

ДРОБНЫЙ ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ ГАУССОВА ПУЧКА С ВНЕДРЕННЫМ ВНЕОСЕВЫМ ОПТИЧЕСКИМ ВИХРЕМ

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.П. Порфирьев^{1,2}, Е.Г. Абрамочкин³

¹Институт систем обработки изображений РАН –

филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

²Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия,

³Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки

Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН), Самара, Россия

Аннотация

Теоретически и экспериментально изучены асимметричные Гауссовы оптические вихри, которые формируются при дифракции Гауссова пучка на смещенной с оптической оси спиральной фазовой пластинке или амплитудной голограмме «с вилочкой». Показано, что в зависимости от величины смещения лазерный пучок имеет вид полумесяца, который при распространении вращается. Получено аналитическое выражение для орбитального углового момента такого пучка, который оказывается дробным. С увеличением смещения момент убывает квадратично. Результаты эксперимента качественно согласуются с теорией и численным моделированием.

Ключевые слова: дробный орбитальный угловой момент, Гауссов пучок, оптический вихрь, спиральная фазовая пластинка.

Цитирование: Котляр, В.В. Дробный орбитальный угловой момент Гауссова пучка с внедренным внеосевым оптическим вихрем / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев, Е.Г. Абрамочкин // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 1. – С. 22-29. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.

Введение

В [1, 2] А. Цайлингер предложил формировать пару фотонов (в ходе спонтанного параметрического рассеяния) в перепутанном состоянии по орбитальному угловому моменту (ОУМ) с помощью смещения центров Гауссова пучка и голограммы «с вилочкой», которая формирует оптические вихри. Он предположил, что при малом смещении между центрами формируется линейная комбинация Гауссова пучка и пучка Лагерра–Гаусса. В [3] также экспериментально показали, что можно формировать перепутанные по ОУМ стоксовый и антистоксовый фотоны с помощью четырехволнового смещения в ансамбле «горячих» атомов и при смещении центров Гауссова пучка и голограммы «с вилочкой». Известны также исследования трансформации оптических вихрей и в классическом свете. Под оптическим вихрем здесь понимается лазерный пучок с изолированным нулем интенсивности на оптической оси и спиральной фазой с целым топологическим зарядом. В [4] теоретически изучается влияние на оптический вихрь смещения вдоль оптической оси центра перетяжки Гауссова пучка от плоскости спиральной фазовой пластинки, совмещенной с дифракционной линзой (спиральная линза). В [5] экспериментально исследуется прохождение оптического вихря через набор малых отверстий в непрозрачном экране, центры которых лежат на окружности. Показано, что при этом вырожденный оптический вихрь n -го порядка распадается на n невырожденных оптических вихрей (1-го порядка). В [6] исследуется трансформация оптического вихря с помощью внесения в него разной степени эллиптичности. Эта работа [6] продолжает более ранние работы по исследованию эллиптических оптических вихрей [7, 8]. В [9] предложено формировать оптический вихрь с помощью набора малых отверстий в не-

прозрачном экране, центры которых расположены на спирали. Небольшие деформации направляющей спирали приводят к искажению формы оптического вихря.

Наиболее близкими по тематике к данной работе являются ранние статьи авторов [10–12]. В них рассматриваются теоретически и экспериментально трансформации оптического вихря, которые получаются в результате комплексного смещения исходной функции комплексной амплитуды в декартовой системе координат. Такое смещение приводит к асимметрии оптического вихря: вместо светового кольца (или «пончика») формируется полумесяц. В [10] комплексное смещение координат применено для пучков Бесселя, а в [11] – для пучков Лагерра–Гаусса. В [12] оптический вихрь n -го порядка преобразуется в n оптических вихрей 1-го порядка с помощью использования эллиптического Гауссова пучка, падающего на спиральную фазовую пластинку.

В данной работе теоретически и экспериментально изучается трансформация оптического вихря, предложенная в [1, 2], когда на амплитудную голограмму «с вилочкой» падает Гауссов пучок, центр перетяжки которого смещен в поперечной плоскости от центра «вилочки». Заметим, что в [1, 2] нет теории такого преобразования. В данной работе оптический вихрь, возникающий из-за смещения центров Гауссова пучка и голограммы «с вилочкой» (или центра спиральной фазовой пластинки), называется асимметричным Гауссовым оптическим вихрем (АГВ). Получено аналитическое выражение для ОУМ таких пучков и показано, что ОУМ таких пучков дробный, то есть световое поле представляет собой линейную комбинацию счетного набора оптических вихрей с целым топологическим зарядом. Если в таком состоянии будут находиться два фотона, то это состояние будет перепутанным по ОУМ. Заметим, что при ком-

плексном смещении координат ОУМ пучков Бесселя [10] и Лагерра–Гаусса [11] растет. Растет также ОУМ у эллиптического вихревого пучка Эрмита–Гаусса [12]. В отличие от них ОУМ асимметричного Гауссова вихря, описанного в данной работе, убывает с увеличением расстояния между центрами Гауссова пучка и спиральной фазовой пластинки.

