

# Гигантские всплески и провалы орбитального углового момента в устойчивых к простому астигматизму структурированных Лагерр–Гауссовых пучках

А.В. Воляр<sup>1</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>2</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4;

<sup>2</sup> Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки

Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН),

443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

## Аннотация

В статье исследуются условия формирования астигматически инвариантных структурированных Лагерр–Гауссовых пучков в случае простого астигматизма. Теоретически и экспериментально найдены условия астигматической инвариантности: фазовый параметр  $\theta$  структурированного Лагерр–Гауссова пучка равен арктангенсу отношения длины Рэлея  $z_0$  и фокусного расстояния  $f_{cy}$  цилиндрической линзы для единичного  $\varepsilon = 1$  амплитудного параметра. Для остальных значений амплитудного параметра  $\varepsilon \neq 1$  условие астигматической инвариантности задается равенством орбитального углового момента структурированного Лагерр–Гауссова и астигматически инвариантных структурированных Лагерр–Гауссовых пучков. Также обнаружены резкие всплески и провалы орбитального углового момента в астигматически инвариантных структурированных Лагерр–Гауссовых пучках в области, где орбитальный угловой момент обращается в ноль. Высота и глубина всплесков и провалов значительно превышают максимальные и минимальные значения орбитального углового момента в обычных структурированных Лагерр–Гауссовых пучках при заданной параметризации. Показано, что возникновение всплесков и провалов орбитального углового момента вызвано радикальной перестройкой спектра Лагерр–Гауссовых мод в виде их жесткого упорядочения. Теоретический расчет, сопровождаемый компьютерным моделированием, и эксперимент хорошо согласуются друг с другом.

**Ключевые слова:** структурная устойчивость, топологический заряд, орбитальный угловой момент, спектр вихрей.

**Цитирование:** Воляр, А.В. Гигантские всплески и провалы орбитального углового момента в устойчивых к простому астигматизму в структурированных Лагерр–Гауссовых пучках / А.В. Воляр, Е.Г. Абрамочкин, Я.Е. Акимова, М.В. Брецько // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 3. – С. 350-360. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1243.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Akimova YE, Bretsko MV. Huge spikes and dips of the orbital angular momentum in structured Laguerre-Gaussian beams resistant to simple astigmatism. Computer Optics 2023; 47(3): 350-360. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1243.

## Введение

Удивительные свойства структурированных сингулярных пучков [1, 2] содержат в себе множество степеней свободы по сравнению со стандартными вихревыми и безвихревыми пучками Лагерра–Гаусса (ЛГ), Эрмита–Гаусса (ЭГ), Айнса–Гаусса и другими [3, 4] быстро расширяют области их применения в фотонике и оптоинформатике, в оптической связи [5], оптических пинцетах [6], квантовой запутанности [7] и в других областях науки и техники. Как правило, амплитуды и фазы стандартных сингулярных мод в структурированных пучках строго согласованы, что делает их структурно устойчивыми к распространению в свободном пространстве [8–11], в то время как управление потоком энергии способствует их устойчивости [2, 12] к внешним возмущениям или переходам в новые структурно стабильные состояния [13].

Простейший способ преобразования стандартных ЛГ-пучков в структурированные ЛГ (сЛГ) пучки без

потери их структурной устойчивости заключается в следующем. Возьмём стандартный ЛГ-пучок и запишем его разложение по базису ЭГ-мод [14]:

$$LG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) = A \sum_{k=0}^{2n+\ell} (\pm i)^k \lambda_k HG_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $n, \pm\ell$  – радиальный и азимутальный индексы ЛГ-мод,  $\mathbf{r} = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ,  $A = (-1)^n 2^{-2n-3\ell/2}/n!$ ,  $\lambda_k = 2^k P_k^{(n+\ell-k, n+k)}(0)$  – целые числа, выражающиеся через полиномы Якоби (можно показать, что  $\lambda_k = \llbracket t^k \rrbracket \{ (1+t)^{n+\ell} (1-t)^n \}$ , т.е.  $\lambda_k$  – это коэффициент при  $t^k$  в разложении произведения биномов). Комплексные амплитуды ЛГ- и ЭГ-мод имеют вид

$$LG_{p,\pm\ell}(\mathbf{r}) = \exp(-r^2) (re^{\pm i\varphi})^\ell L_p^\ell(2r^2),$$

$$HG_{n,m}(\mathbf{r}) = \exp(-r^2) H_n(\sqrt{2}x) H_m(\sqrt{2}y).$$

Каждая ЭГ-мода в волновой композиции (1) может рассматриваться как отдельная степень свободы,

способная поддерживать большие потоки информации. Чтобы учесть изменение коэффициентов каждой ЭГ-моды, удобно использовать двухпараметрическую функцию возмущения:  $\varepsilon_k(\varepsilon, \theta) = 1 + \varepsilon e^{ik\theta}$ , что переводит стандартный ЛГ-пучок в его сЛГ-аналог:

$$\begin{aligned} sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) &= A \sum_{k=0}^{2n+\ell} i^k \lambda_k \varepsilon_k(\varepsilon, \theta) HG_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r}) = \\ &= LG_{n,\ell}(\mathbf{r}) + \varepsilon A \sum_{k=0}^{2n+\ell} i^k \lambda_k e^{ik\theta} HG_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  и  $\theta$  представляют амплитудный и фазовый параметр соответственно. Здесь и далее мы будем рассматривать для простоты только случай положительного азимутального индекса.

Преобразование (2) легко реализовать на практике с помощью пространственного модулятора света [15]. Это новое семейство параксиальных пучков обладает рядом неожиданных свойств. Прежде всего, прямой, но громоздкий расчёт [16] превращает выражение (2) в сумму двух стандартных гибридных пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ) [8] с различными управляющими параметрами:

$$\begin{aligned} sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) &= \frac{(-1)^n}{2^{n+\ell} n!} \left\{ HLG_{n+\ell,n}(\mathbf{r}|\pi/4) + \right. \\ &\left. + \varepsilon (-i)^{n+\ell} e^{i(2n+\ell)\Theta} HLG_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\Theta) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Theta = \theta/2 - \pi/4$  и  $\mathbf{R}_\alpha - (2 \times 2)$ -матрица вращения на угол  $\alpha$ . Поскольку для управляющего параметра  $\pi/4$  гибридная ЭЛГ-мода превращается в ЛГ-моду,

$$HLG_{n+\ell,n}(\mathbf{r}|\pi/4) = (-1)^n 2^{n+\ell} n! \cdot LG_{n,\ell}(\mathbf{r}),$$

то возмущающее воздействие  $\varepsilon_k(\varepsilon, \theta)$  в каждой ЭГ-моды переводит ЛГ-моду в суперпозицию той же ЛГ-моды и гибридной ЭЛГ-моды, повернутой на угол  $\pi/4$ , с управляющим параметром  $\Theta$ . Важно отметить, что вариация управляющего параметра вызывает быстрые осцилляции орбитального углового момента (ОУМ), что соответствует быстрым переходам сЛГ-пучка в новые структурно устойчивые состояния [16]. Тем не менее, несмотря на быстрые осцилляции ОУМ, связанные с изменением фазового параметра  $\theta$ , сЛГ-пучок имеет ряд инвариантов в виде сохранения модуля топологического заряда (ТЗ). В представленной статье мы затрагиваем проблему инвариантов сЛГ-пучка, подверженного внешним возмущениям в виде астигматического преобразования, например, при прохождении пучка через цилиндрическую линзу.

Вообще говоря, некоторые свойства астигматических преобразований стандартных сингулярных пучков уже рассматривались различными авторами (см., например, ссылки [2, 14, 17, 18]). Было обнаружено, что астигматическая система цилиндрических линз способна преобразовывать ЭГ-пучки в ЛГ-пучки [19], а также может быть использована для измерения ТЗ

оптических вихрей [20, 21]. Более того, общее астигматическое преобразование ЭГ-пучков на цилиндрической линзе может преобразовывать его в гибридные ЭЛГ-пучки за счёт поворота оси симметрии линзы на угол  $\alpha$ , который становится его управляющим параметром, при этом простой астигматизм ( $\alpha = 0, \pi/2$ ) не изменяет состояние ЭГ-пучка [14, 17, 22]. С другой стороны, в работе [23] рассмотрены возможности экспериментального разделения внутренних и внешних вкладов в ОУМ оптических вихрей, сдвигов их центров тяжести и астигматизма на основе метода измерения моментов интенсивности второго порядка. Однако устойчивость отдельной ЭГ-моды к простому астигматизму не означает, что астигматическое преобразование оставляет неизменной согласованную по фазам и амплитудам композицию ЭГ-мод. Таким образом, целью нашей статьи является исследование условий устойчивости семейства сЛГ-пучков к простым астигматическим преобразованиям и возникающих в них резких всплесков и провалов орбитального углового момента.

