

## Астигматическое преобразование набора краевых дислокаций, внедренных в Гауссов пучок

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, А.Г. Налимов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Теоретически показано, как Гауссов пучок с конечным числом параллельных линий нулей интенсивности (краевых дислокаций) с помощью цилиндрической линзы преобразуется в вихревой пучок, имеющий орбитальный угловой момент и топологический заряд. Причем в начальной плоскости у такого пучка уже есть орбитальный угловой момент, но нет топологического заряда, который появляется только при распространении в свободном пространстве. На примере двух параллельных линий нулей интенсивности, симметрично расположенных относительно центра, показана динамика формирования двух нулей интенсивности на двойном фокусном расстоянии: при увеличении расстояния между вертикальными линиями нулей интенсивности два оптических вихря формируются сначала на горизонтальной оси, потом сходятся в центр, а затем расходятся, но уже по вертикальной оси. Топологический заряд такого оптического вихря при любом расстоянии между линиями нулей равен  $-2$ . Причем на любом расстоянии по оптической оси, кроме начальной плоскости. При изменении расстояния между линиями нулей интенсивности меняется орбитальный угловой момент пучка. Он может быть отрицательным, положительным и при определенном расстоянии между линиями нулей интенсивности орбитальный угловой момент может быть равен нулю. Показано также, что в случае неограниченного числа линий нулевой интенсивности формируется пучок с конечным орбитальным угловым моментом и с бесконечным топологическим зарядом.

**Ключевые слова:** орбитальный угловой момент, топологический заряд, нули интенсивности, оптический вихрь.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Астигматическое преобразование набора краевых дислокаций, внедренных в Гауссов пучок / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 2. – С. 190-199. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-849.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Astigmatic transformation of a set of edge dislocations embedded in a Gaussian beam. Computer Optics 2021; 45(2): 190-199. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-849.

### Введение

Оптические вихри интенсивно исследуются в настоящее время [1]. Формировать лазерные оптические вихри можно множеством разных способов. Вот только некоторые из них: цифровая голограмма с несущей частотой [2, 3], амплитудная дифракционная решетка с вилочкой [4], модовый конвертор [5], спиральная фазовая пластинка [6, 7], спиральный акси-кон [8, 9], q-пластинка [10], интерферометр [11], модулятор света [12], компоненты фотоники с метаповерхностью [13], микролазер [14] и простой делитель пучка [15]. Мы остановимся на наиболее простых способах.

В замечательной работе Абрамочкина и Волостникова [5] показано, как с помощью астигматического конвертора безвихревой пучок Эрмита–Гаусса (ЭГ) преобразуется в вихревой пучок Лагерра–Гаусса (ЛГ). В этой работе пучок Эрмита–Гаусса ( $n, m$ ) преобразуется в моду Лагерра–Гаусса ( $n, m - n$ ) всего с

помощью одной цилиндрической линзы. Интересно то, что прямые линии нулевой интенсивности, присутствующие в распределении интенсивности пучка ЭГ в начальной плоскости, после цилиндрической линзы, распространяясь в свободном пространстве, преобразуются и формируют на оптической оси один изолированный ноль интенсивности, вокруг которого формируется оптический вихрь ЛГ. Таким образом, в [5] показан пример, когда в начальной плоскости и на некотором расстоянии вдоль оптической оси у пучка нет изолированного нуля интенсивности, нет оптического вихря и нет топологического заряда (ТЗ). Но, начиная с некоторой плоскости, в распределении интенсивности этого пучка формируется ноль интенсивности, вокруг которого образуется оптический вихрь, и ТЗ становится отличным от нуля целым числом. То есть этот пример показывает, что ТЗ, в отличие от орбитального углового момента (ОУМ), не сохраняется при распространении парааксиального светового пучка.

Известны также работы, в которых оптические вихри формируются с помощью малых отверстий в непрозрачном экране, совокупность которых образует кривую линию в виде спирали Архимеда [16, 17] или спирали Ферма [18, 19]. Но теоретический анализ таких структур затруднителен. В [20–23] исследуется взаимодействие оптического вихря и краевой дислокации (линии нулевой интенсивности), внедренных в Гауссов пучок. В этих работах показано, что это взаимодействие приводит к расщеплению краевой дислокации и формированию дополнительных оптических вихрей. Эти интересные работы заслуживают более глубокого изучения, но в [20–23] не используется астигматическое преобразование с помощью цилиндрической линзы.

В данной работе мы детально проследим на простом примере, при каком условии прямые линии нулей интенсивности (краевые дислокации) в начальной плоскости после астигматического преобразования с помощью цилиндрической линзы, расположенной под углом 45 градусов к декартовым осям, формируют изолированный ноль интенсивности и оптический вихрь с целым ТЗ.

### 1. Комплексная амплитуда на двойном фокусном расстоянии

Рассмотрим две вертикальные линии нулей интенсивности (две краевые дислокации), внедренные в перетяжку Гауссова пучка с астигматической фазой. То есть в плоскости перетяжки Гауссова пучка с двумя смещенными краевыми дислокациями расположена идеальная тонкая цилиндрическая линза, образующая которой повернута в плоскости перетяжки на 45 градусов. Комплексная амплитуда такого светового поля в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = \frac{(x^2 - a^2)}{w^2} \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f}(x + y)^2\right), \quad (1)$$

где  $k$  – волновое число света,  $w$  – радиус перетяжки Гауссова пучка,  $(x, y)$  – поперечные декартовы координаты и  $z$  – продольная координата вдоль оптической оси,  $f$  – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Две вертикальные линии нулей интенсивности в (1) находятся на расстояниях  $+a$  и  $-a$  от вертикальной оси  $y$ . Второе слагаемое в показателе экспоненты в (1) описывает распределение фазы цилиндрической линзы с параболическим профилем, расположенной под углом 45 градусов к осям  $x$  и  $y$ .

Наша цель – определить, при каком условии на оптической оси сформируется оптический вихрь с ТЗ = –2. Уверенность в том, что пучок (1) должен при определенных условиях сформировать пучок ЛГ с номером (0,2), основана на результатах работы [5] и на том, что первый сомножитель в (1) при определен-

ном значении  $a$  является многочленом Эрмита  $H_2(x) = x^2 - 1$  с аргументом вида  $\sqrt{2}x/w$ .