1. Амплитуда Гауссова оптического вихря

Рассмотрим Гауссов пучок с амплитудой в перетяжке в виде

$$E_0(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \tag{1}$$

где (x, y) – декартовы координаты, w – радиус перетяжки. Пусть в пучок (1) внедрен оптический вихрь с топологическим зарядом n , смещенный на расстояние x_0 по оси x от центра Гауссова пучка. Амплитуда такого оптического вихря описывается выражением:

$$A_n(x, y) = \left[\frac{(x - x_0) + iy}{w} \right]^n. \tag{2}$$

Функцию пропускания (2) можно реализовать с помощью амплитудной голограммы «с вилочкой» [13]. Тогда с помощью преобразования Френеля можно получить амплитуду АГВ на расстоянии z от начальной плоскости (плоскости перетяжки Гауссова пучка) в цилиндрических координатах:

$$E_n(r, \varphi, z) = w^{-n} [q(z)]^{-(n+1)} [re^{i\varphi} - q(z)x_0]^n \times \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)} + \frac{ikr^2}{2R(z)}\right], \tag{3}$$

где k – волновое число света,

$$\begin{aligned} w^2(z) &= w^2 \left(1 + z^2/z_0^2\right), \\ R(z) &= z \left(1 + z_0^2/z^2\right), \\ q(z) &= 1 + iz/z_0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $z_0 = kw^2/2$ – расстояние Рэлея.

Из (3) видно, что амплитуда АГВ описывается двумя множителями, последний из которых представляет собой радиально-симметричный Гауссов пучок на расстоянии z от перетяжки с радиусом пучка $w(z)$ и радиусом кривизны волнового фронта $R(z)$. Множитель в (3), отвечающий за асимметрию пучка, выпишем отдельно:

$$F = (re^{i\varphi} - q(z)x_0)^n = \left[(r \cos \varphi - x_0) + i(r \sin \varphi - zx_0/z_0) \right]^n. \tag{5}$$

Распределение интенсивности поля (3) будет пропорционально квадрату модуля величины (5) и будет иметь вид:

$$I = |E_n(r, \varphi, z)|^2 = w^{-2n} |q(z)|^{-2(n+1)} \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right] \times \left[r^2 + |q(z)|^2 x_0^2 - 2rx_0 (\cos \varphi + (z/z_0) \sin \varphi) \right]^n. \tag{6}$$

Из (6) видно, что при $z=0$ множитель (5) имеет вид

$$|F|^2 = \left[r^2 + x_0^2 - 2rx_0 \cos \varphi \right]^n. \tag{7}$$

Выражение (7) вместе с Гауссовой экспонентой из (6) описывает неоднородное кольцо в виде полумесяца, у которого в точке $x=x_0$ имеется изолированный нуль интенсивности n -го порядка. При $x_0 > 0$ полумесяц расположен так, что максимальная интенсивность на нём (при фиксированном радиусе r) достигается при $\varphi = \pi$, а минимальная – при $\varphi = 0$ (и наоборот при $x_0 < 0$). На расстоянии от перетяжки, равном расстоянию Рэлея $z = z_0$, вместо (7) получим для множителя (5), отвечающего за асимметрию пучка, следующее выражение:

$$|F|^2 = \left[r^2 + 2x_0^2 - 2\sqrt{2}rx_0 \cos(\varphi - \pi/4) \right]^n. \tag{8}$$

Из (8) следует, что на расстоянии $z = z_0$ полумесяц повернулся на 45° против часовой стрелки. Максимум интенсивности на полумесяце лежит на луче под углом $\varphi = 5\pi/4$, а минимум – на луче под углом $\varphi = \pi/4$. При удалении на большое расстояние $z \gg z_0$ от перетяжки вместо (8) получим:

$$|F|^2 = \left[r^2 + (zx_0/z_0)^2 - 2(zx_0/z_0)r \sin \varphi \right]^n. \tag{9}$$

Из (9) видно, что в дальней зоне ($z \gg z_0$) дифракции полумесяц поворачивается на 90° против часовой стрелки, и максимум интенсивности лежит на луче $\varphi = 3\pi/2$, а минимум интенсивности – на луче $\varphi = \pi/2$.

Из (5) прямо следует, что изолированный нуль интенсивности АГВ имеет координаты:

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = x_0(z/z_0). \end{cases} \tag{10}$$

То есть изолированный нуль, лежащий в начальной плоскости на горизонтальной оси в точке $x=x_0$, при увеличении расстояния z движется перпендикулярно горизонтальной оси на бесконечность.

2. Дробный орбитальный угловой момент АГВ

В [1–3] экспериментально было продемонстрировано, что смещение центра Гауссова пучка относительно центра оптического вихря приводит к формированию перепутанных по орбитальному угловому моменту фотонов, то есть у АГВ должен быть дробный ОУМ. Покажем, что это действительно так. Так как при распространении лазерного пучка его ОУМ сохраняется, можно рассчитывать его в любой плоскости, например, в плоскости перетяжки. Можно показать, что энергия W_n АГВ (3) и проекция ОУМ J_{nz} на ось z будут равны:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |E_n(r, \varphi, z=0)|^2 r dr d\varphi = \\ &= (\pi w^2/2) (x_0/w)^{2n} \sum_{l=0}^n (C_n^l)^2 l! (w/\sqrt{2}x_0)^{2l} = \\ &= (\pi w^2/2) 2^{-n} n! L_n(-\xi^2), \end{aligned} \tag{11}$$

