

Индексы поляризационной сингулярности, аналогичные топологическому заряду, для световых полей с неоднородной поляризацией

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, В.Д. Зайцев^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В данной работе для разных векторных и гибридных световых полей, в том числе для полей с многими точками поляризационной сингулярности, найдены индексы поляризационной сингулярности по известной формуле М. Берри, которая применяется обычно для нахождения топологического заряда скалярных вихревых световых полей. Показано, что у полей, состояние поляризации которых зависит только от полярного угла в сечении пучка, могут быть либо линии поляризационной сингулярности, исходящие из центра, либо одна точка поляризационной сингулярности, находящаяся в центре сечения пучка. Если состояние поляризации поля зависит только от радиальной переменной, то такие поля не имеют точек поляризационной сингулярности и их индекс равен нулю. Если поляризационное состояние векторного поля зависит от обеих полярных координат, то такое поле может иметь несколько точек поляризационной сингулярности, расположенных в разных местах в сечении пучка. Также мы рассмотрели векторное поле с радиальной поляризацией высокого порядка и с действительным параметром. Такое поле при разных значениях параметра имеет либо несколько линий поляризационной сингулярности, исходящих из центра, либо особую точку в центре. При этом индекс поляризационной сингулярности такого поля при разных параметрах может быть либо полужелым, либо целым, либо нулевым.

Ключевые слова: неоднородная поляризация, поляризационная сингулярность, индекс поляризационной сингулярности, индекс Пуанкаре–Хопфа, топологический заряд.

Цитирование: Котляр, В.В. Индексы поляризационной сингулярности, аналогичные топологическому заряду, для световых полей с неоднородной поляризацией / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.Д. Зайцев // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 5. – С. 671-681. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1126.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Zaitsev VD. Inhomogeneously polarized light fields: polarization singularity indices derived by analogy with the topological charge. Computer Optics 2022; 46(5): 671-681. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1126.

Введение

Детальный анализ структуры векторных полей и имеющих в них поляризационных сингулярностей был впервые представлен ещё в 1999 году [1]. Позже, в начале нулевых годов, I. Freund дал уточнение некоторых типов сингулярностей [2, 3]. Индексы сингулярности рассчитывались локально для V- и C-точек. V-точки – это точки сингулярности в векторных полях с локально линейной поляризацией. В этих точках не определено направление вектора линейной поляризации. C-точки – это точки неопределённости направления большой оси эллипса локальных векторов эллиптической поляризации. Индексы сингулярности для V- и C-точек, а также для L- и S-линий определяются с помощью параметров Стокса и комплексных полей Стокса [4]. В более поздних работах, например в [5], индексы поляризационной сингулярности (ИПС) рассчитывались для световых полей с несколькими особыми точками. В [5] их рассчитыва-

ли специальным способом, который не является универсальным. В последние годы появляется много работ по световым пучкам с неоднородной поляризацией, которые имеют в своем сечении много сингулярных точек [6] или линий [7]. В этом случае векторное поле может характеризоваться не локальным, а глобальным ИПС, который учитывает все сингулярности в поперечном сечении. Так, если имеется карта такого векторного поля, то можно, не определяя поведение амплитуды во всём сечении и не определяя положения отдельных сингулярностей, установить значение ИПС путём обхода поля по замкнутому контуру и подсчётом числа оборотов вектора линейной поляризации или большей оси эллиптической поляризации. Если аналитический вид поля не известен, то с помощью четырех измерений интенсивности при разных наклонах осей поляризаторов

$$\begin{aligned} P &= I(0^\circ, 0) + I(90^\circ, 0), \quad Q = I(0^\circ, 0) - I(90^\circ, 0), \\ U &= I(45^\circ, 0) - I(135^\circ, 0), \quad V = I(45^\circ, \pi/2) - I(135^\circ, \pi/2) \end{aligned}$$

можно определить экспериментально все четыре проекции вектора Стокса, на основе которых получить комплексное поле Стокса и применить далее формулу Берри. Экспериментально ИПС можно определять с помощью наклона сферической линзы [8]. Возникает вопрос, существует ли универсальный подход, чтобы рассчитывать ИПС для таких векторных полей?