Амплитуда светового поля (1) на расстоянии  $z = 2f$ , полученная с помощью преобразования Френеля, будет иметь вид:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \left(\frac{-i\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right) \times \left[\frac{1}{2(1+\gamma^2)} - \left(\frac{a}{w}\right)^2 - \frac{\gamma^2(\xi - i\eta)^2}{w^2(1+\gamma^2)^2}\right] \times \exp\left(-\frac{\gamma^2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2(1+\gamma^2)} + \frac{i\gamma}{w^2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{2i\gamma^3\xi\eta}{w^2(1+\gamma^2)}\right), \quad (2)$$

где  $\gamma = z_0/(2f)$ ,  $z_0 = kw^2/2$ . В (2)  $z_0$  – длина Рэлея. Из (2) следует, что у Гауссова пучка на двойном фокусном расстоянии изменился радиус перетяжки  $w(z = 2f) = w\gamma^{-1}\sqrt{1+\gamma^2}$  и появилась астигматическая фаза. Амплитуда Гауссова пучка в (2) умножается на функцию  $F(\xi, \eta)$  вида:

$$F(\xi, \eta) = A - B\xi^2 + C\eta^2 + iD\xi\eta,$$

где

$$A = \frac{1}{2(1+\gamma^2)} - \left(\frac{a}{w}\right)^2, \quad B = \frac{\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 w^2}, \quad (3)$$

$$C = \frac{\gamma^4}{(1+\gamma^2)^2 w^2}, \quad D = \frac{2\gamma^3}{(1+\gamma^2)^2 w^2}.$$

Интенсивность пучка (2) будет иметь по два изолированных нуля, лежащих на вертикальной оси  $\eta$ , если  $A < 0$ , или лежащих на горизонтальной оси  $\xi$ , если  $A > 0$ . И только при  $A = 0$  у пучка (2) будет один изолированный ноль на оптической оси ( $\eta = \xi = 0$ ). Координаты пар нулей интенсивности для пучка (2) можно найти из (3):

$$1) A < 0, \quad \xi = 0, \quad \eta = \pm\eta_0 = \pm\left[(1+\gamma^2)(2a^2(1+\gamma^2) - w^2)\right]^{1/2} (\sqrt{2}\gamma^2)^{-1};$$

$$2) A > 0, \quad \eta = 0, \quad \xi = \pm\xi_0 = \pm\left[(1+\gamma^2)(w^2 - 2a^2(1+\gamma^2))\right]^{1/2} (\sqrt{2}\gamma)^{-1};$$

$$3) A = 0, \quad \xi = \eta = 0.$$

Условие  $A > 0$  означает, что две вертикальные линии нулей в начальной плоскости расположены близко к оси  $\eta$  ( $a < w/\sqrt{2(1+\gamma^2)}$ ) и формируют на расстоянии  $z = 2f$  два изолированных нуля интенсивности, лежащих на оси  $\xi$  (выражение 2) в (4). И наоборот, если  $A < 0$ , то две вертикальные линии нулей в начальной плоскости расположены дальше от оси  $\eta$  ( $a > w/\sqrt{2(1+\gamma^2)}$ ) и формируют тоже два изолиро-

ванных нуля интенсивности, но лежащих на оси  $\eta$  (выражение 1) в (4)). И только при  $A=0$ , когда выполняется условие:

$$a = \frac{w}{\sqrt{2(1+\gamma^2)}}, \quad (5)$$

две линии нулей интенсивности в (1) сформируют один изолированный ноль интенсивности на оптической оси ( $\xi=\eta=0$ ), вокруг которого сформируется оптический вихрь с ТЗ = -2. Из (5) видно, что для получения оптического вихря с одним нулем интенсивности на оптической оси линии нулей интенсивности на входе не должны отстоять слишком далеко друг от друга, так как есть максимальное расстояние между ними:  $a < w/\sqrt{2}$  (при любом  $\gamma$ ).

Из сделанных выше рассуждений следует такая эволюция нулей в плоскости на двойном фокусном расстоянии от начала в зависимости от расстояния между линиями нулей интенсивности в начальной плоскости. Пусть линия нулей одна (второго порядка) и совпадает с осью  $\eta$ , тогда в выходной плоскости будет два нуля на горизонтальной оси на максимальном расстоянии от центра, равном

$$\xi_{\max} = \pm w(1+\gamma^2)^{1/2} (\sqrt{2}\gamma)^{-1}.$$

Пусть далее линия нулей разделяется на две симметричных линии относительно вертикальной оси и расстояние между ними увеличивается. Тогда два нуля, находящихся в выходной плоскости ( $z=2f$ ) на максимальном расстоянии  $\xi_{\max}$ , начинают двигаться к центру. И когда половина расстояния между двумя линиями нулей интенсивности достигнет критического значения:  $x_k = a = w(2(1+\gamma^2))^{-1/2}$  (условие (5)), тогда два нуля в выходной плоскости « сольются » в один ноль 2-го порядка в центре. Если далее продолжить увеличивать расстояние между двумя линиями нулей интенсивности в начальной плоскости, то ноль 2-го порядка разделится опять на два нуля в выходной плоскости, но которые уже будут лежать на вертикальной оси симметрично относительно начала координат. И этому процессу уже не будет конца, так как при увеличении расстояния между линиями нулей до бесконечности нули интенсивности в выходной плоскости также будут стремиться к  $\pm\infty$  вдоль оси  $\eta$ .

Рассмотрим далее, какой оптический вихрь формируется на двойном фокусном расстоянии для начального пучка (1) при условии (5). Из (2) при условии (5) следует, что вокруг оптической оси сформировался эллиптический вихрь, внедренный в Гауссов пучок с астигматической фазой и с амплитудой вида:

$$(\xi - i\eta)^2 = \rho^2 \exp(-i2\theta). \quad (6)$$

Чтобы получить положительный ТЗ, равный +2, цилиндрическая линза должна быть повернута на -45

градусов. Правая часть в (6) получена в полярных эллиптических координатах:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \theta, \\ \eta = \gamma^{-1} \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (7)$$

Эллиптический вихрь становится каноническим оптическим вихрем при условии  $\gamma=1$  ( $z_0=2f, a=w/2$ ):

$$(\xi - i\eta)^2 = \rho^2 \exp(-i2\theta), \quad (8)$$

а световое поле становится пучком ЛГ (0, -2) с астигматической фазой:

$$E(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) = i \frac{(\xi - i\eta)^2}{4\sqrt{2}w^2} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2w^2} + \frac{ik}{4f}(\xi^2 + \eta^2 + \xi\eta)\right). \quad (9)$$

Чтобы пучок (9) сохранял далее структуру оптического вихря с ТЗ = -2, надо на двойном фокусном расстоянии расположить еще одну цилиндрическую линзу, повернутую на 45 градусов к осям, с пропусканием  $\exp[-ik(\xi + \eta)^2/8f]$ . Эта линза скомпенсирует астигматическую фазу, которая присутствует в (9). Причем фокусное расстояние у этой цилиндрической линзы должно быть в 2 раза больше, чем у цилиндрической линзы в (1).

Сразу после второй цилиндрической линзы вместо (9) получим:

$$E_2(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) = i \frac{(\xi - i\eta)^2}{4\sqrt{2}w^2} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2w^2} + \frac{ik}{8f}(\xi^2 + \eta^2)\right). \quad (10)$$

Пучок (10) с точностью до константы равен моде ЛГ (0, -2) на расстоянии  $z=z_0$  с радиусом перетяжки  $w' = w\sqrt{1+(z/z_0)^2} = w\sqrt{2}$  и радиусом кривизны  $R = z[1+(z_0/z)^2] = 2z = 4f$ . Заметим, однако, что при условии  $\gamma = 1$ , при котором получен пучок (10), две исходные линии нулей интенсивности в (1) проходят на расстоянии половины радиуса перетяжки от оптической оси ( $a = \pm w/2$ ), как следует из (5). Но это расстояние не равно расстоянию от начала координат до корней многочлена Эрмита  $H_2(\sqrt{2}x/w) = 2w^{-2}(x^2 - w^2/2)$ , которое равно  $a = \pm w/\sqrt{2}$ .

