1088/1464-4258/11/8/085204.
[20] Khonina SN, Paranin VD, Ustinov AV, Krasnov AP. Astigmatic transformation of Bessel beams in a uniaxial crystal. Optica Applicata 2016; XLVI(1): 5-18. DOI: 10.5277/oa160101.
[21] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptic Laguerre-Gaussian beams, J Opt Soc Am A 2006; 23: 43-56. DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
[22] Prudnikov AP, Brychkov YuA, Marichev OI. Integrals and Series: Vol. 1: Elementary Functions; Vol. 2: Special Functions. New York: CRC Press; 1986.

Author's information

Andrey Vladimirovich Ustinov, (b. 1968) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty "Applied Mathematics" in 1991. Candidate of Physical and Mathematical Sciences (2016), works as the researcher in the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: diffractive optics; software design for modeling of optical elements operating; images processing, particularly images of hydrodynamic processes and biomedical images. E-mail: andr@smr.ru .

Received August 11, 2017. The final version – October 2, 2017.