В этой работе мы предлагаем рассчитывать индекс поляризации любых векторных световых полей [3] аналогично расчету топологического заряда (ТЗ) скалярных оптических вихрей по формуле Берри [9]:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \quad (1)$$

Световых полей с неоднородной поляризацией, которые описываются в начальной плоскости с помощью векторов Джонса, известно целое множество. Далее мы найдем ИПС для некоторых таких полей и проанализируем их особенности.

В частности, мы установим ИПС для векторных полей с цилиндрической поляризацией (радиальной и азимутальной) высших порядков, с гибридной радиально-циркулярной (и азимутально-циркулярной) поляризацией произвольных порядков, для полей с несколькими точками и с несколькими линиями поляризации сингулярности, для пучков Пуанкаре, а также для полей с поляризацией, изменяющейся от центра к периферии.

1. ИПС для цилиндрических векторных полей высокого порядка

Рассмотрим начальное поле с радиальной и аналогично с азимутальной поляризацией n -го порядка, вектора Джонса которых имеют вид [10, 11]:

$$E_R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}, \quad E_A(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где (r, φ) – полярные координаты в начальной плоскости. В центре такого поля (при $r=0$) находится точка сингулярности (V-точка), в которой направление вектора линейной поляризации не определено.

ИПС находится с помощью параметров Стокса [12] $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, где

$$S_1 = \frac{|E_x|^2 - |E_y|^2}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, S_2 = \frac{2 \text{Re}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2}, \quad (3)$$

$$S_3 = \frac{2 \text{Im}(E_x^* E_y)}{|E_x|^2 + |E_y|^2},$$

где Re и Im – знаки реальной и мнимой части числа. Вектор Стокса, как видно из (3), имеет единичную длину $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$. Для левого поля (2) параметры Стокса из (3) будут иметь вид:

$$S_1 = \cos(2n\varphi), S_2 = \sin(2n\varphi), S_3 = 0. \quad (4)$$

Так как в (4) $S_3=0$, то это означает, что в любой точке поля (2) поляризация линейная, кроме V-точки, в которой поляризация не определена. Комплексное поле Стокса для вектора (4) будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = \cos(2n\varphi) + i \sin(2n\varphi) = \exp(i2n\varphi). \quad (5)$$

Когда поляризация поля во всех точках линейная (то есть $S_3=0$), поперечные компоненты поля можно представить в виде $E_x = |E| \cos \psi$, $E_y = |E| \sin \psi$, где ψ – угол наклона вектора напряжённости к горизонтальной оси. Тогда параметры Стокса S_1 и S_2 соответственно равны $S_1 = \cos 2\psi$ и $S_2 = \sin 2\psi$, и потому угол наклона вектора напряжённости можно определить через параметры Стокса как $\psi = (1/2) \arg(S_1 + iS_2) = (1/2) \arg S_c$. То есть угол наклона вектора напряжённости в любой точке равен половине фазы поля (5) и потому расчёт ИПС векторных полей можно свести к расчёту ТЗ скалярного поля (5).

Так, индекс Стокса σ для поля (2) равен ТЗ поля (5), который рассчитывается аналогично (1) и равен:

$$\sigma = 2\eta = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial S_c(\varphi) / \partial \varphi}{S_c(\varphi)}. \quad (6)$$

В (6) η называется индексом Пуанкаре–Хопфа [3]. Подставляя (5) в (6), получим: $\sigma = 2\eta = 2n$.

Для правого поля в (2) параметры Стокса будут похожие:

$$S_1 = -\cos(2n\varphi), S_2 = -\sin(2n\varphi), S_3 = 0. \quad (7)$$

И ИПС азимутального поля высокого порядка будет равен порядку этого поля: $\sigma = 2\eta = 2n$.

На рис. 1 показаны карты векторных полей (распределения векторов линейной поляризации) для поля (2) с радиальной и с азимутальной поляризацией первого и третьего порядка.

Подсчёт областей с определённым направлением поляризации (например, правым) на рис. 1 подтверждает, что индекс Пуанкаре–Хопфа поля (2) равен n .

Заметим, что при распространении в волноводе поле с радиальной (левое поле (2)) и с азимутальной (правое поле (2)) поляризацией можно рассматривать как соответственно ТЕ- и ТМ-моду. При этом, так как ИПС обеих мод равен порядку поля (то есть $\eta = n$), то ТЕ- и ТМ-моды нельзя различить с помощью определения индекса Стокса или Пуанкаре–Хопфа. Эти моды можно отличить друг от друга путём определения локальной поляризации в какой-то определённой точке. Например, можно пропустить поле через поляризатор, пропускающий только горизонтальную поляризацию (из рис. 1а пройдёт только левая и отмеченная кругом правая область, а из рис. 1б пройдёт только верхняя и отмеченная кругом нижняя область), и потом, повернув его на 90 градусов, измерить вертикальную поляризацию.