Заметим, что оптические эллиптические Гауссовы вихри с астигматической фазой рассматривались ранее в [24, 25]. В [24] рассматривалось преобразование пучка Эрмита-Гаусса порядка (0, n) с помощью повернутой цилиндрической линзы. Но влияние расстояния между линиями нулевой интенсивности на формирование оптического вихря не исследовалось. В [25] рассмотрен модовый пучок, у которого канонический оптический вихрь с ТЗ = n, внедренный в эллиптический астигматический Гауссов пучок, сохра-

няется при распространении и не расщепляется на простые оптические вихри.

## 2. Орбитальный угловой момент

В предыдущем параграфе мы показали, что из двух прямых линий нулей в Гауссовом пучке с астигматической фазой в начальной плоскости при распространении в свободном пространстве формируются либо два оптических вихря первого порядка, либо один оптический вихрь второго порядка с центром на оптической оси. То есть ТЗ у такого пучка не сохраняется при распространении. В этом параграфе мы получим выражение для нормированного орбитального углового момента пучка (1). ОУМ параксиального пучка находится по известным формулам [1]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left( x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (11)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy,$$

где  $\text{Im}$  – мнимая часть числа,  $J_z$  – ОУМ пучка,  $W$  – мощность пучка,  $\bar{E}$  – комплексно сопряженная функция к функции  $E$ . Так как ОУМ пучка сохраняется, рассчитаем его в начальной плоскости. Подставим функцию (1) в (11) и получим выражение для нормированного на мощность ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = -2\gamma w^2 \frac{3w^2 - 4a^2}{3w^4 - 8a^2 w^2 + 16a^4}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что при малом  $a$  ( $a < \sqrt{3}w/2$ ) ОУМ отрицательный  $J_z < 0$ , при больших  $a$  ( $a > \sqrt{3}w/2$ ) ОУМ положительный  $J_z > 0$ , а при  $a = \sqrt{3}w/2$  ОУМ равен нулю  $J_z = 0$ .

Это неожиданный результат, так как  $J_z = 0$  означает, что две вертикальные линии нулей интенсивности, разделенные определенным расстоянием, могут «обнулить» ОУМ астигматического Гауссова пучка. Интересно также, что условие «обнуления» ОУМ ( $a = \sqrt{3}w/2$ ) оптического вихря (1) не зависит от  $\gamma$ . Из этого, например, следует, что при любом  $\gamma$  «обнуление» ОУМ происходит тогда, когда два нуля интенсивности (два вихря минус первого порядка) лежат на вертикальной оси. В ОУМ дают вклад две составляющих: вихревая (в данном случае отрицательная) и астигматическая (в данном случае положительная). Поэтому при некоторых параметрах обе составляющие компенсируют друг друга и ОУМ становится равен нулю.

Из (12) также следует, что при  $a = 0$  (линия нулевой интенсивности второго порядка совпадает с осью  $\eta$ ) ОУМ равен  $J_z/W = -2\gamma$  и при  $\gamma = 1$  ОУМ равен  $J_z/W = -2$ . То есть оптический вихрь с ТЗ = -2 можно сформировать не только с помощью двух линий нулевой интенсивности и астигматической фазы, но и с помощью одной осевой линии нулей интенсивности

( $a = 0$ ) второго порядка. Это тоже неожиданный результат, так как он не связан с многочленом Эрмита 2-го порядка, который используется в [5] для создания оптического вихря второго порядка. Отличие в том, что у оптического вихря с  $a = 0$  на двойном фокусном расстоянии сформируются два оптических вихря минус первого порядка, лежащих на горизонтальной оси  $\xi$ . Это следует из (4). При стремлении  $a$  к бесконечности из (12) следует, что ОУМ будет равен нулю. Итак, при  $a = 0$  ОУМ отрицательный, при  $a = \sqrt{3}w/2$  он равен нулю, а при бесконечно большом  $a$  ОУМ опять равен нулю. То есть при некотором  $a$  ОУМ должен иметь положительный максимум. Действительно, поиск экстремумов ОУМ (12) показывает, что минимальное отрицательное и максимальное положительное значение ОУМ достигается при

$$a = (w/2)(3 - \sqrt{6})^{1/2} \approx 0,37w < w \text{ и при}$$

$$a = (w/2)(3 + \sqrt{6})^{1/2} \approx 1,17w > w.$$

Сами экстремальные значения ОУМ при этом равны

$$J_{z,\text{min}}/W = -(\gamma\sqrt{6}/2)(3 - \sqrt{6})^{-1} \approx -2,22\gamma \text{ и}$$

$$J_{z,\text{max}}/W = (\gamma\sqrt{6}/2)(3 + \sqrt{6})^{-1} \approx 0,22\gamma.$$

В ОУМ дают вклад вихревая и астигматическая составляющие [26], сумма которых и определяет полный ОУМ пучка.

При условии (5) на двойном фокусном расстоянии формируется один ноль интенсивности второго порядка на оптической оси, тогда вместо (12) получим:

$$\frac{J_z}{W} = -2\gamma \frac{3\gamma^4 + 4\gamma^2 + 1}{3\gamma^4 + 2\gamma^2 + 3}. \quad (13)$$

И при условии, что  $\gamma = 1$ , из (13) получим  $J_z/W = -2$ . Таким образом, при условии (5) (то есть  $a = w/2$ ) и при  $\gamma = 1$  на двойном фокусном расстоянии формируется один ноль интенсивности второго порядка с ТЗ = -2, и ОУМ у светового поля (2) при этом будет также равен -2.

Интересно заметить, что выражение (13) похоже на выражение для ОУМ

$$\frac{J_z}{W} = 8\alpha \frac{(\alpha^2 + 1)}{(3\alpha^4 + 2\alpha^2 + 3)} \quad (14)$$

эллиптического Гауссова вихря с амплитудой в начальной плоскости

$$E_2(x, y, z = 0) = \frac{(\alpha x + iy)^2}{w^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (15)$$

который рассматривался в [27]. Отличие в том, что у эллиптического Гауссова вихря (15) нет астигматической фазы, которая есть у пучка (1) или (2). Поэтому при любой степени эллиптичности (при любом  $\alpha$ ) ОУМ (14)

будет меньше (точнее не больше) ТЗ пучка (15), который равен 2. А пучок (2) при разном  $\gamma$  от величины которого зависит эллиптичность оптического вихря, может иметь ОУМ как больше  $-2$ , так и меньше  $-2$ .