### 1. Астигматические преобразования сЛГ-пучков и их инварианты

Пусть структурированный сЛГ-пучок распространяется через астигматическую систему с функцией астигматического влияния

$$\psi(\rho, \phi) = (\xi^2 - \eta^2) \cos 2\phi + 2\xi\eta \sin 2\phi, \quad (4)$$

где  $\rho = (\xi, \eta)$  – координаты в астигматическом элементе (например, цилиндрической линзе), в то время как  $\phi$  задаёт угловое положение осей цилиндрической линзы. Поскольку сЛГ-пучок представлен в уравнении (3) как сумма двух ЭЛГ-мод, то удобно использовать известный результат общего астигматического преобразования ЭЛГ-моды [8]. Применяя  $\psi(\rho, 0) = (\xi^2 - \eta^2)$  к сЛГ-пучку (см. Приложение А), мы получаем комплексную амплитуду астигматического сЛГ (асЛГ) пучка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\mathbf{r}, \rho) + ib\psi(\rho, 0)} sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) d^2\rho &= \frac{(-i)^{2n+\ell}}{2\sqrt{1+b^2}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{ib\psi(\mathbf{r}, 0)}{4(1+b^2)}\right\} e^{i(2n+\ell)\beta} asLG_{n,\ell}\left(\frac{\mathbf{r}}{2\sqrt{1+b^2}}, \varepsilon, \theta, \beta\right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} asLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta, \beta) &= e^{-i(2n+\ell)\beta} \times \\ &\times \frac{(-1)^n}{2^{n+\ell} n!} \left\{ e^{i\ell\pi/4} HLG_{n+\ell,n}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\pi/4 - \beta) + \right. \\ &\left. + \varepsilon (-i)^{n+\ell} e^{i(2n+\ell)\Theta} HLG_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\Theta - \beta) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\beta = \arctg b$ . Параметр  $\beta$  мы будем называть астигматическим углом или астигматическим параметром. Его не следует путать с углом  $\phi$  в уравнении (4), который является управляющим параметром гибридного ЭЛГ-пучка. Известно [17], что угол  $\phi$  задает угол между осью цилиндрической линзы и осью  $u$  в экспе-

рименте. Для простого астигматизма управляющий параметр  $\phi=0$ , в то время как угол  $\beta$  вводится формально через параметры астигматического элемента  $b$  (см. параграф Эксперимент).

Мы вполне осознанно ввели множители  $\exp(\pm i(2n+\ell)\beta)$  и разнесли их в (5) и (6), поскольку тогда в терминах ЭГ-мод асЛГ-пучок принимает вид, похожий на сЛГ-пучок (2):

$$\begin{aligned} \text{asLG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta, \beta) &= \\ &= A \sum_{k=0}^{2n+\ell} i^k \lambda_k e^{-i2k\beta} (1 + \varepsilon e^{ik\theta}) \text{HG}_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7)$$

В частности,  $\text{asLG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta, 0) = \text{sLG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta)$ .

Нельзя не отметить, что композиция ЭГ-мод испытывает довольно радикальные преобразования картины интенсивности асЛГ-пучков при появлении параметра  $\beta$ , как иллюстрирует рис. 1а, б. Чтобы получить условие для инвариантности к простому астигматизму в асЛГ-пучке, необходимо потребовать, чтобы фазовый параметр  $\theta$  или параметр астигматизма  $\beta$  исчезли из комплексной амплитуды (6). Это выполняется, если

$$\theta = 2 \arctg b = 2\beta, \quad \varepsilon = 1. \quad (8)$$

Действительно, подставляя в уравнение (7) условие (8), мы получаем сопряжённый сЛГ-пучок, у которого сделано зеркальное отражение второго аргумента,  $y \rightarrow -y$ :

$$\begin{aligned} \text{asLG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, 1, \theta, \theta/2) &= \\ &= A \sum_{k=0}^{2n+\ell} i^k \lambda_k (1 + e^{-ik\theta}) \text{HG}_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r}) = \\ &= A \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-i)^k \lambda_k (1 + e^{-ik\theta}) \text{HG}_{2n+\ell-k,k}(x, -y) = \\ &= \text{sLG}_{n,\ell}^*(x, -y, 1, \theta). \end{aligned} \quad (9)$$

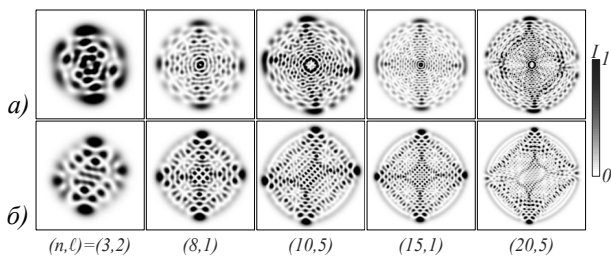


Рис. 1. Компьютерное моделирование сЛГ-пучков (а) и результат их астигматического преобразования при  $\beta = \pi/3$  (б) для  $\theta = \pi/4$ ,  $\varepsilon = 1$  и различных значений индексов  $(n, \ell)$

Это означает, что для сЛГ-пучка с любыми радиальным и азимутальным индексами всегда существует пара управляющих параметров  $\theta$  и  $\beta$ , при которых он превращается в астигматически инвариантный пучок с точностью до зеркального отражения  $y \rightarrow -y$  в системе с простым астигматизмом  $b$ .

Сравнение картин интенсивности сЛГ-пучков (рис. 2а–в) и асЛГ-пучков (рис. 2г–е) при выполне-

нии условия (8) показано на рис. 2, в то время как интерференционные картины указывают на сохранение знаков ТЗ. Мы видим, что структура картин интенсивности в целом не изменилась, но наблюдается зеркальное отражение относительно оси абсцисс. Также видим, что «вилки» интерференционной картины не изменили направления ветвей, за исключением небольших смещений их центров. Это означает, что ТЗ вихревых мод в асЛГ-пучке не изменили свой знак.

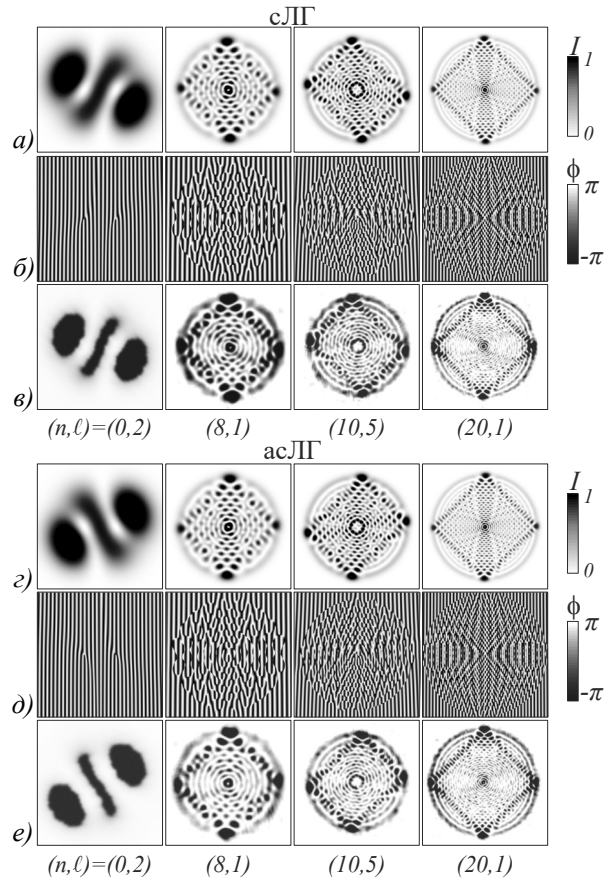


Рис. 2. Теоретические (а, г) и экспериментальные (в, е) картины интенсивности сЛГ- и астигматически инвариантных сЛГ-пучков для различных  $(n, \ell)$  с амплитудным  $\varepsilon = 1$ , фазовым  $\theta = \pi/2$  и астигматическим  $\beta = \pi/4$  параметрами, а также их интерференционные картины (б, д)

Для вычисления ОУМ асЛГ-пучков воспользуемся представлением гибридных ЭЛГ-пучков в базисе ЛГ-мод:

$$\text{asLG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta, \beta) = \sum_{k=0}^{2n+\ell} b_k(\varepsilon, \theta, \beta) \text{LG}_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r}), \quad (10)$$

где  $\min = \min(2n+\ell-2k, k)$  и коэффициенты  $b_k$  найдены в Приложении Б.