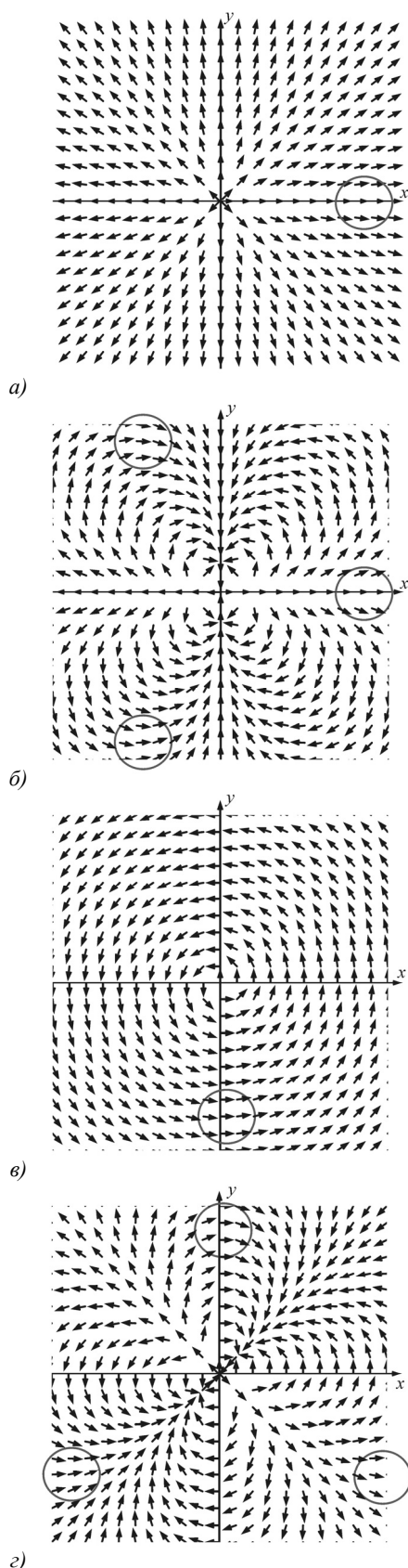


Рис. 1. Карты векторных полей с радиальной поляризацией первого ($n = 1$) (а) и третьего ($n = 3$) (б) порядка и с азимутальной поляризацией первого ($n = 1$) (в) и третьего порядка ($n = 3$) (г) (кругами показаны области, где вектор поляризации направлен вправо)

2. ИПС обобщенного векторного поля разного порядка

В [13] рассмотрено обобщенное цилиндрическое векторное поле разных порядков, вектор Джонса которого равен

$$E_{Rm,n}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin m\varphi \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Если проекции векторного поля на поперечные декартовы оси действительные, то ИПС можно находить проще, сразу образуя скалярное комплексное поле вида:

$$E_{c,n}(\varphi) = E_x + iE_y = \cos n\varphi + i \sin m\varphi. \tag{9}$$

Согласно (1) индекс Пуанкаре–Хопфа для векторного поля (8) будет равен:

$$\begin{aligned} \eta_{n,m} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{-n \sin n\varphi + im \cos m\varphi}{\cos n\varphi + i \sin m\varphi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{n \sin n\varphi \sin m\varphi + m \cos m\varphi \cos n\varphi}{\cos^2 n\varphi + \sin^2 m\varphi}. \end{aligned} \tag{10}$$

Можно показать [13], что имеют место некоторые соотношения для ИПС (10):

$$\eta_{-n,m} = \eta_{n,m}, \quad \eta_{n,-m} = -\eta_{n,m}, \quad \eta_{pn,pm} = p\eta_{n,m}, \quad \eta_{n,3n} = -n. \tag{11}$$

Кроме того, в [13] доказано, что при нечётном $n + m$ ИПС равен нулю, а если один из порядков равен единице, то ИПС по модулю тоже равен единице ($\eta_{n1} = 1, \eta_{1m} = (-1)^{(m-1)/2}$).