### 3. Две несимметричные параллельные линии нулей интенсивности

В этом параграфе рассмотрим, к каким изменениям приведет то, что вертикальные линии нулей интенсивности в начальной плоскости будут расположены несимметрично относительно центра. Рассмотрим начальное световое поле с амплитудой вида:

$$E(x, y, z = 0) = \frac{(x-a)(x-b)}{w^2} \times \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f}(x+y)^2\right). \quad (16)$$

Поле (16) отличается от поля (1) только расположением линий нулей интенсивности. На двойном фокусном расстоянии поле (16) примет вид:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \frac{-i\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \times \exp\left\{-\frac{\gamma^2(\xi^2+\eta^2)}{w^2(1+\gamma^2)} + \frac{i\gamma}{w^2}(\xi^2+\eta^2) + \frac{2i\gamma^3\xi\eta}{w^2(1+\gamma^2)}\right\} \times \left[\frac{1}{2(1+\gamma^2)} + \frac{ab}{w^2} - \frac{\gamma^2(\xi-i\eta)^2}{w^2(1+\gamma^2)^2} + \frac{i\gamma(a+b)(\xi-i\eta)}{w^2(1+\gamma^2)}\right]. \quad (17)$$

Амплитуда (17) совпадает с (1) при  $a=-b$ . Если  $a \neq -b$ , то в этом случае формируется Гауссов пучок с астигматической фазой (17), но он умножается на другую функцию, отличную от (3):

$$F(\xi, \eta) = A - B\xi^2 + C\eta^2 + iD\xi\eta + iE\xi + F\eta, \quad (18)$$

где

$$A = \frac{1}{2(1+\gamma^2)} + \frac{ab}{w^2}, \quad B = \frac{\gamma^2}{w^2(1+\gamma^2)^2}, \quad C = \frac{\gamma^4}{w^2(1+\gamma^2)^2}, \quad D = \frac{2\gamma^3}{w^2(1+\gamma^2)^2}, \quad (19)$$

$$E = \frac{\gamma(a+b)}{w^2(1+\gamma^2)}, \quad F = \frac{\gamma^2(a+b)}{w^2(1+\gamma^2)}.$$

Из (18) следует: для того, чтобы в плоскости  $z=2f$  были изолированные нули интенсивности поля (17), нужно, чтобы мнимая часть функции  $F(\xi, \eta)$  была равна нулю. Это может быть на двух прямых, при  $\xi=0$  и при  $\eta=-(a+b)(1+\gamma^2)/(2\gamma^2)$ . Это значит, что при  $A \neq 0$  в центре ( $\xi = \eta = 0$ ) не может быть нуля ин-

тенсивности второго порядка. При  $A=0$ , то есть когда линии нулевой интенсивности в начальной плоскости расположены по разную сторону от центра и произведение расстояний от этих линий до центра будет равно:

$$ab = \frac{-w^2}{2(1+\gamma^2)}, \quad (20)$$

в центре плоскости  $z=2f$  будет ноль интенсивности, но не минус второго, а минус первого порядка. А координаты второго нуля интенсивности будут такими:  $\xi=0, \eta=-(a+b)(1+\gamma^2)/\gamma^2$ .

Орбитальный угловой момент для пучка (16) можно определить из выражения:

$$\frac{J_z}{W} = -2\gamma \frac{3w^4 + 2(a^2 + 4ab + b^2)w^2}{3w^4 + 4(a^2 + 4ab + b^2)w^2 + 16(ab)^2}. \quad (21)$$

При  $a=-b$  выражение для ОУМ (21) совпадает с (12). Из (21) следует, что если  $ab > 0$ , то ОУМ всегда будет отрицательный и не будет менять знак и никогда не будет равен нулю, как ОУМ (12) для поля (1).

### 4. Астигматический пучок cos-Гаусса

Известен пучок, который называется пучок косинуса-Гаусса [28]. Впервые он был реализован как плазмонный пучок, распространяющийся по поверхности раздела сред. В этом параграфе мы рассмотрим другой пример пучка косинуса-Гаусса с ОУМ, который получается из Гауссова пучка, промодулированного функцией косинуса, с помощью астигматического преобразования, выполненного цилиндрической линзой, повернутой на угол 45 градусов.

Комплексная амплитуда такого поля в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = \cos(\alpha x) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2} - \frac{ik}{4f}(x^2+y^2+2xy)\right). \quad (22)$$

Световое поле (22) интересно тем, что в нем имеется бесконечное число параллельных оси  $y$  линий нулевой интенсивности, разделенных расстоянием  $\pi/\alpha$ . Во что преобразуются эти линии нулевой интенсивности ( $\cos \alpha x = 0$ ) на двойном фокусном расстоянии? На двойном фокусном расстоянии от начальной плоскости ( $z=2f$ ) амплитуда поля (22) будет иметь вид:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = \frac{-i\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} \cosh\left[\frac{\alpha\gamma}{1+\gamma^2}(\xi-i\eta)\right] \times \exp\left[-\frac{\alpha^2 w^2}{4(1+\gamma^2)} - \frac{\gamma^2(\xi^2+\eta^2)}{w^2(1+\gamma^2)} + \frac{ik}{4f}\left(\xi^2+\eta^2 + \frac{2\gamma^2\xi\eta}{1+\gamma^2}\right)\right]. \quad (23)$$

В (23) эллиптический оптический вихрь  $\xi - i\eta$  находится под знаком гиперболического косинуса. При  $\xi=0$  гиперболический косинус становится обычным косинусом, и для нулей интенсивности (оптических вихрей) получаем уравнение (других нулей у гиперболического косинуса нет):

$$\cos\left(\frac{\alpha\gamma^2\eta}{1+\gamma^2}\right) = 0. \quad (24)$$

Из (24) следует, что вертикальные линии нулей интенсивности в начальной плоскости преобразовались в бесконечный набор эквидистантных оптических вихрей с периодом  $T = (\pi/\alpha)(1 + 1/\gamma^2)$  и ТЗ, равным  $-1$ , лежащих на вертикальной оси  $\eta$  в плоскости на расстоянии  $z = 2f$ . Поэтому ТЗ поля (23) будет бесконечным. При больших расстояниях между линиями нулей интенсивности, когда  $a \ll 1$ , косинус в (22) можно заменить его приближенным значением  $\cos(\alpha x) \approx 1 - \alpha^2 x^2 / 2$ . И поле (22) будет вести себя аналогично световому полю (1). То есть такое поле сформирует в выходной плоскости два нуля на вертикальной оси на большом расстоянии от центра:  $\eta = \pm \pi(1 + \gamma^2)(2\alpha\gamma^2)^{-1}$ .

Далее найдем ОУМ пучка (22). Подставив (22) в (11), получим:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\gamma p^2}{1 + \exp(p^2)}, \quad (25)$$

где  $p = \alpha w / \sqrt{2}$ . Из (25) видно, что при малом периоде косинуса ( $p \ll 1$ ) и при большом периоде ( $p \gg 1$ ) ОУМ пучка (22) и (23) будет стремиться к нулю, а в интервале значений  $1 < p < 1,2$  находится максимум ОУМ (25), равный примерно  $\gamma/2$ .