$$J_{nz} = \text{Im} \left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \bar{E}_n \frac{\partial E_n}{\partial \phi} r dr d\phi \right\} =$$

$$= n(\pi w^2/2)(x_0/w)^{2n} \sum_{l=1}^n C_n^l C_{n-1}^{l-1} l! (w/\sqrt{2}x_0)^{2l} = \quad (12)$$

$$= n(\pi w^2/2) 2^{-n} n! L_{n-1}(-\xi^2),$$

где $C_n^l = n!/l!(n-l)!$ – биномиальные коэффициенты, $L_n(\dots)$ – полиномы Лагерра и $\xi = \sqrt{2}x_0/w$. Из (11), (12) следует, что нормированный ОУМ асимметричного Гауссова вихря (3) будет равен:

$$\frac{J_{nz}}{W_n} = n \frac{\sum_{l=1}^n C_n^l C_{n-1}^{l-1} l! \xi^{-2l}}{\sum_{l=0}^n (C_n^l)^2 l! \xi^{-2l}} = n \frac{L_{n-1}(-\xi^2)}{L_n(-\xi^2)}. \quad (13)$$

Из (13) видно, что нормированный ОУМ АГВ в общем случае дробный. При $x_0 = 0$ из (13) следует хорошо известный результат, что ОУМ моды Лагерра–Гаусса [14] равен топологическому заряду n :

$$J_{nz}/W_n = n. \quad (14)$$

Из (13) найдем более простые выражения для $n = 1$ и $n = 2$, из которых можно сделать конкретные выводы о поведении ОУМ АГВ. Например, при $n = 1$ из (13) получим:

$$J_{1z}/W_1 = 1/\left[1 + (\sqrt{2}x_0/w)^2\right]. \quad (15)$$

Это выражение совпадает с полученным ранее в [15]. Из (15) следует, что при отсутствии смещения $x_0 = 0$ ОУМ равен 1, при смещении центра оптического вихря от центра Гауссова пучка на расстояние $x_0 = w/\sqrt{2}$ ОУМ пучка будет равен 1/2, а при большом смещении $x_0 \rightarrow \infty$ ОУМ стремится к нулю. Физически это понятно, так как оптический вихрь при достаточном удалении уже не принадлежит Гауссову пучку, а находится в области пространства, где нет световой энергии. При $n = 2$ из (13) получим:

$$J_{2z}/W_2 = 4(1 + \xi^2)/(2 + 4\xi^2 + \xi^4). \quad (16)$$

Из (16) следует, что при отсутствии смещения $x_0 = 0$ ($\xi = 0$) ОУМ равен 2, при $x_0 = w/\sqrt{2}$ ($\xi = 1$) ОУМ равен 8/7, а при большом смещении $x_0 \rightarrow \infty$ ($\xi \rightarrow \infty$) ОУМ близок к нулю. Из (13) следует, что для любого топологического заряда n при $x_0 \rightarrow \infty$ нормированный ОУМ убывает с x_0 квадратично.

Выше мы рассмотрели асимметричные Гауссовы оптические вихри, которые экспериментально можно реализовать при дифракции Гауссова пучка на амплитудной голограмме с характерной «вилочкой» в точке сингулярности [1, 2, 13]. Такая ситуация будет описываться уравнениями (1)–(3). Однако амплитудная голограмма с «вилочками» имеет невысокую эффективность (несколько процентов). Для увеличения эффективности при формировании АГВ ниже в эксперименте будет использована другая оптическая схема, когда Гауссов пучок падает на спиральную фазовую пластинку (СФП), реализованную с помощью жидкокристаллического

микродисплея. Такую экспериментальную схему также можно описать аналитически (Приложение), хотя формулы получаются более громоздкие.

3. Экспериментальное формирование АГВ

На рис. 1 показана экспериментальная схема. Излучение из твердотельного лазера с длиной волны $\lambda = 532$ нм направлялось через пинхол PH и линзу L_1 на дисплей пространственного модулятора света SLM, на котором была выведена фазовая функция СФП заданного порядка. Отражённый от модулятора пучок подвергался пространственной фильтрации с помощью системы линз L_2 и L_3 , а также диафрагмы D . Далее отфильтрованный лазерный пучок направлялся на линзу L_4 , которая фокусировала его на матрицу CMOS-камеры. Для получения интерферограмм в схему были добавлены светоделительные кубики BS_1 и BS_2 . Первый из них делил исходный пучок на два, один из которых направлялся на модулятор света, а второй оставался неизменным. Далее эти два пучка сводились в один с помощью второго светоделительного кубика, чтобы на камере можно было наблюдать картину их интерференции. Линза L_5 была использована для внесения в Гауссов пучок сферического волнового фронта. Диаметр перетяжки Гауссова пучка $2w = 1400$ мкм.