На рис. 2 показано распределение векторов линейной поляризации в сечении пучка (8) с порядками одной или разной чётности.

При обходе вокруг поля на рис. 2а против часовой стрелки угол наклона вектора напряжённости к оси x сначала возрастает на π (участок АВ) и затем убывает на π (участок ВА). Это подтверждает, что индекс Пуанкаре–Хопфа поля на рис. 2а равен нулю. На рис. 2б есть три периферийные области, где вектор поляризации направлен вправо. Однако в отличие от рис. 1б, ε индекс Пуанкаре–Хопфа уже не равен трём, поскольку при обходе вокруг поля против часовой стрелки угол наклона вектора напряжённости к оси x возрастает на $\pi/2$ на участках АВ и CD и убывает на $3\pi/2$ на участках BC и DA. Поэтому индекс Пуанкаре–Хопфа поля на рис. 2б равен -1 ($(\pi/2 - 3\pi/2 + \pi/2 - 3\pi/2)/(2\pi) = -1$), что согласуется с [12].

3. ИПС гибридного радиально-циркулярного и азимутально-циркулярного поля высокого порядка

Гибридные световые поля – радиально-циркулярное и азимутально-циркулярное были введены в рассмотрение в [14] и описываются векторами Джонса вида:

$$E_{RC}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ i \sin n\varphi \end{pmatrix}, \quad E_{AC}(\varphi) = \begin{pmatrix} -i \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Вектор Стокса для правого поля в (12) будет иметь вид:

$$S_1 = \cos(2n\varphi), S_2 = 0, S_3 = \sin(2n\varphi). \quad (13)$$

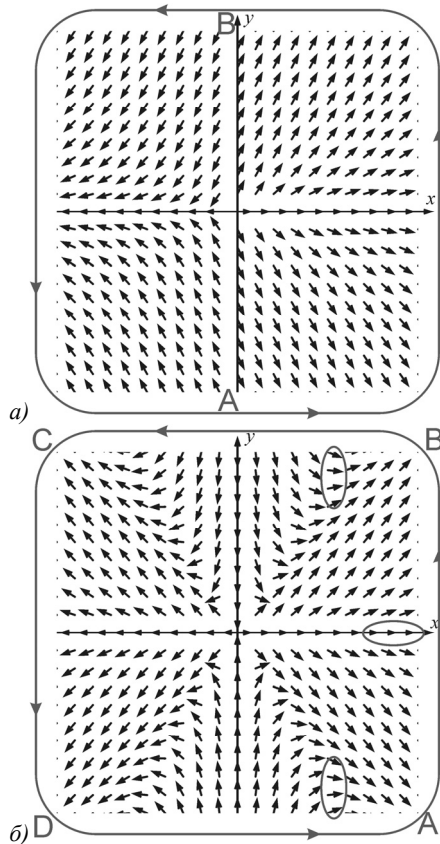


Рис. 2. Карты обобщённых векторных полей порядков $(n, m) = (1, 2)$ (а) и $(n, m) = (1, 3)$ (б). Буквы А, В, С, D обозначают границы участков контура, при обходе вдоль которого угол вектора напряжённости к оси x возрастает или убывает

У поля (12) при определенных углах $2n\varphi = \pi/2 + \pi t$ будет круговая поляризация, а при других углах $2n\varphi = \pi t$ будет линейная поляризация. Параметры Стокса (13) не позволяют определить индекс сингулярности полей (12). Отсюда заключаем, что поля (12) не имеют точек сингулярности.

Когда поле E_{RC} из (12) колеблется во времени, в каждой точке напряжённость описывает эллипс поляризации, полуоси которого равны [15, 16] $E_1 = (\cos n\varphi, 0)^T$ и $E_2 = (0, \sin n\varphi)^T$.

Аналогично для поля E_{AC} из (12), в каждой точке напряжённость описывает эллипс поляризации, полуоси которого равны $E_1 = (0, \cos n\varphi)^T$ и $E_2 = (-\sin n\varphi, 0)^T$.

Отсюда следует, что при углах $\varphi = \pi m/n$ (m – произвольное целое число) вектор напряжённости поля E_{RC} направлен горизонтально, а у поля E_{AC} – вертикально. Это подтверждает и рис. 3, на котором показаны карты векторных полей для гибридного радиально-циркулярного и азимутально-циркулярного поля третьего порядка.