## 5. Моделирование

### 5.1. Моделирование динамики оптических вихрей

На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы Гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (1), (2)) с разными расстояниями между этими линиями. Распределения в начальной плоскости были получены по формуле (1), а на двойном фокусном расстоянии – с помощью преобразования Френеля и по формуле (2) (рисунки получались визуально неразличимые). Параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 0,5$  мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f = 1$  м, расчётная область во входной плоскости  $|x|, |y| \leq 1,5$  мм, расчётная область в выходной плоскости  $|\xi|, |\eta| \leq 3$  мм, расстояние между линиями нулевой интенсивности  $a = 0$  (одна линия второго порядка) (первый ряд),  $a = 0,8a_0$  (второй ряд),  $a = a_0$  (третий ряд),  $a = 1,2a_0$  (четвёртый ряд), где  $a_0 = w/[2(1 + \gamma^2)]^{1/2}$  – расстояние, при котором должен формироваться осевой вихрь 2-го порядка (уравнение (5)).

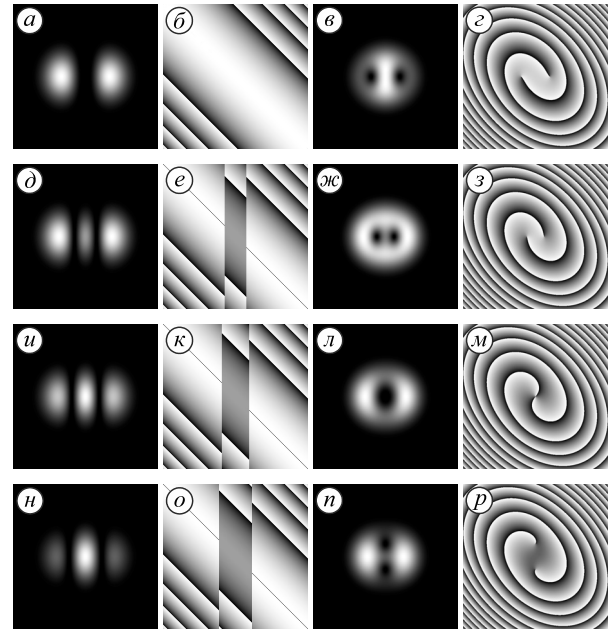


Рис. 1. Распределения интенсивности (первый и третий столбцы) и фазы (второй и четвёртый столбцы) в начальной плоскости (первые два столбца) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы Гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (1) и (2)) с разными расстояниями между этими линиями

Рис. 1 подтверждает теоретические предсказания. Действительно, из рис. 1 видно, что при  $a=0$  (центральная линия нулевой интенсивности второго порядка) оптические вихри (изолированные нули интенсивности) минус первого порядка в выходной плоскости расположены на горизонтальной оси и максимально отдалены друг от друга (первый ряд на рис. 1). При увеличении расстояния  $a$  между линиями нулевой интенсивности в начальной плоскости оптические вихри в выходной плоскости приближаются друг к другу (второй ряд на рис. 1). При достижении расстоянием  $a$  величины (5) оба вихря в выходной плоскости сливаются в один эллиптический вихрь минус второго порядка (третий ряд на рис. 1). При дальнейшем увеличении расстояния  $a$  вихрь в выходной плоскости снова разделяется на два вихря минус первого порядка, но уже расположенные на вертикальной оси.

### 5.2. Моделирование динамики ОУМ

На рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы Гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (1), (2)) с разными значениями нормированного ОУМ. Параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 0,5$  мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f = z_0/2 \approx 73,8$  см (то есть  $\gamma = 1$ ), расчётная область во входной плоскости

$|x|, |y| \leq 1,5$  мм, расчётная область в выходной плоскости  $|\xi|, |\eta| \leq 3$  мм, расстояние между линиями нулевой интенсивности  $a=0$  (ОУМ равен  $-2$ ) (первый ряд),  $a = (w/2)(3 - \sqrt{6})^{1/2} \cong 185$  мкм (ОУМ минимален и равен примерно  $-2,22$ ) (второй ряд),  $a = \sqrt{3}w/2 \cong 433$  мкм (ОУМ равен нулю) (третий ряд),  $a = (w/2)(3 + \sqrt{6})^{1/2} \cong 584$  мкм (ОУМ максимален и равен примерно  $0,22$ ) (четвёртый ряд),  $a = 2w \cong 1$  мм (ОУМ спадает от максимума и равен примерно  $0,11$ ) (пятый ряд). Пунктирные эллипсы и стрелки (рис. 2б,е) показывают расположения световых пятен в начальной плоскости и направления градиента фазы в этих пятнах.

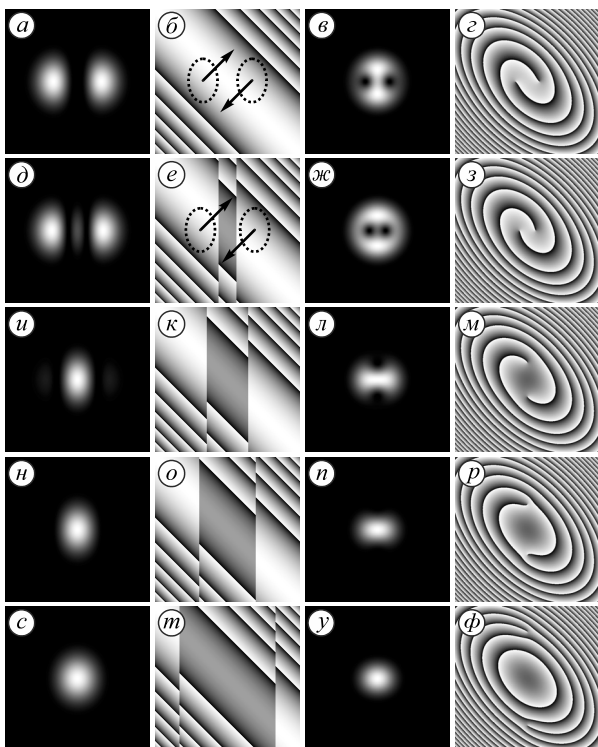


Рис. 2. Распределения интенсивности (первый и третий столбцы) и фазы (второй и четвёртый столбцы) в начальной плоскости (первые два столбца) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы (третий и четвёртый столбцы) Гауссова пучка с двумя симметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (1) и (2)) с разными значениями нормированного ОУМ

На всех рис. 2 нормированный ОУМ, рассчитанный численно по формуле (11), совпал с теоретическим значением, рассчитанным по формуле (12). Так, в первом ряду на рис. 2 теоретическое и численное значения нормированного ОУМ равны  $-2$  и  $-1,998$  соответственно. Для второго ряда эти значения равны  $-2,225$  и  $-2,223$ , для третьего ряда  $-0$  и  $5 \times 10^{-4}$ , для четвёртого ряда  $-0,2247$  и  $0,2248$ , для пятого ряда  $-0,11454$  и  $0,11451$ .