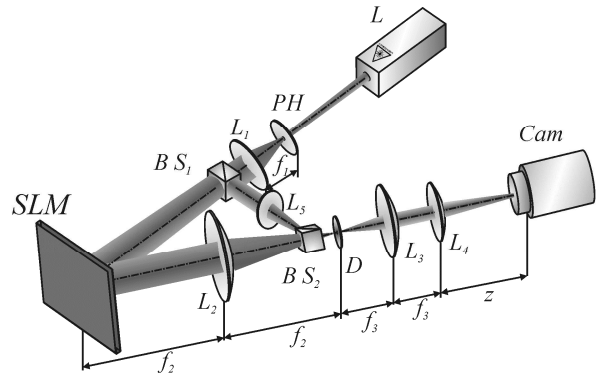


Рис. 1. Экспериментальная схема: L – твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH – пинхол (40 мкм), L_1, L_2, L_3, L_4 и L_5 – линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 150$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм, $f_4 = 250$ мм, $f_5 = 150$ мм), BS_1, BS_2 – светоделительные кубики, SLM – пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя – 8 мкм), D – диафрагма, выполняющая роль пространственного фильтра, Cam – видеокамера TourTek U3CMOS08500KPA (размер пикселя – 1,67 мкм)

В экспериментах исследовалось влияние смещения центра освещающего Гауссова пучка относительно центра спиральной фазовой пластинки, выведенной на дисплей модулятора света. На рис. 2–6 показаны сформированные в этих случаях распределения интенсивности в фокальной плоскости линзы с фокусным расстоянием $f = 250$ мм. Там же показаны соответствующие им интерферограммы, полученные в результате интерференции исследуемых пучков и Гауссова пучка со сферическим волновым фронтом. Размеры каждого кадра на всех рис. 2–6 составляют 750×750 мкм. Следует отметить, что из-за наличия светоделительного кубика на пути лазерного луча, отражённого от дисплея модуля-

тора, фокальная плоскость линзы L_2 смещается по направлению к модулятору света. Это приводит к тому, что на линзу L_4 падает сходящийся лазерный пучок, поэтому картины дифракции Фраунгофера мы наблюдали на расстоянии $z = 230$ мм от плоскости линзы L_4 .

На рис. 2 показаны распределения интенсивности (рис. 1а–г) и соответствующие им интерферограммы (рис. 1д–з) для оптических Гауссовых вихрей с топологическими зарядами n от 1 до 4 при отсутствии смещения между центрами СПФ и Гауссова пучка. Из рис. 2 видно, что картины оптических вихрей обладают радиальной симметрией, то есть сформированы хорошо известные картины типа «пончиков» с нулем интенсивности в центре.

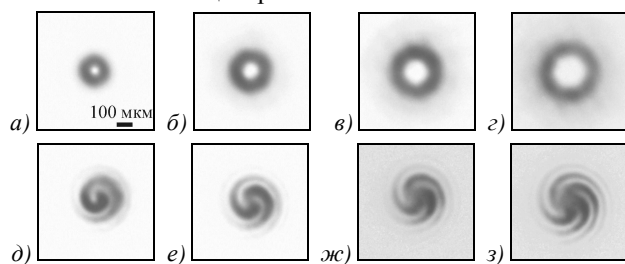


Рис. 2. Центр падающего пучка и центр СПФ совпадают ($x_0 = 0$). Верхний ряд – полученные распределения интенсивности для СПФ с топологическим зарядом: (а) $n = 1$, (б) $n = 2$, (в) $n = 3$, (г) $n = 4$. Нижний ряд – полученные интерферограммы для СПФ с топологическим зарядом: (д) $n = 1$, (е) $n = 2$, (ж) $n = 3$, (з) $n = 4$. Размеры картинок – 750×750 мкм

На рис. 3 показаны распределения интенсивности Гауссовых оптических вихрей с топологическими зарядами n от -1 до -4 при небольшом смещении центра СПФ от центра Гауссова пучка ($x_0 = 0,25w$). Из рис. 3 видно, что все «пончики» потеряли, хотя и не сильно, радиальную симметричность, а спиральные интерферограммы сменили направления «закруток» с «против часовой стрелки» на «по часовой стрелке» из-за того, что у оптических вихрей поменялся знак топологического заряда. Из рис. 3 видно, что минимальная интенсивность на неоднородном световом кольце лежит на луче под углом -90° к горизонтальной оси. Это согласуется с формулой (9).

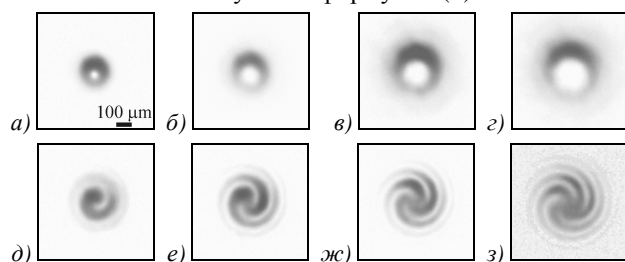


Рис. 3. Смещение центра падающего пучка от центра СПФ составляет $x_0 = 0,25w$. Верхний ряд – полученные распределения интенсивности для СПФ с топологическим зарядом: (а) $n = -1$, (б) $n = -2$, (в) $n = -3$, (г) $n = -4$. Нижний ряд – полученные интерферограммы для АГВ с топологическим зарядом: (д) $n = -1$, (е) $n = -2$, (ж) $n = -3$, (з) $n = -4$. Размеры картинок – 750×750 мкм

На рис. 4 показаны распределения интенсивности Гауссовых оптических вихрей с топологическими заря-

дами n от 1 до 4 при большом смещении центра СПФ от центра Гауссова пучка ($x_0 = 0,5w$).