Разложение асЛГ-пучка (10) позволяет нам записать ОУМ в виде

$$\ell_z = \frac{\sum_{k=0}^{2n+\ell} (2n+\ell-2k) |b_k(\varepsilon, \theta, \beta)|^2 \|\text{LG}_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r})\|^2}{\sum_{k=0}^{2n+\ell} |b_k(\varepsilon, \theta, \beta)|^2 \|\text{LG}_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r})\|^2}, \quad (11)$$

где  $\|LG_{n,\pm m}(\mathbf{r})\|^2 = \pi(n+m)!/2^{m+1}n!$  – мощность ЛГ-пучка. Можно показать, что выражение (11) сводится к выражению ОУМ структурированных ЭГ-пучков, полученному Котляром и Ковалевым в недавней работе [24] посредством замены в (11):

$$(2n + \ell - 2k) |b_k(\theta, \beta, \varepsilon)|^2 \rightarrow 2a_n^* a_{n+1},$$

в числителе и  $|b_k(\theta, \beta, \varepsilon)|^2 \rightarrow k! a_n^* a_{n+1}$  в знаменателе. Неожиданные результаты компьютерного моделирования и эксперимента, представленные на рис. 3, удивили нас. Светлые кривые на рисунке соответствуют ОУМ в структурированных сЛГ-пучках, а темные кривые – ОУМ в асЛГ-пучках. Их точки пересечения указывают на значения фазового параметра  $\theta$ , при которых выполняется условие инвариантности (8) к простому астигматизму, причем величина ОУМ на всех рисунках не превышает азимутальное  $\ell$  число сЛГ-пучка. Однако стоит сдвинуться в область значений  $\theta = \pi$ , где условия астигматической инвариантности не выполняются, как ситуация резко изменяется для асЛГ-пучков с радиальным числом  $n \neq 0$  (см. рис. 3б-г). Мы наблюдаем резкие всплески и провалы ОУМ. Компьютерное моделирование показало, что высота максимумов и глубина минимумов ОУМ тем больше, чем больше разность радиальных и азимутальных чисел, а при  $\ell=1$  величину максимумов можно оценить как  $\ell_{\max} \approx (n+1)/2$ . Кроме того, с ростом радиального числа  $n$  расстояние между максимумами и минимумами быстро сужается. Заметим, что такое поведение ОУМ не свойственно свободным от астигматизма сЛГ-пучкам, в которых радиальное число  $n$  не влияет на максимум ОУМ, а только отвечает за частоту быстрых осцилляций [16].

Поскольку условие астигматической инвариантности (8) удовлетворяется только для единичного амплитудного параметра  $\varepsilon=1$ , найдем более общую форму такого условия для любых  $\varepsilon$ . Еще раз обратим внимание на точки пересечения кривых ОУМ  $\ell_z(\theta)$  для сЛГ- и асЛГ-пучков на рис. 3. Запишем условие пересечения кривых

$$\Delta \ell_z = \ell_z(\varepsilon, \theta, \beta) - \ell_z(\varepsilon, \theta, 0) = 0. \tag{12}$$

Мы ожидаем, что соотношение (12) описывает условие астигматической инвариантности, за исключением конечного числа точек, например, где ОУМ обращается в ноль  $\ell_z(\theta, \beta)=0$  при  $\varepsilon=1$ . Чтобы проверить предположение (12), были проанализированы картины интенсивности сЛГ-пучков без астигматизма и сЛГ-пучков, инвариантных к астигматизму, при различных амплитудных параметрах  $\varepsilon$ , а затем рассчитывалась степень корреляции этих распределений интенсивности. Сравнение показало, что более 10 картин интенсивности, полученных из условия (12) для различных  $\varepsilon$ -параметров, имеют степень корреляции, превышающую 0,93, что убедило нас в использовании условия (12), как условия инвариантно-

сти к астигматическому преобразованию. Кривые на рис. 4а задают пару значений  $(\theta, \beta)$ , соответствующих астигматической инвариантности для различных амплитудных параметров  $\varepsilon$ , в то время как зависимости  $\ell_z(\theta)$  на рис. 4в описывают ОУМ для соответствующих значений  $\varepsilon$ -параметров. Вертикальные линии на рис. 4а указывают на положение нулей ОУМ для  $\varepsilon=1$ .

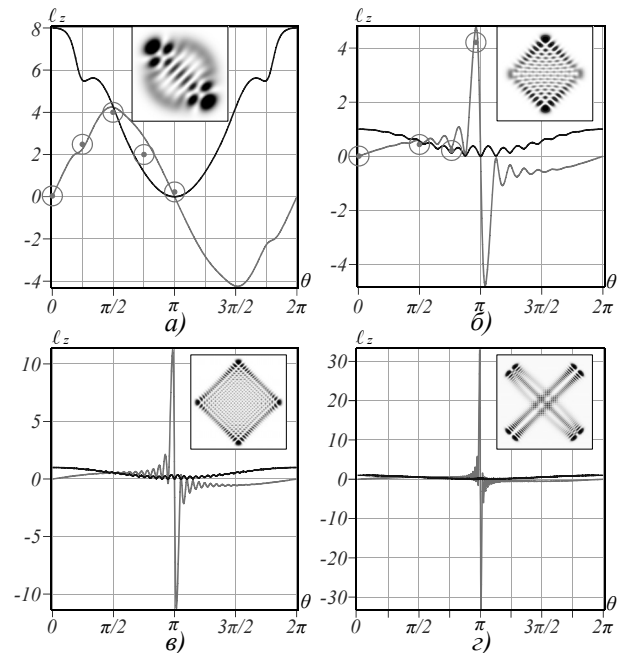


Рис. 3. ОУМ  $\ell_z(\theta)$  асЛГ-пучков при  $(n, \ell)=(0,8)$  (а),  $(n, \ell)=(8,1)$  (б),  $(n, \ell)=(20,1)$  (в),  $(n, \ell)=(60,1)$  (г). Темные кривые соответствуют  $\beta=0$ , а светлые –  $\beta=\pi/4$ . На выносках представлены картины интенсивности, соответствующие максимумам  $\max \ell_z(\theta) = \ell_z(\theta_m)$ . Кружочками обозначены экспериментальные точки

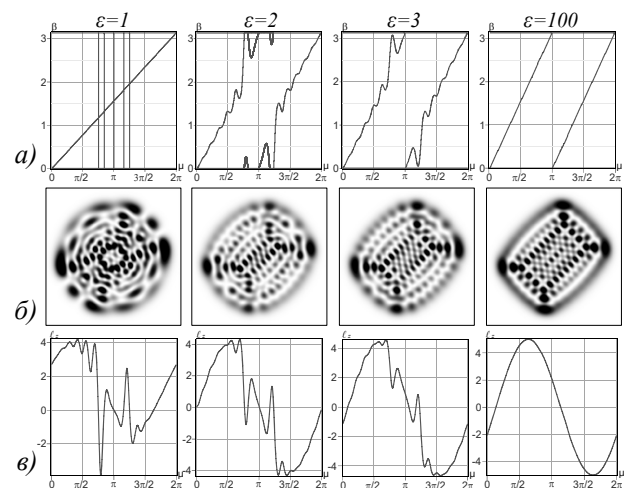


Рис. 4. Инварианты простого астигматизма при разных амплитудных  $\varepsilon$  и фазовых  $(\theta; \beta)=(1; 0,5)$  параметрах асЛГ-пучка (а, б) и ОУМ  $\ell_z(\theta)$  для различных амплитудных параметрах  $\varepsilon$  при  $(n, \ell)=(8,4)$  и  $\beta=\pi/4$  (в)

Небольшое отклонение от  $\varepsilon$ -параметра от единицы до  $\varepsilon=0,05$  приводит к разрывам прямых линий в местах расположения прежних нулей ОУМ.

Но это не означает многозначности условия инвариантности к астигматизму, просто значения  $\beta = \pm \pi$  в точках разрыва указывают на то, что при таких фазовых параметрах  $\theta$  не существует инвариантных асЛГ-пучков. По мере увеличения  $\varepsilon$ -параметра острые участки кривых (11) сглаживаются, единственная точка разрыва располагается в точке  $\theta = \pi$ , так что при параметре  $\varepsilon = 100$  кривые описывают астигматизм гибридного ЭЛГ-пучка [17] с условием астигматической инвариантности  $\theta = \beta$ , в то время как ОУМ описывается соотношением  $\ell_z = \ell \cos \theta$  (см. рис. 4в).

Вообще говоря, сохранение структурной устойчивости при астигматическом преобразовании предполагает количественное сохранение некоторого параметра, включенного в эти преобразования [25, 26]. Таким параметром и является орбитальный угловой момент, который остается неизменным  $\ell_z(\theta_m, \beta_m) = \text{const}$ , но только при вполне определенном параметре астигматизма  $\beta_m$  и фазовом  $\theta_m$  параметре. Однако платой за такое сохранение ОУМ является его резкие всплески и провалы в области значений фазового параметра  $\theta$ , где условие астигматической инвариантности не выполняется. Фактически условие сохранения ОУМ (12) означает вращательную симметрию асЛГ-пучка, при которой требование астигматической инвариантности выполняется при любых угловых поворотах структурированного пучка вокруг оптической оси.