Согласно (1), во входной плоскости может быть до трёх максимумов интенсивности: один центральный (если  $a \neq 0$ ) при  $x=y=0$  (его интенсивность равна  $(a/w)^4$ ) и два боковых при  $x = \pm (a^2 + w^2)^{1/2}$  и  $y=0$  (их интенсивность равна  $\exp[-2(1 + a^2/w^2)]$ ). Получается,

что с ростом расстояния  $a$  между линиями нулевой интенсивности сначала появляется слабый максимум в центре, но затем его интенсивность возрастает, а интенсивность боковых максимумов экспоненциально убывает. Рис. 1 и 2 это подтверждают. При  $a=0$  (первый ряд на рис. 2) поле во входной плоскости состоит из двух световых пятен, при  $a = (w/2)(3 - \sqrt{6})^{1/2}$  (второй ряд на рис. 2) появляется слабое третье пятно в центре, при дальнейшем возрастании  $a$  центральное пятно становится ярче боковых и последние уже не видны (третий-пятый ряды на рис. 2). Именно это объясняет стремление ОУМ к нулю (пятый ряд на рис. 2) после прохождения максимального значения (четвёртый ряд на рис. 2). Момент равен произведению силы на плечо, а основная интенсивность сосредоточена в центре, и потому плечо близко к нулю. Спад ОУМ от начального значения  $-2$  (когда  $a=0$ ) до минимального значения  $-2,22$  (когда  $a = (w/2)(3 - \sqrt{6})^{1/2}$ ) также объясним. С ростом  $a$  интенсивность боковых максимумов спадает, но расстояние до них от центра возрастает. До некоторого значения  $a$  рост плеча перевешивает спад интенсивности боковых пятен, и потому ОУМ по модулю возрастает. Существенные (около  $-2$ ) значения ОУМ (первый и второй ряд на рис. 2) объясняются наличием градиента фазы в начальной плоскости в областях высокой интенсивности. Если бы в этих областях оказались микрочастицы, этот градиент фазы стремился бы повернуть их вокруг центра картины по часовой стрелке (рис. 2б, е).

### 5.3. Моделирование пучка с двумя несимметричными параллельными линиями нулей интенсивности

На рис. 3 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы Гауссова пучка с двумя несимметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (16), (17)). Параметры расчёта: длина волны  $\lambda=532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w=0,5$  мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f=z_0/2 \cong 73,8$  см (то есть  $\gamma=1$ ), расчётная область во входной плоскости  $|x|, |y| \leq 1,5$  мм, расчётная область в выходной плоскости  $|\xi|, |\eta| \leq 3$  мм, координаты линий нулевой интенсивности  $a=w$  и  $b=-w/4$ .

Из рис. 3 видно, что асимметричное расположение линий нулевой интенсивности приводит в начальной плоскости к двум световым пятнам разного размера и интенсивности, что приводит к асимметричной картине и в выходной плоскости. Для выбранных параметров положения линий нулевой интенсивности удовлетворяют условию (20), и потому в центре выходной плоскости формируется ноль интенсивности минус первого порядка, а второй ноль расположен в точке  $(\xi=0, \eta=-1,5w \cong -750$  мкм), что подтверждается на рис. 3г. Нормированный ОУМ на рис. 3, рассчитанный численно по формуле (11), совпал с теоретическим значением, рассчитанным по формуле (21) ( $-1,469$  и  $-1,471$ ).

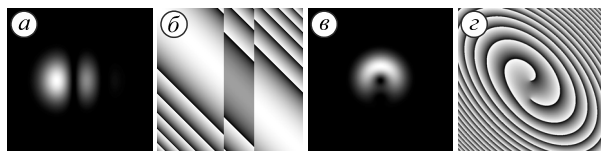


Рис. 3. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, з) в начальной плоскости (а, б) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы (в, з) Гауссова пучка с двумя несимметричными линиями нулевой интенсивности (уравнения (16), (17))

#### 5.4. Моделирование астигматического косинусного Гауссова пучка

На рис. 4 показаны распределения интенсивности и фазы в начальной плоскости и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы косинусного Гауссова пучка (уравнения (22), (23)). Параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки Гауссова пучка  $w = 0,5$  мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f = z_0/2 \approx 73,8$  см (то есть  $\gamma = 1$ ), период косинусной составляющей равен радиусу перетяжки (то есть  $\alpha = 2\pi/w$ ), расчётная область во входной плоскости  $|x|, |y| \leq 1,5$  мм, расчётная область в выходной плоскости  $|\xi|, |\eta| \leq 3$  мм.

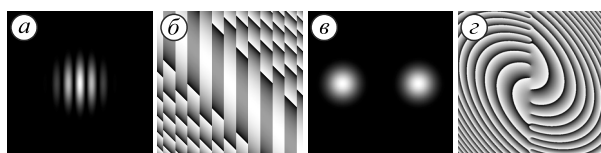


Рис. 4. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, з) в начальной плоскости (а, б) и на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы (в, з) косинусного Гауссова пучка (уравнения (22), (23))

Из рис. 4 видно, что в выходной плоскости на вертикальной оси действительно сформировался набор эквидистантных оптических вихрей минус первого порядка с периодом  $T = (\pi/\alpha)(1 + 1/\gamma^2) = w = 0,5$  мм (на рис. 4з их 12 штук). Расположение нулей интенсивности и расстояние между ними на рис. 4з согласуется с уравнением (23). Но теоретически таких оптических вихрей должно быть бесконечное число, и поэтому ТЗ должен быть бесконечно большой. При данных параметрах пучок имеет малый ОУМ (численное и теоретическое значения равны  $0,004$  и  $5 \times 10^{-8}$ ).

#### Заключение

В работе теоретически и численно показано, как Гауссов пучок с конечным числом параллельных линий нулей интенсивности (краевых дислокаций) с помощью цилиндрической линзы преобразуется в вихревой пучок, имеющий орбитальный угловой момент и топологический заряд. На примере двух параллельных линий нулей интенсивности, симметрично расположенных относительно центра, показана динамика формирования двух нулей интенсивности на двойном фокусном расстоянии: при увеличении расстояния между вертикальными линиями нулей интенсивности

два оптических вихря формируются сначала на горизонтальной оси, потом сходятся в центр, а затем расходятся, но уже по вертикальной оси. Топологический заряд такого оптического вихря при любом расстоянии между линиями нулей равен  $-2$ . Причем на любом расстоянии по оптической оси, кроме начальной плоскости. При изменении расстояния между линиями нулей интенсивности меняется ОУМ пучка. Он может быть отрицательным, положительным и при определенном расстоянии между линиями нулей интенсивности ОУМ может быть равен нулю.