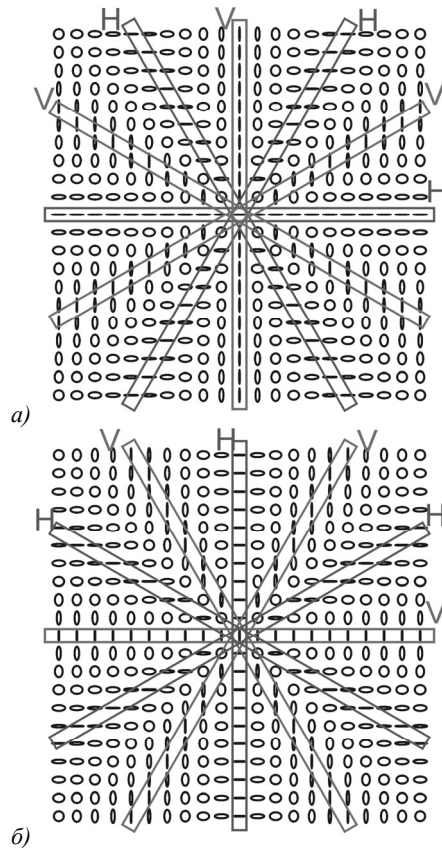


Рис. 3. Карты векторных полей для гибридного радиально-циркулярного (а) и азимутально-циркулярного поля (б) третьего порядка ($n = 3$). Прямоугольниками обведены области линейной поляризации. Буквы Н и V обозначают соответственно области горизонтальной и вертикальной линейной поляризации

4. ИПС гибридного векторного поля с параметром

Гибридное векторное поле высокого порядка с параметром a введено в рассмотрение в [17] и описывается вектором Джонса вида:

$$E_H(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ ia + \sin n\varphi \end{pmatrix}. \quad (14)$$

У поля (14) одна точка сингулярности (но не V- и не С-типа) в начале координат. Параметры Стокса будут иметь вид:

$$S_1 = \frac{\cos 2n\varphi - a^2}{1 + a^2}, S_2 = \frac{\sin 2n\varphi}{1 + a^2}, \quad (15)$$

$$S_3 = \frac{2a \cos n\varphi}{1 + a^2}.$$

При определенных углах, когда $\cos(n\varphi) = \pm 1$ и $a = 1$, у поля (14) имеются С-линии, то есть линии, на которых поляризация круговая. Комплексное поле Стокса для вектора (15) будет иметь вид:

$$S_c = \frac{\exp(2in\varphi) - a^2}{1 + a^2}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (6), получим индекс Стокса для гибридного поля (14):

$$\sigma = \frac{n}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(1 - a^2 \cos 2n\varphi)}{(1 + a^4) - 2a^2 \cos 2n\varphi}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\sigma = 2\eta = \begin{cases} n, & a = \pm 1, \\ 2n, & |a| < 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases} \quad (18)$$

Из (18) видно, что при $a=1$ у векторного поля может быть полуцелый ИПС.

На рис. 4 показано распределение векторов поляризации для гибридного векторного поля (14) при $a=1$ для чётного ($n=2$) и нечётного ($n=3$) порядка.

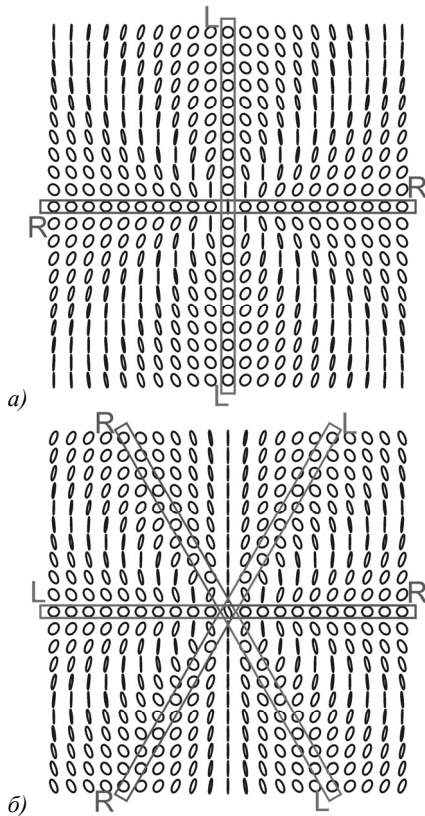


Рис. 4. Карты гибридного векторного поля с параметром $a=1$ при $n=2$ (а) и $n=3$ (б). Прямоугольниками обведены области круговой поляризации (С-линии). Буквами R и L обозначены соответственно области с правой и левой круговой поляризацией