## 2. Острые всплески и провалы ОУМ. Асимптотики

Важно понимать физические истоки формирования резких всплесков и провалов ОУМ вблизи нуля в асЛГ-пучках, высота которых значительно превышает экстремумы в свободных от астигматизма структурированных сЛГ-пучках [16], а их высота и глубина может контролироваться радиальным числом  $n$ . Ответ на этот вопрос таится в ЛГ-спектрах мод, которые управляют ОУМ. Типичные формы спектров для различных фазовых параметров  $\theta$  показаны на рис. 5. Стоит обратить внимание на то, что индекс  $k$  в спектрах мод отложен вдоль оси абсцисс так, что азимутальное число вычисляется как  $\mu = 2n + \ell - 2k$ , в то время как радиальное число задается как  $\nu = \min(2n + \ell - k, k)$ . Отсюда видно, что общее количество ЛГ-мод такое же, как и количество ЭГ-мод в исходном соотношении (1), а их ТЗ расположены в интервале  $TЗ \in (-[2n + \ell], 2n + \ell)$ . Первая строка (рис. 5а) представляет спектры ЛГ-мод в окрестности астигматически инвариантного сЛГ-пучка в состоянии ( $\theta = \pi/2, \beta = \pi/4, \varepsilon = 1, n = 8, \ell = 1$ ).

В точке астигматической инвариантности ( $\theta = \pi/2, \beta = \pi/4$ ) энергия почти одинаково распределяется между ЛГ-модами с положительными и отрицательными ТЗ. Поэтому ОУМ пучка даже ниже азимутального числа  $\ell = 1$  и равна  $\ell_z = 0,65$ . Справа и слева от этого состояния нет существенных изменений в спектрах ЛГ-мод. Формы спек-

тров на рис. 5б, в радикально изменяются вблизи всплесков, провалов и нулей ОУМ.

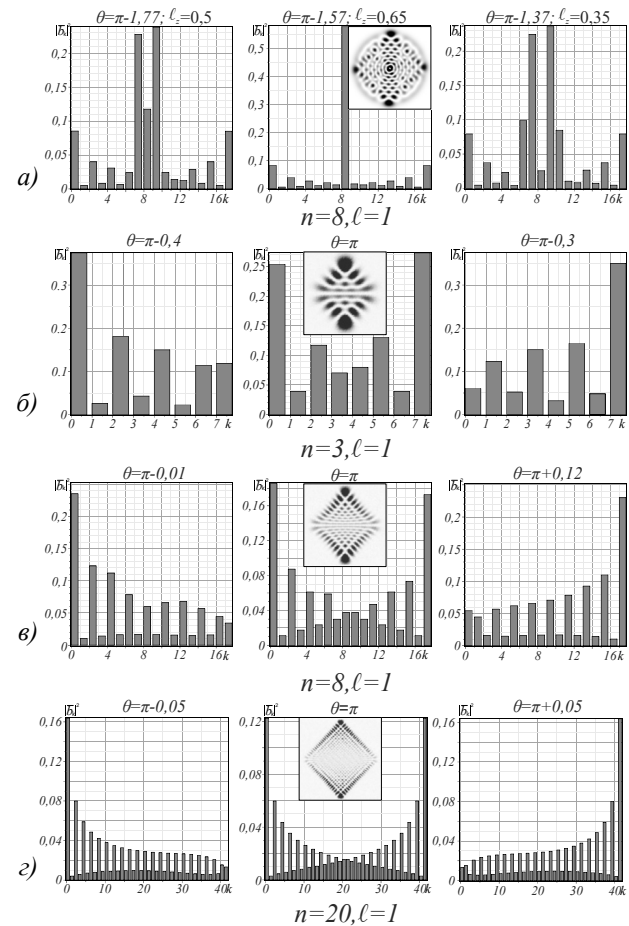


Рис. 5. Спектры ЛГ-мод  $|bk(n, \beta, \theta)|^2$  в асЛГ-пучках с  $\beta = \pi/4, \varepsilon = 1$ : (а) спектр для состояния ( $n = 8, \ell = 1$ ) в окрестности условия инвариантности  $\theta = \pi/2$  с ОУМ  $\ell_z = 0,65$ ; (б-в) спектры в окрестности острых всплесков (слева), провалов (справа) и нуля (по середине) ОУМ с соответствующими значениями  $\theta$  в состояниях: (б)  $n = 3, \ell = 1$ ; (в)  $n = 8, \ell = 1$ ; (г)  $n = 20, \ell = 1$ . Спектры (а)-(в) – эксперимент, спектр (г) – компьютерное моделирование.

На выносках – картины интенсивности для соответствующих состояний асЛГ-пучков

В точках максимума ОУМ основная энергия сосредоточена в ЛГ-модах с азимутальными числами  $\mu = 7, \mu = 15$  и  $\mu = 21$  соответственно. В хвостах спектров энергия быстро падает, но ее основная часть приходится на ЛГ-моды с  $TЗ > 0$ . В точках минимумов ОУМ основная энергия сосредоточена в ЛГ-моде с  $TЗ \mu = -7, \mu = -15$  и  $\mu = -21$ . В хвостах спектров энергия быстро уменьшается, но большая ее часть приходится на ЛГ-моды с отрицательными ТЗ.

На практике важно знать положение основных максимумов ОУМ. Поскольку они управляются радиальным числом  $n$  асЛГ-пучка, имеет смысл упростить громоздкое выражение (11), заменив его асимптотическим, полагая  $n \gg 1$ . Для этого воспользуемся формулой (8.21.10) из монографии [27]: если  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные вещественные числа, то

$$\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^\alpha \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos \theta) = \frac{\cos\{(2n + \alpha + \beta + 1)\theta/2 - (2\alpha + 1)\pi/4\}}{\sqrt{(\pi/2)n \sin \theta}} + O(n^{-3/2}), \quad (13)$$

где  $0 < \theta < \pi$ . Используя эту асимптотику в уравнениях (11) и (12), мы приходим к приближенным выражениям для ОУМ в асЛГ-пучках (см. Приложение В):

$$\ell_z = \ell \cdot \frac{\cos 2\beta + 2\varepsilon U \cos([2n + \ell]\theta/2) + \varepsilon^2 \cos(\theta - 2\beta)}{1 + 2\varepsilon V \cos([2n + \ell]\theta/2) + \varepsilon^2}, \quad (14)$$

$$V = \frac{\cos([2n + \ell + 1]\pi/2 - \pi/4)}{\sqrt{(\pi/2)n \sin \theta}}, \quad (15)$$

$$U = V \frac{\cos(\theta/2 - 2\beta)}{\cos(\theta/2)}.$$

Асимптотические кривые ОУМ на рис. 6а, в немного расходятся с точными построениями на рис. 3. Хотя их внешний вид довольно хорошо повторяет форму теоретических кривых, максимумы кривых отличаются от значений компьютерного моделирования. Тем не менее положения максимумов  $\theta_m$  почти совпадают с точными теоретическими значениями на рис. 6б,г. Из сравнения рис. 6б и г мы видим, что положения максимумов ОУМ для разных чисел  $(n, \ell)$  расположены очень плотно, что значительно усложняет их экспериментальное измерение; в нашем эксперименте эти кривые сливаются из-за ошибки измерения радиуса перетяжки Гауссова пучка на цилиндрической линзе (см. следующий параграф).

Заметим, что появление резких пиков ОУМ на рис. 3 и рис. 6 сопровождается довольно драматичным сценарием интерференционной конкуренции ЛГ-мод в астигматическом пучке. Как уже отмечалось, резкие всплески и провалы ОУМ происходят вблизи фазового параметра  $\theta = \pi$ , где ОУМ обращается в нуль, а высота (глубина) его пиков зависит от радиального числа  $n$ :  $\max \ell_z \approx (n + 1)/2$ , где  $\ell = 1$  и  $n \gg 1$ . На первый взгляд, кажется, что для того чтобы найти асимптотическое значение ОУМ, достаточно потребовать  $n \rightarrow \infty$  в уравнении (10) и для параметров  $U$  и  $V$  в уравнении (16). Однако знаменатель этих параметров включает множитель  $\sqrt{n \sin \theta}$ , и пики ОУМ появляются, когда одновременно выполняются требования  $n \rightarrow \infty$ ,  $\theta \approx \pi$ . Это значит, что всплески и провалы ОУМ для критических параметров  $\theta^{(max)}$  и  $\theta^{(min)}$  появляются только при оптимальных значениях радиального числа  $n$  и фазового параметра  $\theta$ . Критические значения фазового параметра требуют довольно громоздких вычислений, приведенных в Приложении В. В результате расчета получаем критический параметр (В7). Сразу заметим, что положение главных максимумов  $\theta^{(max)}$  в (В7) не зависит от параметра астигма-

тизма  $\beta$ , в то время как на рис. 6 наблюдается такая зависимость. Дело в том, что при построении этих кривых учитывались члены высших порядков по радиальному числу  $n$ . В то же время для того, чтобы заметить эту зависимость, необходимо учитывать вплоть до четырех значащих чисел после запятой для фазового параметра  $\theta$ , что невозможно достичь в нашем эксперименте.