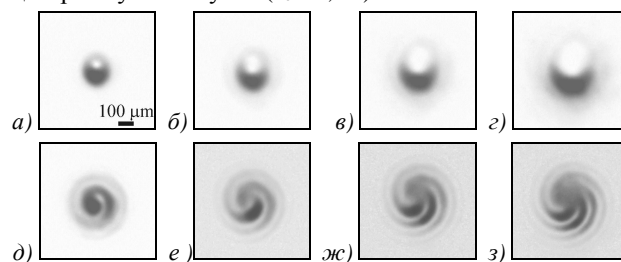


Рис. 4. Смещение центра падающего пучка от центра СПФ составляет $x_0 = 0,5w$. Верхний ряд – полученные распределения интенсивности для СПФ с топологическим зарядом: (а) $n = 1$, (б) $n = 2$, (в) $n = 3$, (г) $n = 4$. Нижний ряд – полученные интерферограммы для СПФ с топологическим зарядом: (д) $n = 1$, (е) $n = 2$, (ж) $n = 3$, (з) $n = 4$. Размеры картинок – 750×750 мкм

Из рис. 4 видно, что, во-первых, вместо «пончиков» появились «полумесяцы», и, во-вторых, из-за смены знака топологических зарядов минимальная точка интенсивности в неоднородном распределении интенсивности на кольце лежит на луче под углом 90° , в отличие от картин на рис. 3, в которых минимальная интенсивность на кольце лежит на луче под углом -90° .

На рис. 5 показаны распределения интенсивности Гауссовых оптических вихрей с топологическими зарядами n от 1 до 4 при еще большем смещении центра СПФ от центра Гауссова пучка ($x_0 = w$). Из рис. 5 видно, что вместо кольца (рис. 2) и полумесяца (рис. 4) получается искаженное фокусное пятно и на интерферограммах уже нет характерных для оптических вихрей спиралей. Это означает, что изолированный нуль интенсивности, вблизи которого сосредоточена фазовая сингулярность, сместился из области света в область тени.

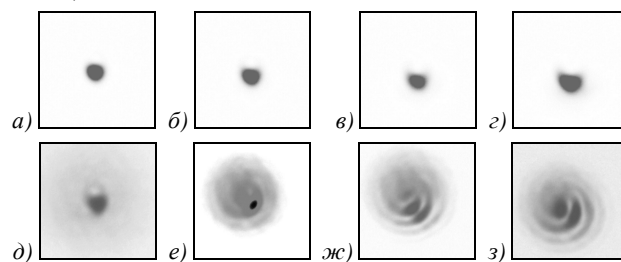


Рис. 5. Смещение центра падающего пучка от центра СПФ составляет $x_0 = w$. Верхний ряд – полученные распределения интенсивности для СПФ с топологическим зарядом: (а) $n = 1$, (б) $n = 2$, (в) $n = 3$, (г) $n = 4$. Нижний ряд – полученные интерферограммы для СПФ с топологическим зарядом: (д) $n = 1$, (е) $n = 2$, (ж) $n = 3$, (з) $n = 4$. Размеры картинок – 750×750 мкм

На рис. 6 показаны распределения интенсивности и интерферограммы АГВ с $n = 5$ при разных величинах смещения x_0 . Из рис. 6 на интерферограммах видно, что центр сингулярности смещается из области интерферограммы. При этом постепенно пропадает спиральная структура полос интерферограммы.

Заключение

В работе теоретически и экспериментально исследованы асимметричные Гауссовы оптические вихри,

распределение интенсивности у которых имеет вид полумесяца.

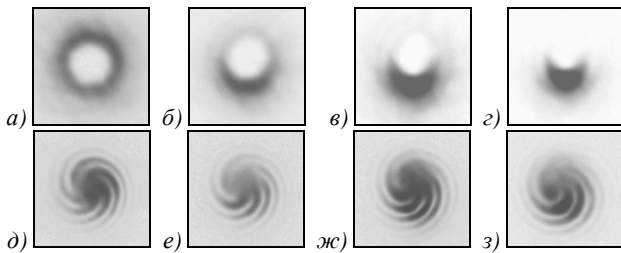


Рис. 6. Распределение интенсивности (верхний ряд) и соответствующие интерферограммы (нижний ряд) для Гауссова оптического вихря с топологическим зарядом $n = 5$ при разных смещениях между центрами СФП и Гауссова пучка: $x_0 = 0$ (а, д), $x_0 = 0,25w$ (б, е), $x_0 = 0,5w$ (в, ж), $x_0 = 0,75w$ (г, з). Размеры картинок – 750×750 мкм