Из рис. 4а видно, что большая ось эллипса с правой поляризацией при обходе вокруг центра поля сделала оборот на 2π , то есть $\eta = 2\pi / (2\pi) = 1$. А на рис. 4б видно, что большая ось эллипса с правой поляризацией за полный угол 2π обернулась три раза. То есть $\eta = 3\pi / (2\pi) = 3/2$. Это согласуется с (18).

5. Поле с несколькими точками поляризационной сингулярности

В [6] рассмотрено векторное поле с n сингулярными точками, лежащими на окружности радиуса a , вектор Джонса которого можно записать в виде:

$$E_{ns}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r^n \cos n\varphi - a^n \\ r^n \sin n\varphi \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Векторное поле с несколькими сингулярностями уже не может зависеть только от полярного угла φ , но должно также зависеть от радиальной переменной r (19).

Так как проекции поля (19) действительные, то его ИПС можно найти с помощью скалярного комплексного поля:

$$E_{c,n}(r, \varphi) = E_x + iE_y = r^n \exp(in\varphi) - a^n. \quad (20)$$

Топологический заряд скалярного поля (20) находится по формуле Берри (1) и равен:

$$\begin{aligned} TC = \eta &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{inr^n \exp(in\varphi)}{r^n \exp(in\varphi) - a^n} = n. \end{aligned} \quad (21)$$

Для сравнения найдем ИПС поля (19) с помощью параметров Стокса. Параметры Стокса для поля (19) имеют вид:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{r^{2n} \cos(2n\varphi) - 2r^n a^n \cos(n\varphi) + a^{2n}}{r^{2n} + a^{2n} - 2r^n a^n \cos(n\varphi)}, \\ S_2 &= \frac{r^{2n} \sin(2n\varphi) - 2r^n a^n \sin(n\varphi)}{r^{2n} + a^{2n} - 2r^n a^n \cos(n\varphi)}, \\ S_3 &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) видно, что поле (19) локально линейно поляризовано, так как $S_3=0$. Комплексное поле Стокса имеет вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = \frac{r^{2n} \exp(i2n\varphi) - 2r^n a^n \exp(in\varphi) + a^{2n}}{r^{2n} + a^{2n} - 2r^n a^n \cos(n\varphi)}. \quad (23)$$

На основе (23) и (6) найдем индекс Стокса для поля (19):

$$\begin{aligned} \sigma = 2\eta &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial S_c(r, \varphi) / \partial \varphi}{S_c(r, \varphi)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{i2nr^{2n} e^{i2n\varphi} - 2inr^n a^n e^{in\varphi}}{r^{2n} e^{i2n\varphi} - 2inr^n a^n e^{in\varphi} + a^{2n}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2nr^{2n} e^{i2n\varphi}}{r^{2n} e^{i2n\varphi}} = 2n. \end{aligned} \quad (24)$$

Видно, что уравнения (21) и (24) дают одинаковый результат: $\eta = n$.

На рис. 5 показаны распределения векторов линейной поляризации в сечении пучка (19) с тремя ($n=3$) и четырьмя ($n=4$) точками поляризационной сингулярности при $a=R/2$ (R – полуразмер расчётной области). Также видно, что в случае четырёх сингулярностей имеется две точки с радиальной поляризацией, и две – с азимутальной [6].