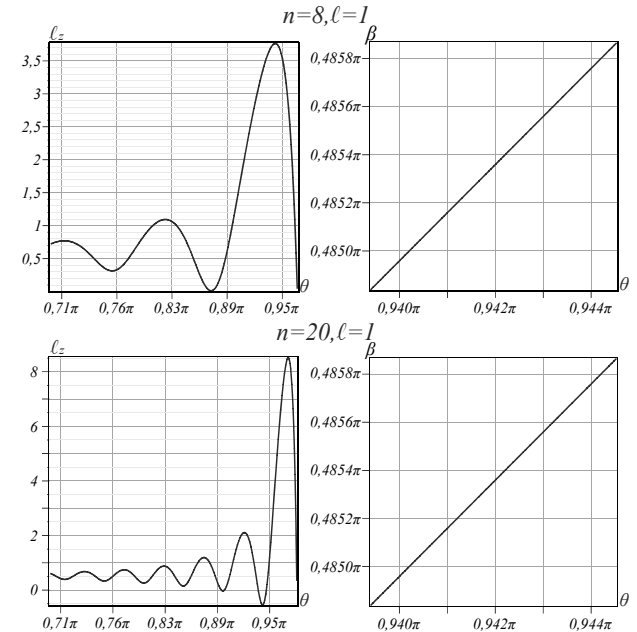


Рис. 6. Асимптотические кривые ОУМ  $\ell_z(\theta)$  при  $\varepsilon = 1$ ,  $\beta = \pi/4$  (справа) и положения главных максимумов ОУМ (слева) в асЛГ-пучках с  $n = 8, \ell = 1$  и  $n = 20, \ell = 1$

### 3. Эксперимент

Основными задачами нашего экспериментального исследования были, прежде всего, подтверждение формирования астигматически инвариантных пучков при выполнении условия (8), а также выявление резких всплесков ОУМ в астигматически инвариантных структурированных пучках асЛГ. Мы использовали экспериментальную установку, представленную на рис. 7, которая ранее была подробно описана в нашей статье [16], с единственным отличием, заключающимся в регулировании радиуса перетяжки Гауссова пучка на цилиндрической линзе. Напомним (см., например, статьи [17, 21] и ссылки в них), что при простом астигматизме, когда ось цилиндрической линзы совпадает с осью  $y$ , появляется фазовый множитель (сразу за линзой) в форме  $\exp(-ikx^2/2f_{cyl})$ , где  $f_{cyl}$  – фокусное расстояние цилиндрической линзы. В наших теоретических расчетах координаты  $x, y$  нормируются на радиус перетяжки  $w_0$  Гауссова пучка на цилиндрической линзе, т.е.

$$kx^2/2f_{cyl} = kw_0^2(x/w_0)^2/2f_{cyl} \rightarrow (z_0/f_{cyl})x^2,$$

где  $z_0 = kw_0^2/2$  и мы оставили обозначение  $x/w_0 \rightarrow x$ . В нашем эксперименте длина Рэлея  $z_0$  задается радиус-

сом перетяжки Гауссова пучка на входной плоскости цилиндрической линзы. Регулируя радиус перетяжки  $w_0$  с помощью пространственных фильтров SLF1,2, мы достигали оптимальной степени корреляции астигматически инвариантного пучка аСЛГ со структурированным пучком сЛГ.

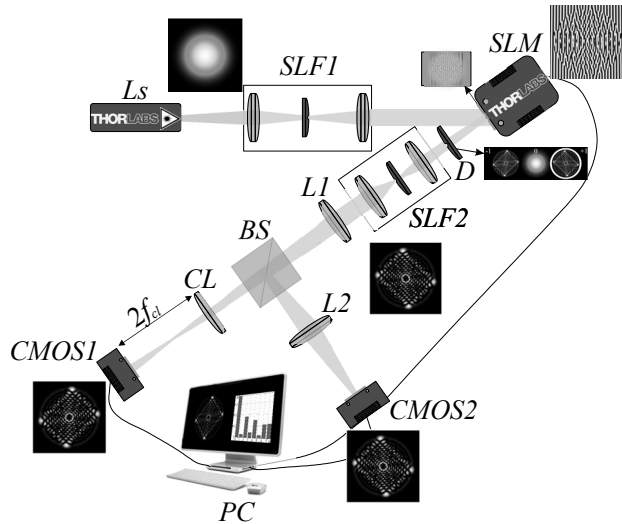


Рис. 7. Эскиз экспериментальной установки:  $L_s$  – He-Ne лазер ( $\lambda = 0,633$  мкм), SLF1,2 – пространственный фильтр пучка, SLM – пространственный модулятор света, L1, L2 – сферические линзы с фокусным расстоянием  $f_{sp} = 25$  см, BS – делительный кубик, CL – цилиндрическая линза ( $f_{cyl} = 15$  см), CMOS1,2 – фотодетекторы, PC – компьютер

Также мы считаем, что для оптимального совпадения картины интенсивности аСЛГ-пучка, инвариантного к астигматизму, и сЛГ-пучка, свободного от астигматизма, достаточно, чтобы степень их корреляции была не ниже 0,93. Этот выбор оптимального значения 0,93 связан с особенностями нашей экспериментальной установки. Дело в том, что точность измерения радиуса перетяжки  $w_0$  Гауссова пучка ограничена из-за неточностей юстировки оптической системы. В частности, это влияет на измерение положения основных максимумов ОУМ астигматических аСЛГ-пучков (как мы отмечаем при обсуждении рис. 6б,г), когда мы не можем различить близкие положения максимумов ОУМ с разными радиальными числами  $n$ . Радиус перетяжки Гауссова пучка в плоскости цилиндрической линзы рассчитывался путем измерения моментов интенсивности второго порядка  $J_{02} = w_x^2$  и  $J_{20} = w_y^2$ , так что  $w_0 = (w_x + w_y)/2$ , подробно рассмотренных в наших статьях [28, 29]. Другим важным ограничением процесса измерений является разрешающая способность SLM-модулятора и фотоприемника CMOS. Оптимальное восстановление пучка достигается, если на голограмме каждый локальный максимум аСЛГ-пучка покрывал не менее 4 пикселей на SLM-модуляторе. В нашей экспериментальной установке использовались SLM-модулятор Thorlabs EXULUS-4K 1/М и CMOS-детектор Michrome 20, что позволило получить надежные из-

мерения спектров ЛГ-мод. Светоделительный кубик BS (Thorlabs BS007 50:50) разделяет сЛГ-пучок на два оптических плеча. В первом (прямом) плече измерялись спектры ЛГ-мод в плоскости двойного фокуса  $2f_{cyl}$  цилиндрической линзы CL в соответствии с методикой моментов интенсивности, которая рассмотрена в нашей статье [29] и позволяет учесть знаки ТЗ оптических вихрей в астигматическом аСЛГ-пучке. Второе плечо позволяло анализировать распределения интенсивности в исходном сЛГ-пучке.

Измеренные спектры ЛГ-мод вблизи основных максимумов, минимумов и нулей ОУМ изображены на рис. 5б для состояний пучка  $n=3, \ell=1$  и  $n=8, \ell=1$ . На максимуме ОУМ основная энергия сосредоточена в основных ЛГ-модах с  $n=0, \ell=3$  и  $n=0, \ell=8$ , в то время как энергия остальных мод быстро уменьшается во всем диапазоне от  $TЗ=2$  и от  $TЗ=7$  до  $TЗ=-2$  и  $TЗ=-7$  соответственно. Обратная ситуация наблюдается для минимума ОУМ. Основная энергия сосредоточена в ЛГ-модах с  $n=0, \ell=-3$  и  $n=0, \ell=-8$  соответственно. В нулевом режиме ОУМ энергия распределяется примерно поровну между всеми ЛГ-модами с положительным и отрицательным ТЗ. Полученные спектры мод позволяют рассчитать ОУМ пучков в соответствии с соотношением

$$\ell_z = \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2n + \ell - 2k) |b_k|^2.$$

Расположение экспериментальных точек на рис. 2 указывает на хорошее соответствие между теорией и экспериментом. Как уже отмечалось, для проверки условия (8), при котором формируются астигматически инвариантные пучки, были проанализированы картины интенсивности в первом и втором плечах экспериментальной установки, затем они масштабировались и сравнивались друг с другом. Типичные распределения интенсивности пучков аСЛГ и сЛГ показаны на рис. 2 и рис. 4. Степень их корреляции была не ниже 0,93, что указывает на выполнение условия астигматической инвариантности и выявление всплесков ОУМ.