В работе на конкретном примере показано, что ОУМ и ТЗ – это разные характеристики светового поля. Например, у  $\cos$ -Гауссова пучка с астигматизмом ТЗ равен бесконечности, так как после цилиндрической линзы у такого пучка имеется бесконечное число оптических вихрей с ТЗ  $-1$ , эквидистантно расположенных на прямой. Но все эти вихри (нули интенсивности) находятся в области, где интенсивность почти нулевая, и поэтому ОУМ такого пучка тоже почти нулевой.

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003, параграфы «Комплексная амплитуда на двойном фокусном расстоянии» и «Орбитальный угловой момент», Российского научного фонда (грант 18-19-00595, параграф «Астигматический пучок  $\cos$ -Гаусса»), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (параграф «Моделирование»).

#### Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – CRC Press, 2018. – ISBN: 978-1-138-54211-2.
2. **Vasara, A.** Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms / A. Vasara, J. Turunen, A.T. Friberg // Journal of the Optical Society of America A. – 1989. – Vol. 6, Issue 11. – P. 1748-1754.
3. **Heckenberg, N.R.** Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms / N.R. Heckenberg, R. McDaff, C.P. Smith, A.G. White // Optics Letters. – 1992. – Vol. 17, Issue 3. – P. 221-223.
4. **Bazhenov, V.Yu.** Screw dislocations in light wavefronts / V.Yu. Bazhenov, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // Journal of Modern Optics. – 1992. – Vol. 39, Issue 5. – P. 985-990.
5. **Abramochkin, E.** Beam transformation and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83, Issues 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
6. **Khonina, S.N.** The phase rotor filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, G.V. Uspleniev, M.V. Shinkarev, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 1992. – Vol. 39, Issue 5. – P. 1147-1154. – DOI: 10.1080/09500349214551151.
7. **Beijersbergen, M.V.** Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate / M.V. Beijersbergen, R.P.C. Coerwinkel, M. Kristensen, J.P. Woerdman // Optics Communications. – 1994. – Vol. 112, Issues 5-6. – P. 321-327.



8. **Fedotowsky, A.** Optimal filter design for annular imaging / A. Fedotowsky, K. Lehovc // *Applied Optics*. – 1974. – Vol. 13, Issue 12. – P. 2919-2923.
9. **Khonina, S.N.** Trochuson / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, M.V. Shinkaryev, G.V. Uspleniev // *Optics Communications*. – 1992. – Vol. 91, Issues 3-4. – P. 158-162. – DOI: 10.1016/0030-4018(92)90430-Y.
10. **Marrucci, L.** Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media / L. Marrucci, C. Manzo, D. Paparo // *Physical Review Letters*. – 2006. – Vol. 96, Issue 16. – P. 163905.
11. **Naik, D.N.** Generation of singular optical beams from fundamental Gaussian beam using Sagnac interferometer / D.N. Naik, N.K. Viswanahan // *Journal of Optics*. – 2016. – Vol. 18, Issue 9. – P. 095601.
12. **Zhu, L.** Arbitrary manipulation of spatial amplitude and phase using phase-only spatial light modulators / L. Zhu, J. Wang // *Scientific Reports*. – 2014. – Vol. 4. – P. 7441.
13. **Devlin, R.C.** Arbitrary spin-to-orbital angular momentum conversion of light / R.C. Devlin, A. Ambrosio, A. Rubin, J.B. Mueller, F. Capasso // *Science*. – 2017. – Vol. 358. – P. 896-901.
14. **Miao, P.** Orbital angular momentum microlaser / P. Miao, Z. Zhang, J. Sun, W. Walasik, S. Longhi, N.M. Litchintser, L. Feng // *Science*. – 2016. – Vol. 353. – P. 464-467.
15. **Vaity, P.** Formation of optical vortices through superposition of two Gaussian beams / P. Vaity, A. Aadhi, R.P. Singh // *Applied Optics*. – 2013. – Vol. 52, Issue 27. – P. 6652-6656.
16. **Zhang, J.** Circular polarization analyzer based on the combined coaxial Archimedes' spiral structure / J. Zhang, Z. Guo, R. Li, W. Wang, A. Zhang, J. Liu, S. Qu, J. Gao // *Plasmonics*. – 2015. – Vol. 10, Issue 6. – P. 1256-1261.
17. **Zhang, J.** Circular polarization analyzer based on an Archimedean nano-pinholes array / J. Zhang, Z. Guo, K. Zhou, L. Ran, L. Zhu, W. Wang, Y. Sun, F. Shen, J. Gao, S. Liu // *Optics Express*. – 2015. – Vol. 23, Issue 23. – P. 30523-30531.
18. **Zhan, H.** Generation of acoustic vortex beams with designed Fermat's spiral diffraction grating / H. Zhan, J. Li, K. Guo, Z. Guo // *The Journal of the Acoustical Society of America*. – 2019. – Vol. 146, Issue 6. – P. 4237-4243.
19. **Wang, H.** Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit / H. Wang, L. Liu, C. Zhou, J. Xu, M. Zhang, S. Teng, Y. Cai // *Nanophotonics*. – 2019. – Vol. 8, Issue 2. – P. 214.
20. **Petrov, D.V.** Vortex-edge dislocation interaction in a linear medium / D.V. Petrov // *Optics Communications*. – 2001. – Vol. 188, Issues 5-6. – P. 307-312.
21. **Petrov, D.V.** Splitting of an edge dislocation by an optical vortex / D.V. Petrov // *Optical and Quantum Electronics*. – 2002. – Vol. 34. – P. 759-773.
22. **He, D.** Interaction of the vortex and edge dislocation embedded in a sosh-Gaussian beam / D. He, H. Yan, B. Lu // *Optics Communications*. – 2009. – Vol. 282, Issue 20. – P. 4035-4044.
23. **Chen, H.** Splitting of an edge dislocation by a vortex emergent from a nonparaxial beam / H. Chen, W. Wang, Z. Gao, W. Li // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2019. – Vol. 36, Issue 10. – P. 2804-2809.
24. **Kotlyar, V.V.** Three different types of astigmatic Hermite-Gaussian beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev, E.S. Kozlova // *Journal of Optics*. – 2019. – Vol. 21, Issue 11. – P. 115601. – DOI: 10.1088/2040-8986/ab42b5.
25. **Kotlyar, V.V.** Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 2. – P. 657-666. – DOI: 10.1364/OE.27.000657.
26. **Courtial, J.** Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1997. – Vol. 144, Issues 4-6. – P. 210-213.
27. **Kotlyar, V.V.** Elliptic Gaussian optical vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 95. – P. 053805. – DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053805.
28. **Lin, J.** Cosine-Gauss plasmon beam: a localized long-range nondiffracting surface wave / J. Lin, J. Dellinger, P. Genevet, B. Cluzel, F. de Fornel, F. Capasso // *Physical Review Letters*. – 2012. – Vol. 109, Issue 9. – P. 093904.

### Сведения об авторах

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: [kotlyar@smr.ru](mailto:kotlyar@smr.ru).