Они получаются при внедрении оптического вихря (изолированного нуля интенсивности с фазовой сингулярностью) в перетяжку Гауссова пучка, так чтобы координаты нуля интенсивности не совпадали с центром перетяжки. Показано, что при распространении такого асимметричного Гауссова пучка нуль интенсивности смещается на бесконечность по прямой, перпендикулярной вектору смещения. Распределение интенсивности вращается таким образом, что на расстоянии Рэлея поворачивается на 45° , а в дальней зоне – на 90° по отношению к положению в начальной плоскости. Получены аналитические выражения для комплексных амплитуд таких пучков, сформированных с помощью спиральной фазовой пластинки и амплитудной голограммы «с вилочкой». Получено аналитическое выражение для орбитального углового момента. Орбитальный угловой момент асимметричного Гауссова оптического вихря дробный и уменьшается квадратично с увеличением расстояния между нулем интенсивности в плоскости перетяжки и центром Гауссова пучка. Уменьшение ОУМ из-за увеличения расстояния между центром Гауссова пучка и координатами изолированного нуля (2), внедренного в Гауссов пучок, объясняется тем, что оптический вихрь внедряется в область с малой световой энергией. Эксперимент качественно согласуется в теории. Применять такие лазерные пучки с дробным ОУМ можно в качестве накачки нелинейного кристалла для формирования путем спонтанного параметрического рассеяния пары фотонов с перепутанным ОУМ [1, 2]. Отличие АГВ от асимметричных пучков Бесселя [10] и Лагерра–Гаусса [11] в том, что ОУМ последних растет линейно [10] и квадратично [11] с увеличением степени асимметрии пучка, а ОУМ АГВ убывает с ростом смещения между центрами пучка и голограммы «с вилочкой».

Приложение

Рассмотрим падение Гауссова пучка (1) на СФП с номером n , центр которой смещен от центра Гауссова пучка на величину x_0 и пропускание которой описывается выражением:

$$B_n(x, y) = \exp[in \arg(x - x_0 + iy)] = [(x - x_0) + iy]^n / [(x - x_0)^2 + y^2]^{n/2}. \quad (П1)$$

На расстоянии z от СФП амплитуду светового поля АГВ можно записать с помощью преобразования Френеля:

$$E_n(x', y', z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) B_n(x, y) \times \exp\left(ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right) \exp\left(-ik \frac{xx' + yy'}{z}\right) dx dy. \quad (П2)$$

Переходя к полярным координатам, двойной интеграл в (П2) можно вычислить с помощью справочного интеграла [16]

$$\int_0^{\infty} e^{-pr^2} J_n(cr) r dr = (\sqrt{\pi t} / 2\sqrt{2} p) \times \exp(-t) [I_{(n-1)/2}(t) - I_{(n+1)/2}(t)], \quad (П3)$$

где $t = c^2/(8p)$, а $J_n(x)$ и $I_n(x)$ – функция Бесселя и модифицированная функция Бесселя n -го порядка.

Тогда вместо (П2) получим:

$$E_n(x', y', z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}q(z)} \left(\frac{iA - B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^n \times \exp\left[-\left(\frac{x_0}{w}\right)^2 + ik \frac{x'^2 + y'^2}{2z}\right] \times \sqrt{t} \exp(-t) [I_{(n-1)/2}(t) - I_{(n+1)/2}(t)], \quad (П4)$$

где

$$A = -\frac{kx'}{z} + \frac{2ix_0}{w^2}, \quad B = -\frac{ky'}{z}, \quad q(z) = 1 + \frac{iz}{z_0}, \quad t = \frac{\text{Re} + i \text{Im}}{2|q(z)|^2}, \quad (П5)$$

$$\text{Re} = \frac{x'^2 + y'^2}{w^2} - \left(\frac{x_0 z}{w z_0}\right)^2 - 2\left(\frac{x_0 x'}{w^2}\right),$$

$$\text{Im} = \left(\frac{x'^2 + y'^2}{w^2}\right)\left(\frac{z_0}{z}\right) - \left(\frac{x_0}{w}\right)^2 \left(\frac{z}{z_0}\right) + \left(\frac{x_0 x'}{w^2}\right)\left(\frac{z}{z_0}\right).$$

Аргумент t в функции Бесселя в (П4) комплексный, и поэтому трудно сделать определенные выводы об амплитуде АГВ. Из (П4) только видно, что аргумент t зависит от переменной x' и от величины смещения x_0 . Это означает, что вид амплитуды (П4) будет асимметричный, и степень асимметрии будет пропорциональна смещению x_0 . Также видно, что при отсутствии смещения ($x_0=0$) вид амплитуды совпадает с точностью до постоянной с радиально симметричным Гауссовым оптическим вихрем [17]:

$$E_n(r, \varphi, z) = \frac{\sqrt{\pi}(-i)^n}{\sqrt{2}q(z)} \exp\left(in\varphi + \frac{ikr^2}{2z}\right) \times \sqrt{t'} \exp(-t') [I_{(n-1)/2}(t') - I_{(n+1)/2}(t')], \quad (П6)$$