### Выводы

Когда структурированный сЛГ-пучок проходит через оптический астигматический элемент, например, через цилиндрическую линзу или сферическую линзу, ось которой не совпадает с осью оптической системы, его внутренняя структура радикально меняется. Такое астигматическое преобразование увеличивает количество степеней свободы структурированных пучков и расширяет область их технического применения. Однако в некоторых случаях необходимо, чтобы астигматический элемент не изменял структуру светового луча. Именно исследования условий формирования астигматически инвариантных сЛГ-пучков проводились в нашей статье. Мы

теоретически и экспериментально подтвердили, что условия астигматической инвариантности заключаются в том, что фазовый параметр  $\theta$  сЛГ-пучка равен арктангенсу отношения длины Рэлея  $z_0$  и фокусного расстояния  $f_{cyl}$  цилиндрической линзы для единичного  $\varepsilon=1$  амплитудного параметра. Для остальных значений амплитудного параметра  $\varepsilon \neq 1$  условие астигматической инвариантности задается равенством ОУМ структурированного сЛГ- и астигматически инвариантных асЛГ-пучков. Мы также обнаружили резкие всплески и провалы ОУМ в астигматических сЛГ-пучках в области, где ОУМ обращается в ноль. Высота и глубина этих всплесков и провалов значительно превышают максимальные и минимальные значения ОУМ в обычных структурированных сЛГ-пучках. Было показано, что возникновение всплесков и провалов ОУМ вызвано радикальной перестройкой спектра ЛГ-мод в виде их жесткого упорядочения. Теоретический расчет, сопровождаемый компьютерным моделированием, и эксперимент хорошо согласуются друг с другом. Вообще говоря, сохранение структурной инвариантности при простом астигматическом преобразовании предполагает количественное сохранение некоторого параметра, включенного в эти преобразования. В нашем случае таким параметром является орбитальный угловой момент, который остается неизменным  $\ell_z(\theta_m, \beta_m) = \text{const}$ , но только для вполне определенных астигматического  $\beta_m$  и фазового  $\theta_m$  параметров. Однако платой за такое сохранение ОУМ являются его резкие всплески и провалы в области значений фазового параметра  $\theta$ , где условие астигматической инвариантности не выполняется. Фактически, условие сохранения ОУМ (12) означает вращательную симметрию асЛГ-пучка, при которой требование астигматической инвариантности выполняется при любых угловых поворотах структурированного пучка вокруг оптической оси.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ в параграфе «Эксперимент» (проект № 20-37-90066), в параграфе «Острые всплески и провалы ОУМ. Асимптотики» (проект № 20-37-90068).

### References

- [1] Forbes A, de Oliveira M, Dennis MR. Structured light. *Nature Photon* 2021; 15(4): 253-262. DOI: 10.1038/s41566-021-00780-4.
- [2] Shen Y, Yang X, Naidoo D, Fu X, Forbes A. Structured ray-wave vector vortex beams in multiple degrees of freedom from a laser. *Optica* 2020; 7: 820-831. DOI: 10.1364/OPTICA.382994.
- [3] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. *Vortex laser beams*. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-138-54211-2.
- [4] Shen Y, Wang X, Xie Z, Min C, Fu X, Liu Q, Gong M, Yuan X. Optical vortices 30 years on: OAM manipulation from topological charge to multiple singularities. *Light Sci Appl* 2019; 8: 90. DOI: 10.1038/s41377-019-0194-2.
- [5] Wang J. Advances in communications using optical vortices. *Photon Res* 2016; 4: B14-B28. DOI: 10.1364/PRJ.4.000B14.
- [6] Woerdemann M, Alpmann C, Esseling M, Denz C. Advanced optical trapping by complex beam shaping. *Laser Photon Rev* 2013; 7: 839-854. DOI: 10.1002/lpor.201200058.
- [7] Fickler R, Lapkiewicz R, Huber M, Lavery MPJ, Padgett MJ, Zeilinger A. Interface between path and orbital angular momentum entanglement for high-dimensional photonic quantum information. *Nat Commun* 2014; 5: 4502. DOI: 10.1038/ncomms5502.
- [8] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A—Pure Appl Opt* 2004; 6: S157-S161. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
- [9] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Spiral light beams. *Physics—Uspekhi* 2004; 47(12): 1177-1203. DOI: 10.1070/PU2004v047n12ABEH001802.
- [10] Shen Y, Meng Y, Fu X, Gong M. Hybrid topological evolution of multi-singularity vortex beams: generalized nature for helical-Ince–Gaussian and Hermite–Laguerre–Gaussian modes. *J Opt Soc Am A* 2019; 36: 578-587. DOI: 10.1364/JOSAA.36.000578.
- [11] Izdebskaya YV, Shvedov VG, Volyar AV. Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points. *J Opt Soc Am A* 2008; 25(1): 171-181. DOI: 10.1364/JOSAA.25.000171.
- [12] Volyar A, Abramochkin E, Razueva E, Bretsko M, Akimova Ya. Geometry of spiral beams: 3D curved structured vortex beams and optical currents. *J Opt* 2021; 23(4): 44003. DOI: 10.1088/2040-8986/abed5c.
- [13] Volyar A, Akimova Ya. Structural stability of spiral vortex beams to sector perturbations. *Appl Opt* 2021; 61(21): 8865-8874. DOI: 10.1364/AO.435420.
- [14] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformation and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83: 123-125. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [15] Pinnell J, Nape I, Sephton B, Cox MA, Rodríguez-Fajardo V, Forbes A. Modal analysis of structured light with spatial light modulators: a practical tutorial. *J Opt Soc Am A* 2020; 37(11): 146-160. DOI: 10.1364/JOSAA.398712.
- [16] Volyar A, Abramochkin E, Akimova Ya, Bretsko M, Egorov Y. Fast oscillations of orbital angular momentum and Shannon entropy caused by radial numbers of structured vortex beams. *Appl Opt* 2022; 61(21): 6398-6407. DOI: 10.1364/AO.464178.
- [17] Abramochkin E, Razueva E, Volostnikov V. General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(11): 2506-2513. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
- [18] Wang Z, Shen Y, Naidoo D, Fu X, Forbes A. Astigmatic hybrid SU(2) vector vortex beams: towards versatile structures in longitudinally variant polarized optics. *Opt Express* 2021; 29(1): 315-329. DOI: 10.1364/OE.414674.
- [19] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum and the transformation of Gauss–Laguerre modes. *Phys Rev A* 1992; 45: 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [20] Reddy SG, Prabhakar S, Aadhi A, Banerji J, Singh RP. Propagation of an arbitrary vortex pair through an astigmatic optical system and determination of its topological charge. *J Opt Soc Am A* 2014; 31(6): 1295-1302. DOI: 10.1364/JOSAA.31.001295.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA, Pofirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.



[22] Chen Y-F, Chang C, Lee C, Tung J, Liang H, Huang K-F. Characterizing the propagation evolution of wave patterns and vortex structures in astigmatic transformations of Hermite-Gaussian beams. *Laser Phys* 2018; 28(1): 015002. DOI: 10.1088/1555-6611/aa9625.

[23] Fadeyeva TA, Rubass AF, Aleksandrov RV, Volyar AV. Does the optical angular momentum change smoothly in fractional-charged vortex beams? *J Opt Soc Am B* 2014; 31(4): 798-805. DOI: 10.1364/JOSAB.31.000798.

[24] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of paraxial propagation-invariant laser beams. *J Opt Soc Am A* 2022; 39(6): 1061-1065. DOI: 10.1364/JOSAA.457660.

[25] Arnold VI. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer; 2003. ISBN: 978-0-387-96890-2.

[26] Thompson WJ. *Angular Momentum: an illustrated guide to rotational symmetries for physical systems*. New York: Wiley-VCH; 1994. ISBN: 978-0-471-55264-2.

[27] Szegő G. *Orthogonal polynomials* [In Russian]. Moscow: "Fizmatgiz" Publisher; 1962.

[28] Volyar AV, Abramochkin EG, Egorov Yu, Bretsko M, Akimova Ya. Digital sorting of Hermite-Gauss beams: mode spectra and topological charge of a perturbed Laguerre-Gauss beam. *Computer Optics* 2020; 44(4): 501-509. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-747.

[29] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens. *Appl Opt* 2019; 58(21): 5748-5755. DOI: 10.1364/AO.58.005748.