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Налимов Антон Геннадьевич**, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году,

окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики в Самарском университете в должности доцента, в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 140 работ и 3 патентов. E-mail: [anton@smr.ru](mailto:anton@smr.ru).

---

*ГРНТИ: 29.31.15*

*Поступила в редакцию 11 декабря 2020 г. Окончательный вариант – 12 января 2021 г.*

---

---

# Astigmatic transformation of a set of edge dislocations embedded in a Gaussian beam

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, A.G. Nalimov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

It is theoretically shown how a Gaussian beam with a finite number of parallel lines of intensity nulls (edge dislocations) is transformed using a cylindrical lens into a vortex beam that carries orbital angular momentum (OAM) and has a topological charge (TC). In the initial plane, this beam already carries OAM, but does not have TC, which appears as the beam propagates further in free space. Using an example of two parallel lines of intensity nulls symmetrically located relative to the origin, we show the dynamics of the formation of two intensity nulls at the double focal length: as the distance between the vertical lines of intensity nulls is being increased, two optical vortices are first formed on the horizontal axis, before converging to the origin and then diverging on the vertical axis. At any distance between the zero-intensity lines, the optical vortex has the topological charge  $TC = -2$ , which conserves at any on-axis distance, except the initial plane. When the distance between the zero-intensity lines changes, the OAM that the beam carries also changes. It can be negative, positive, and at a certain distance between the lines of intensity nulls OAM can be equal to zero. It is also shown that for an unlimited number of zero-intensity lines, a beam with finite OAM and an infinite TC is formed.

**Keywords:** orbital angular momentum, topological charge, zero intensities, optical vortex.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Astigmatic transformation of a set of edge dislocations embedded in a Gaussian beam. *Computer Optics* 2021; 45(2): 190-199. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-849.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Foundation for Basic Research under grant #18-29-20003 (Sections "Complex amplitude at the double focal distance" and "Orbital angular momentum"), the Russian Science Foundation grant #18-19-00595 (Section "Astigmatic cosine-Gauss beam"), and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS (Section "Simulation")

## References

- [1] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. *Vortex Laser Beams*. CRC Press, 2018. ISBN: 978-1-138-54211-2.
  - [2] Vasara A, Turunen J, Friberg AT. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms. *J Opt Soc Am A* 1989; 6(11): 1748-1754.
  - [3] Heckenberg NR, McDuff R, Smith CP, White AG. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Opt Lett* 1998; 17(3): 221-223.
  - [4] Bazhenov VY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Screw dislocations in light wavefronts. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 985-990.
  - [5] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformation and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1,2): 123-35. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
  - [6] Khonina SN, Kotlyar VV, Uspleniev GV, Shinkarev MV, Soifer VA. The phase rotor filter. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
  - [7] Beijersbergen MV, Coerwinkel RPC, Kristensen M, Woerdman JP. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate. *Opt Commun* 1994; 112(5-6): 321-327.
  - [8] Fedotowsky A, Lehovec K. Optimal filter design for annular imaging. *Appl Opt* 1974; 13(12): 2919-2923.
  - [9] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Shinkaryev MV, Uspleniev GV. Trochoson. *Opt Commun* 1992; 91(3-4): 158-162.
  - [10] Marrucci L, Manzo C, Paparo D. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Phys Rev Lett* 2006; 96(16): 163905.
  - [11] Naik DN, Viswanahan NK. Generation of singular optical beams from fundamental Gaussian beam using Sagnac interferometer. *J Opt* 2016; 18(9): 095601.
  - [12] Zhu L, Wang J. Arbitrary manipulation of spatial amplitude and phase using phase-only spatial light modulators. *Sci Rep* 2015; 4: 7441.
  - [13] Devlin RC, Ambrosio A, Rubin A, Mueller JB, Capasso F. Arbitrary spin-to-orbital angular momentum conversion of light. *Science* 2017; 358: 896-901.
  - [14] Miao P, Zhang Z, Sun J, Walasik W, Longhi S, Litchintser NM, Feng L. Orbital angular momentum microlaser. *Science* 2016; 353: 464-467.
  - [15] Vaity P, Aadhi A, Singh RP. Formation of optical vortices through superposition of two Gaussian beams. *Appl Opt* 2013; 52(27): 6652-6656.
  - [16] Zhang J, Guo Z, Li R, Wang W, Zhang A, Liu J, Qu S, Gao J. Circular polarization analyzer based on the combined coaxial Archimedes' spiral structure. *Plasmonics* 2015; 10(6): 1256-1261.
  - [17] Zhang J, Guo Z, Zhou K, Ran L, Zhu L, Wang W, Sun Y, Shen F, Gao J, Liu S. Circular polarization analyzer based on an Archimedean nano-pinholes array. *Opt Express* 2015; 23(23): 30523-30531.
  - [18] Zhan H, Li J, Guo K, Guo Z. Generation of acoustic vortex beams with designed Fermat's spiral diffraction grating. *J Acoust Soc Am* 2019; 146(6): 4237-4243.
  - [19] Wang H, Liu L, Zhou C, Xu J, Zhang M, Teng S, Cai Y. Vortex beam generation with variable topological charge based on a spiral slit. *Nanophotonics*, 2019; 8(2): 214.
-

- 
- [20] Petrov DV. Vortex-edge dislocation interaction in a linear medium. *Opt Commun* 2001; 188(5-6): 307-312.
- [21] Petrov DV. Splitting of an edge dislocation by an optical vortex. *Opt Quantum Electron* 2002; 34: 759-773.
- [22] He D, Yan H, Lu B. Interaction of the vortex and edge dislocation embedded in a sosh-Gaussian beam. *Opt Commun* 2009; 282(20): 4035-4044.
- [23] Chen H, Wang W, Gao Z, Li W. Splitting of an edge dislocation by a vortex emergent from a nonparaxial beam. *J Opt Soc Am B* 2019; 36(10): 2804-2809.
- [24] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Kozlova ES. Three different types of astigmatic Hermite-Gaussian beams with orbital angular momentum. *J Opt* 2019; 21(11): 115601. DOI: 10.1088/2040-8986/ab42b5.
- [25] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex astigmatic Fourier-invariant Gaussian beams. *Opt Express* 2019; 27(2): 657-666. DOI: 10.1364/OE.27.000657.
- [26] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144(4-6): 210-213.
- [27] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Elliptic Gaussian optical vortices. *Phys Rev A* 2017; 95: 053805. DOI: 10.1103/PhysRevA.95.053805.
- [28] Lin J, Dellinger J, Genevet P, Cluzel B, de Fornel F, Capasso F. Cosine-Gauss plasmon beam: a localized long-range nondiffracting surface wave. *Phys Rev Lett* 2012; 109(9): 093904.
- 

#### *Authors' information*

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@smr.ru](mailto:kotlyar@smr.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Anton Gennadyevich Nalimov** (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 “Mathematical Modeling and Program Complexes”, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: [anton@smr.ru](mailto:anton@smr.ru).

---

*Received December 11, 2020. The final version – January 12, 2021.*

---