где

$$t' = \frac{(r/w)^2 (1 + iz_0/z)}{2|q(z)|^2}.$$

Так как в эксперименте (рис. 1) измерение распределения интенсивности АГВ происходит в фокальной плоскости линзы, то для сравнения с экспериментом получим вместо (П4) выражение для амплитуды АГВ в дальней зоне дифракции ($z \gg z_0$). Из (П5) получим вначале выражение для аргумента t при $z \gg z_0$:

$$t' = (krw/2\sqrt{2}f)^2 - (x_0/\sqrt{2}w)^2, \quad (\text{П7})$$

где f – фокусное расстояние сферической линзы. Из (П7) видно, что аргумент функций Бесселя и Гауссовой экспоненты в (П4) не зависит от полярного угла φ . Поэтому за асимметрию распределения интенсивности в фокусе сферической линзы отвечает только множитель (П4), аналогичный множителю F в (5) и равный

$$F' = \left[\frac{iA - B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right]^n = \left[\frac{\frac{ky}{f} - \frac{2x_0}{w^2} - i\frac{kx}{f}}{\sqrt{\left(\frac{kx}{f} - i\frac{2x_0}{w^2}\right)^2 + \left(\frac{ky}{f}\right)^2}} \right]^n. \quad (\text{П8})$$

Из (П8) видно, что множитель зависит от переменных x и y несимметрично, и поэтому в интенсивности должна появиться зависимость от полярного угла. Действительно, интенсивность поля (П4) будет пропорциональна модулю квадрата множителя F'

$$I_F = |F'|^2 = \left[\frac{\left(\frac{4x_0^2}{w^4} + \frac{k^2 r^2}{f^2}\right) - \frac{4kx_0 r \sin \varphi}{fw^2}}{\sqrt{\left(\frac{k^2 r^2}{f^2} - \frac{4x_0^2}{w^4}\right)^2 + \left(\frac{4kx_0 r}{fw^2}\right)^2 \cos^2 \varphi}} \right]^n. \quad (\text{П9})$$

Из выражения (П9) видно, что минимум числителя (при постоянном r) достигается при $\varphi = \pi/2$, а максимум – при $\varphi = -\pi/2$. Это означает, что картина дифракции в виде полумесяца повернулась на 90° против часовой стрелки при распространении АГВ от плоскости СФП до фокальной плоскости (так как в перетяжке нуля интенсивности находился на горизонтальной оси в точке $x = x_0$). При этом изолированный нуль интенсивности в фокальной плоскости имеет координаты:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = x_0(f/z_0). \end{cases} \quad (\text{П10})$$

Координаты на оси y нуля интенсивности в (10) и (П10) совпадают, если заменить z на f . Также совпадают выражения (9) и числитель в (П9), если опять заменить z на f и умножить числитель (П9) на $(f/k)^2$. Таким образом, мы показали, что качественно поведение АГВ совпадает при дифракции Гауссова пучка на смещенной СФП (П1) и амплитудной голограмме с «вилочкой» (2).

Благодарности

Работа частично поддержана Министерством образования и науки РФ, грантами Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-9498.2016.9) и молодых кандидатов наук (МК-2390.2017.2), а также грантов РФФИ 15-07-01174, 15-47-02492, 16-29-11698, 16-47-630483.

Литература

1. **Mair, A.** Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // Nature. – 2001. – Vol. 412. – P. 313-316. – DOI: 10.1038/35085529.
2. **Vaziri, A.** Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments / A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. – 2002. – Vol. 4(2). – P. S47-S51.
3. **Chen, Q.-F.** Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble / Q.-F. Chen, B.-S. Shi, Y.-S. Zhang, G.-G. Guo // Physical Review A. – 2008. – Vol. 78. – 053810. – DOI: 10.1103/PhysRevA.78.053810.
4. **Janicijevic, L.** Gaussian laser beam transformation into an optical vortex beam by helical lens / L. Janicijevic, S. Topuzoski // Journal of Modern Optics. – 2016. – Vol. 63(2). – P. 164-176. – DOI: 10.1080/09500340.2015.1085106.
5. **Ricci, F.** Instability of higher-order optical vortices analyzed with a multi-pinhole interferometer / F. Ricci, W. Löffler, M.P. van Exter // Optics Express. – 2012. – Vol. 20(20). – P. 22961-22975. – DOI: 10.1364/OE.20.022961.
6. **Kumar, A.** Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices / A. Kumar, P. Vaity, R.P. Singh // Optics Express. – 2011. – Vol. 19(7). – P. 6182-6190. – DOI: 10.1364/OE.19.006182.
7. **Dennis, M.R.** Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam / M.R. Dennis // Optics Letters. – 2006. – Vol. 31(9). – P. 1325-1327. – DOI: 10.1364/OL.31.001325.
8. **Kotlyar, V.V.** Elliptic Laguerre-Gaussian beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Almazov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // Journal of the Optical Society of America A. – 2006. – Vol. 23(1). – P. 43-56. – DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
9. **Li, Z.** Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination / Z. Li, M. Zhang, G. Liang, X. Li, X. Chen, C. Cheng // Optics Express. – 2013. – Vol. 21(13). – P. 15755-15764. – DOI: 10.1364/OE.21.015755.
10. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39(8). – P. 2395-2398. – DOI: 10.1364/OL.39.002395.
11. **Kovalev, A.A.** Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // Physical Review A. – 2016. – Vol. 93(6). – 063858. – DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
12. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40(5). – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.
13. **Баженов, В.Ю.** Лазерные пучки с винтовыми дислокациями волнового фронта / В.Ю. Баженов, М.В. Васнецов, М.С. Соскин // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – Т. 52, Вып. 8. – С. 1037-1039.
14. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersberger, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45(11). – P. 8185-8189. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.