**Приложение А. Астигматическое преобразование сЛГ-пучка**

Для вычисления астигматического преобразования сЛГ-пучка в виде разложения по ЭЛГ-модам воспользуемся частным случаем общего астигматического преобразования ЭЛГ-мод [17], когда дефокусировочная компонента отсутствует:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})+ib\psi(\boldsymbol{\rho},\phi)} \text{HLG}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}|\alpha)d^2\boldsymbol{\rho} = \frac{(-i)^{n+m}}{2\sqrt{1+b^2}} \times \exp\left\{-\frac{ib\psi(\mathbf{r},\phi)}{4(1+b^2)} + i(n-m)\phi\right\} \text{HLG}_{n,m}\left(\frac{\mathbf{R}_{-\gamma-\phi}\mathbf{r}}{2\sqrt{1+b^2}}\middle|\vartheta\right). \tag{A1}$$

Здесь параметры  $\gamma, \vartheta, \phi$  являются решением следующей системы уравнений (достаточно найти только одно решение, т.к. любое другое приводит к тому же самому виду правой части (A1)):

$$\begin{aligned} \sin 2\vartheta &= \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\phi \sin 2\beta, \\ e^{2i\gamma} \cos 2\vartheta &= \cos 2\alpha \cos 2\phi + i(\sin 2\alpha \sin 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\phi \cos 2\beta), \\ e^{i\vartheta \pm i\phi} &= e^{i\beta} (\cos \gamma \mp \sin \gamma)(\cos \alpha \cos \phi + i \sin \alpha \sin \phi) - e^{-i\beta} (\sin \gamma \pm \cos \gamma)(\cos \alpha \sin \phi - i \sin \alpha \cos \phi), \end{aligned} \tag{A2}$$

где  $\beta = \arctg b$ . Отметим, что при решении третьего уравнения системы (A2) достаточно выбрать один знак (верхний или нижний), второй вариант выполняется автоматически.

В силу (3), для вычисления астигматического преобразования сЛГ-пучка достаточно применить (A1) к модам  $\text{HLG}_{n+\ell,n}(\boldsymbol{\rho}|\pi/4)$  и  $\text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\boldsymbol{\rho}|\Theta)$ .

В первом случае  $\alpha = \pi/4$  и  $\phi = 0$ . Тогда система (A2) имеет решение  $(\gamma, \vartheta, \phi) = (\pi/4, \pi/4 - \beta, \pi/4)$  и формула (A1) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})+ib\psi(\boldsymbol{\rho},0)} \text{HLG}_{n+\ell,n}(\boldsymbol{\rho}|\pi/4)d^2\boldsymbol{\rho} = \frac{(-i)^{2n+\ell}}{2\sqrt{1+b^2}} \times \exp\left\{-\frac{ib\psi(\mathbf{r},0)}{4(1+b^2)} + \frac{i\ell\pi}{4}\right\} \text{HLG}_{n+\ell,n}\left(\frac{\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}}{2\sqrt{1+b^2}}\middle|\frac{\pi}{4} - \beta\right). \tag{A3}$$

Для второй ЭЛГ-моды мы сначала должны сделать поворот,  $\boldsymbol{\rho} \rightarrow \mathbf{R}_{\pi/4}\boldsymbol{\rho}$ , а затем использовать уравнения (A1) – (A2) с  $\alpha = \Theta$  и  $\phi = -\pi/4$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})+ib\psi(\boldsymbol{\rho},0)} \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\boldsymbol{\rho}|\Theta)d^2\boldsymbol{\rho} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})+ib\psi(\boldsymbol{\rho},-\pi/4)} \text{HLG}_{n,n+\ell}(\boldsymbol{\rho}|\Theta)d^2\boldsymbol{\rho} = \\ &= \frac{(-i)^{2n+\ell}}{2\sqrt{1+b^2}} \exp\left\{-\frac{ib\psi(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r},-\pi/4)}{4(1+b^2)}\right\} \times \text{HLG}_{n,n+\ell}\left(\frac{\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}}{2\sqrt{1+b^2}}\middle|\Theta - \beta\right), \end{aligned} \tag{A4}$$

т.к.  $(\gamma, \vartheta, \phi) = (\pi/4, \Theta - \beta, 0)$  – решение системы (A2).

Поскольку  $\psi(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}, -\pi/4) = \psi(\mathbf{r}, 0)$ , то астигматические фазовые множители в правых частях формул (A3) и (A4) совпадают. Собирая из ЭЛГ-мод в левых частях обеих формул сЛГ-пучок (3), получаем формулу (5).

**Приложение Б. Разложение асЛГ-пучка по ЛГ-модам**

Найдём коэффициенты  $b_k$  разложения асЛГ-пучка по ЛГ-модам. Воспользуемся формулой (21) из [8], которая показывает разложение ЭЛГ-моды с некоторым параметром в ряд по ЭЛГ-модам с другим параметром:

$$\begin{aligned} \text{HLG}_{n,m}(\mathbf{R}_{\gamma}\mathbf{r}|\theta) &= \sum_{k=0}^{n+m} \Lambda_k^{(n,m)} \text{HLG}_{n+m-k,k}(\mathbf{r}|\alpha), \\ \Lambda_k^{(n,m)} &= (-1)^k \left\{ \cos \gamma \cos(\theta - \alpha) + i \sin \gamma \sin(\theta + \alpha) \right\}^{n-k} \times \left\{ \cos \gamma \sin(\theta - \alpha) - i \sin \gamma \cos(\theta + \alpha) \right\}^{m-k} \times \\ &\times P_k^{(n-k,m-k)}(\sin^2 \gamma \cos 2(\theta + \alpha) - \cos^2 \gamma \sin(\theta - \alpha)). \end{aligned} \tag{B1}$$

Для значений  $\gamma = -\pi/4$  и  $\alpha = \pi/4$  коэффициенты разложения (Б1) сводятся к более простому виду

$$\Lambda_k^{(n,m)} = (-1)^m e^{-\pi i(n+m-2k)/4} c_k^{(n,m)}(\pi/4 - \theta), \tag{Б2}$$

где

$$c_k^{(n,m)}(\alpha) = \cos^{n-k} \alpha \sin^{m-k} \alpha P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\alpha) = \sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(k,n)} (-1)^{k-j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos^{n+k-2j} \alpha \sin^{m-k+2j} \alpha \tag{Б3}$$

– коэффициенты, известные по теории ЭЛГ-мод.

Тогда разложения ЭЛГ-компонент асЛГ-пучка (3) по ЭЛГ-модам с параметром  $\pi/4$  принимают вид

$$\text{HLG}_{n+\ell,n}(\mathbf{R}_{-\pi/4} \mathbf{r} | \pi/4 - \beta) = (-1)^n e^{-\pi i(2n+\ell)/4} \times \sum_{k=0}^{2n+\ell} i^k c_k^{(n+\ell,n)}(\beta) \text{HLG}_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r} | \pi/4), \tag{Б4}$$

$$\text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4} \mathbf{r} | \Theta - \beta) = (-1)^{n+\ell} e^{-\pi i(2n+\ell)/4} \times \sum_{k=0}^{2n+\ell} i^k c_k^{(n,n+\ell)}\left(\frac{\pi-\theta}{2} + \beta\right) \text{HLG}_{2n+\ell-k,k}(\mathbf{r} | \pi/4).$$

Объединяя их в суперпозицию, получаем коэффициенты  $b_k$ :

$$b_k = (-1)^{\min(2n+\ell-k,k)} 2^{\max(\min)}! \times \left\{ c_k^{(n+\ell,n)}(\beta) + \varepsilon (-1)^n e^{i(2n+\ell)\theta/2} c_k^{(n,n+\ell)}\left(\frac{\pi-\theta}{2} + \beta\right) \right\}, \tag{Б5}$$

где  $\min = \min(2n+\ell-k, k)$   $\max = \max(2n+\ell-k, k)$ . Появление  $\min$ - и  $\max$ -выражений обусловлено переходом от ЭЛГ-мод с параметром  $\pi/4$  к стандартным ЛГ-модам [17]:

$$\text{HLG}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4) = (-1)^{\min} 2^{\max(\min)}! \cdot \text{LG}_{\min,n-m}(\mathbf{r}). \tag{Б6}$$

Здесь  $\min = \min(n, m)$  и  $\max = \max(n, m)$ .

**Приложение В. Асимптотические выражения для точек максимума и минимума ОУМ асЛГ-пучка**

Вычислим местоположение точек максимума и минимума ОУМ (14) как функции от  $\theta$ , полагая  $\varepsilon=1$  и устремляя радиальный индекс  $n$  к бесконечности. Для простоты мы рассмотрим только случай, когда  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \beta < \pi/2$  и  $\ell$  – нечётное число. Наиболее интересно поведение ОУМ вблизи точки  $\theta = \pi$ , т.к. оба множителя  $U$  и  $V$ , входящих в состав ОУМ, содержат в знаменателе выражение  $n \sin \theta \sim \infty \cdot 0$ .

Введём обозначение  $N = 2n + \ell$ . Подставляя выражения (15) в (14) и делая замену  $\theta \rightarrow \vartheta$  по формуле  $\theta = \pi - 2\vartheta/(2N+1)$ , где  $\vartheta > 0$ , получаем

$$\ell_z [\text{asLG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta, \beta)] = \ell \sin\left(2\beta + \frac{\vartheta}{2N+1}\right) \frac{Q + \sin \frac{\vartheta}{2N+1}}{1 + Q \sin \frac{\vartheta}{2N+1}}, \tag{Б1}$$

$$Q = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2N+1}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right)}{\sin \frac{\vartheta}{2N+1} \sqrt{\pi(N-\ell) \sin \frac{2\vartheta}{2N+1}}}.$$

Поскольку  $N$  – большой параметр, то оба выражения можно упростить, используя хорошо известные соотношения  $\sin \delta \sim \delta$ ,  $\cos \delta \sim 1$  при  $\delta > 0$ . Тогда

$$Q \sim \frac{1 - \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\frac{\vartheta}{2N+1} \sqrt{2\pi\vartheta}}, \quad \ell_z \sim \ell \sin 2\beta \cdot \frac{Q}{1 + Q \frac{\vartheta}{2N+1}} \sim (2N+1) \sin 2\beta \cdot \frac{1 - \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta(\sqrt{2\pi\vartheta} + 1 - \cos \vartheta - \sin \vartheta)}. \tag{Б2}$$

Обозначим последнюю дробь как  $S(\vartheta)$ . Таким образом, проблема свелась к нахождению решений уравнения  $S'(\vartheta) = 0$ .

После дифференцирования  $S(\vartheta)$  уравнение сводится к следующему:

$$\frac{(1 - \cos \vartheta - \sin \vartheta)^2}{9\sqrt{2\pi\vartheta}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta} + (\cos \vartheta - \sin \vartheta) = 0, \tag{Б3}$$

где все три слагаемых являются непрерывными функциями при  $\vartheta \geq 0$ . Численно первые корни этого уравнения следующие:  $\vartheta_1 = 2,956$ ,  $\vartheta_2 = 7,009$ ,  $\vartheta_3 = 9,904$ ,  $\vartheta_4 = 13,320$ .

Для аналитической оценки корней воспользуемся следующими соображениями. Во-первых, при малых  $\vartheta$  все три слагаемых в (Б3) необходимо учитывать. Однако с ростом  $\vartheta$  влияние первых двух слагаемых становится всё более несущественным благодаря наличию знаменателей. Более того, если отбросить первое слагаемое,

то для второго корня получится значение 7,006. Таким образом, удаляя первое слагаемое, можно свести уравнение (B3) к следующему:

$$\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{4} + \arctg \frac{3}{2\vartheta}\right) = \frac{3}{\sqrt{2(4\vartheta^2 + 9)}}. \tag{B4}$$

Это уравнение имеет две серии решений:

$$\begin{aligned} \vartheta - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2\vartheta} &= \frac{3}{2\vartheta\sqrt{2}} + 2\pi m \Rightarrow \\ \vartheta + \frac{3(\sqrt{2}-1)}{2\vartheta\sqrt{2}} &= \frac{\pi}{4} + 2\pi m \Rightarrow \end{aligned} \tag{B5}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_m &\approx \frac{\pi}{4} + 2\pi m - \frac{3(2-\sqrt{2})}{\pi(8m+1)} \Rightarrow \\ \vartheta_1 &= 7,006; \quad \vartheta_2 = 13,320. \\ \frac{5\pi}{4} - \vartheta - \frac{3}{2\vartheta} &= \frac{3}{2\vartheta\sqrt{2}} - 2\pi m \Rightarrow \\ \vartheta + \frac{3(\sqrt{2}+1)}{2\vartheta\sqrt{2}} &= \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \Rightarrow \end{aligned} \tag{B6}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_m &\approx \frac{5\pi}{4} + 2\pi m - \frac{3(2+\sqrt{2})}{\pi(8m+5)} \Rightarrow \\ \vartheta_0 &= 3,275; \quad \vartheta_1 = 9,959. \end{aligned}$$

Здесь в процессе упрощений мы избавились от арксинусов и арктангенсов, оставляя только аргументы в предположении их малости. Численная проверка показывает, что за исключением наименьшего корня  $\vartheta_0$  все остальные получаются из формул (B5)–(B6) с достаточно малой погрешностью, которая становится всё меньше с ростом  $m$ . При больших  $m$  обе серии можно объединить:  $\pi/4 + \pi m$ . Легко видеть, что серия (B5) задаёт минимумы, а серия (B6) – максимумы. Возвращаясь от  $\vartheta$  к  $\theta$ , получаем местоположения максимумов с хорошей точностью  $O(1/n^2)$ :

$$\theta_m^{(\max)} \approx \pi - \frac{1}{2n + \ell + \frac{1}{2}} \left( \frac{5\pi}{4} + 2\pi m - \frac{3(2+\sqrt{2})}{\pi(8m+5)} \right) + O(1/n^2), \tag{B7}$$

где  $m = 0, 1, \dots$

**Сведения об авторах**

**Воляр Александр Владимирович** – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Абрамочкин Евгений Григорьевич** – доктор физико-математических наук (2006), ведущий научный сотрудник Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Акимова Яна Евгеньевна** – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: сингулярная оптика, лазерная физика. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Брецько Михаил Владимирович** – кандидат физико-математических наук (2022), ассистент кафедры общей физики Физико-технического института Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского. Сфера научных интересов: компьютерное моделирование, сингулярная оптика. E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 22 октября 2022 г. Окончательный вариант – 29 ноября 2022 г.

---

# Huge spikes and dips of the orbital angular momentum in structured Laguerre-Gaussian beams resistant to simple astigmatism

A.V. Volyar<sup>1</sup>, E.G. Abramochkin<sup>2</sup>, Ya.E. Akimova<sup>1</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University, 295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, Academician Vernadsky 4;

<sup>2</sup> Lebedev Physical Institute, 443034, Samara, Russia, Novo-Sadovaya 221

## Abstract

The article investigated conditions for shaping astigmatic-invariant structured Laguerre-Gaussian (LG) beams in the case of simple astigmatism. We have theoretically and experimentally confirmed that the conditions of astigmatic invariance are that the  $\theta$ -phase parameter of the structured LG (sLG) beam is equal to the arctangent of the ratio of the Rayleigh length  $z_0$  to the focal length  $f_{cyl}$  of a cylindrical lens for a single amplitude parameter of  $\varepsilon=1$ . For the rest amplitude parameter values,  $\varepsilon \neq 1$ , the astigmatic invariance condition is set by the equality of the orbital angular momenta (OAM) of structured sLG and astigmatic-invariant sLG (asLG) beams. We have also found sharp spikes and dips of the OAM in astigmatic asLG beams in the region where OAM turns into zero. The height and depth of these spikes and dips significantly exceed the maximum and minimum OAM values in the conventional structured sLG beams. It has been shown that the occurrence of spikes and dips of the OAM is caused by a radical restructuring of the LG mode spectra in the form of their strong ordering. Theoretical calculations, accompanied by a computer simulation, and an experiment agree well with each other.

**Keywords:** structural stability, topological charge, orbital angular momentum, vortex spectrum.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Akimova YaE, Bretsko MV. Huge spikes and dips of the orbital angular momentum in structured Laguerre-Gaussian beams resistant to simple astigmatism. *Computer Optics* 2023; 47(3): 350-360. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1243.

**Acknowledgements:** The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under project No. 20-37-90066 (“Experiment” Section) and project No. 20-37-90068 (“Sharp spikes and dips of OAM. Asymptotics” Section).

---

## Authors' information

**Alexander Vladimirovich Volyar** (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics.

E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962) graduated from Kuibyshev State University (1984), majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor's Degree in Physics in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests include complex analysis, special functions, and mathematical physics equations.

E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Yana Evgenievna Akimova** (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. She received her PhD in Physics and Mathematics in 2022. She is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. Her research interests include diffractive and singular optics, laser physics.

E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Mikhail Vladimirovich Bretsko** (b. 1994) graduated from V.I. Vernadsky Crimean Federal University (2022), majoring in Physics and Astronomy. He received his PhD in Physics and Mathematics in 2022. He is assistant of General Physics department in the Physical-Technical Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Co-author of about 40 scientific papers. His research interests include computer modeling, singular optics.

E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com).

---

Received October 22, 2022. The final version – November 29, 2022.

---