15. **Kotlyar, V.V.** Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31(2). – P. 274-282. – DOI: 10.1364/JOSAA.31.000274.
16. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марищев. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
17. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.A. Soifer, H. Elfstrom, J. Turunen // Journal of the Optical Society of America A. – 2005. – Vol. 22(5). – P. 849-861. – DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.

Сведения об авторах

Сведения об авторе **Котляр Виктор Викторович** см. стр. 10 этого выпуска.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru.

Порфирьев Алексей Петрович, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Ассистент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование. E-mail: porfirev.alexey@smr.ru.

Абрамочкин Евгений Григорьевич, 1962 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Математическая физика». Доктор физико-математических наук (2006 год), работает ведущим научным сотрудником Самарского филиала ФГБУН Физического института имени П.Н. Лебедева РАН. В списке научных работ около 50 статей. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики. E-mail: ega@fian.smr.ru.

ГРПТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 30 декабря 2016 г. Окончательный вариант – 9 февраля 2017 г.

FRACTIONAL ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF A GAUSSIAN BEAM WITH AN EMBEDDED OFF-AXIS OPTICAL VORTEX

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.P. Porfirev^{1,2}, E.G. Abramochkin³

¹Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,

²Samara National Research University, Samara, Russia,

³Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Samara, Russia

Abstract

We theoretically and experimentally study asymmetric Gaussian optical vortices generated via diffracting a Gaussian beam by an off-axis spiral phase plate or amplitude "fork" hologram. It is shown that depending on the magnitude of the off-axis shift the laser beam can acquire a crescent-shaped cross-section, which rotates on propagation. We obtain an analytical expression for the orbital angular momentum (OAM) of such a beam, which appears to be fractional. We show that with increasing off-axis shift, the OAM decreases parabolically. The experimental results are in qualitative agreement with theory and numerical simulation.

Keywords: fractional orbital angular momentum, Gaussian beam, optical vortex, spiral phase plate.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Abramochkin EG. Fractional orbital angular momentum of a Gaussian beam with an embedded off-axis optical vortex. Computer Optics 2017; 41(1): 22-29. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.

Acknowledgements: The work was partially funded by the Russian Federation Ministry of Education and Science, Presidential grants for support of leading scientific schools (NSH-9498.2016.9) and young candidates of sciences (МК-2390.2017.2) and the Russian Foundation of Basic Research Grants (15-07-01174, 15-47-02492, 16-29-11698, 16-47-630483).

References

- [1] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412: 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [2] Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments. *J Opt B: Quant Semicl Opt* 2002; 4(2): S47-51.
- [3] Chen Q-F, Shi B-S, Zhang Y-S, Guo G-G. Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble. *Phys Rev A* 2008; 78: 053810. DOI: 10.1103/PhysRevA.78.053810.
- [4] Janicijevic L, Topuzoski S. Gaussian laser beam transformation into an optical vortex beam by helical lens. *J Mod Opt* 2016; 63(2): 164-76. DOI: 10.1080/09500340.2015.1085106.
- [5] Ricci F, Löffler W, van Exter MP. Instability of higher-order optical vortices analyzed with a multi-pinhole interferometer. *Opt Express* 2012; 20(20): 22961-22975. DOI: 10.1364/OE.20.022961.
- [6] Kumar A, Vaity P, Singh RP. Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices. *Opt Express* 2011; 19(7): 6182-6190. DOI: 10.1364/OE.19.006182.
- [7] Dennis MR. Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam. *Opt Lett* 2006; 31(9): 1325-1327. DOI: 10.1364/OL.31.001325.
- [8] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptic Laguerre-Gaussian beams. *JOSA A* 2006; 23(1): 43-56. DOI: 10.1364/JOSAA.23.000043.
- [9] Li Z, Zhang M, Liang G, Li X, Chen X, Cheng C. Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination. *Opt Express* 2013; 21(13): 15755-15764. DOI: 10.1364/OE.21.015755.
- [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Opt Lett* 2014; 39(8): 2395-2398. DOI: 10.1364/OL.39.002395.
- [11] Kovalev AA, Kotlyar VV, Pofirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. *Phys Rev A* 2016; 93(6): 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
- [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite-Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
- [13] Bazhenov VYu, Vasnetsov MV, Soskin MS. Laser beams with screw dislocations in their wavefront. *JETP Letters* 1990; 52(8): 429-431.
- [14] Allen L, Beijersberger MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [15] Kotlyar VV, Kovalev AA. Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum. *JOSA A* 2014; 31(2): 274-282. DOI: 10.1364/JOSAA.31.000274.
- [16] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series, Special Functions*. New York: Gordon and Breach; 1986. ISBN: 978-2881240904.
- [17] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *JOSA A* 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.

Authors' information

The information about author **Victor Victorovich Kotlyar** you can find on page 11 of this issue.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: alanko@smr.ru.

Alexey Petrovich Porfirev (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an assistant professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include diffractive optics and optical manipulation. E-mail: porfirev.alexey@smr.ru.

Eugeny Grigor'evich Abramochkin (b. 1962), graduated (1984) from Kuibyshev State University, majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of the P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests are related with complex analysis, special functions, and theory of mathematical physics equations. E-mail: ega@fian.smr.ru.

Received December 30, 2016. The final version – February 9, 2017.