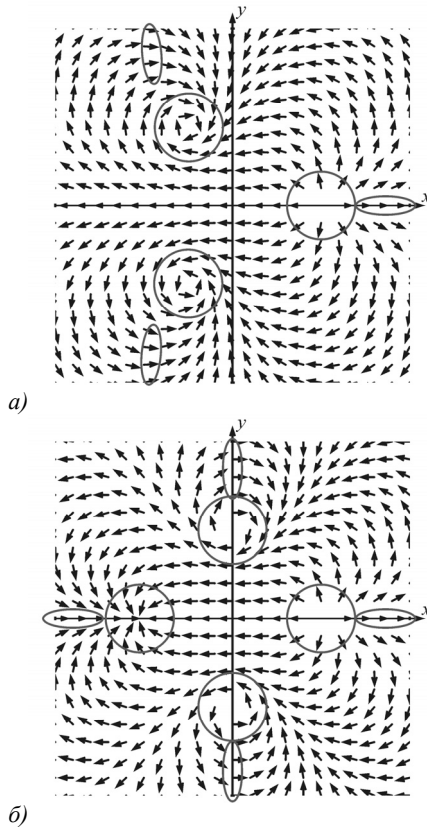


Рис. 5. Карты векторных полей (19) с тремя ($n = 3$) (а) и с четырьмя ($n = 4$) (б) точками поляризационной сингулярности, расположенными на расстоянии $a = R/2$ (R – полуразмер расчётной области) от оптической оси. Окружностями обведены точки поляризационной сингулярности, а эллипсами показаны области, где вектор напряжённости направлен вправо

На рис. 5а, б видно, что количество периферийных областей с определённым направлением поляризации (например, правым) равно числу поляризационных сингулярностей. Кроме того, угол наклона вектора напряжённости к оси x при переходе от одной такой области к другой возрастает. Поэтому рис. 5 подтверждает, что $\eta = n$.

6. Векторное поле с несколькими линиями сингулярности

Если в поле (19) убрать радиальную переменную, то вместо n точек поляризационной сингулярности появятся n сингулярных линий (V-линий, такие линии также обозначают как L-линии) и поле по-прежнему будет в каждой точке линейно поляризованным. Рассмотрим вектор Джонса вида:

$$E_R(r) = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) - a \\ \sin(n\varphi) \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Найдем ИПС поля (25) простым способом с помощью скалярного комплексного поля:

$$E_c(\varphi) = E_x + iE_y = \exp(in\varphi) - a. \tag{26}$$

Применяя формулу (1) к полю (26), получим:

$$TC = \eta = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} = \begin{cases} n/2, a = \pm 1, \\ n, |a| < 1, \\ 0, |a| > 1. \end{cases} \tag{27}$$

Из (27) видно, что в отличие от (24) поле (25) может иметь полуцелый ИПС, а не только целый, как поле (19). Это происходит потому, что у поля (25) при $a = 1$ есть n V-линий, исходящих из центра под углами $n\varphi = 2\pi m, m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Наличие V-линий в поле (25) приводит к разделению начальной плоскости на n секторов, и при переходе через V-линию вектор линейной поляризации скачком меняет направление на π . Поэтому сколько V-линий, столько раз вектор поляризации меняется на π при обходе по замкнутому контуру вокруг центра координат. Вот и получается, что $\eta = n\pi / (2\pi) = n/2$. При $a = -1$ V-линии поля (25) будут исходить из центра под углами $n\varphi = \pi + 2\pi m, m = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Если $a = 0$, то поле (25) совпадает с обычным радиальным полем высокого порядка (2) и имеет одну V-точку в центре.

На рис. 6 показаны распределения векторов линейной поляризации в сечении пучка (25) второго ($n = 2$) и третьего ($n = 3$) порядка при $a = 1/2, a = 3/2$ и $a = 1$.

Из рис. 6а, б видно, что количество периферийных областей с определённым направлением поляризации (например, правым) равно порядку n . Кроме того, угол наклона вектора напряжённости к оси x при переходе от одной такой области к другой возрастает на 2π (от А к В и от В к А на рис. 6а, от А к В, от В к С и от С к А на рис. 6б). Поэтому рис. 6а, б подтверждают, что $\eta = n$ при $|a| < 1$.

Из рис. 6в, г видно, что в отличие от рис. 6а, б угол наклона вектора напряжённости к оси x при обходе по контуру вокруг поля то возрастает, то убывает. Так, на рис. 6в этот угол возрастает примерно $\pi/2$ на участках АВ и CD и настолько же убывает на участках ВС и DA. Аналогичная смена участков происходит на рис. 6г – угол наклона возрастает на участках АВ, CD, EF и убывает на участках ВС, DE, FA. Поэтому рис. 6в, г подтверждают, что $\eta = 0$ при $|a| > 1$.

Из рис. 6д, е видно, что при обходе по контуру вокруг поля угол наклона вектора напряжённости к оси x возрастает, но при пересечении n V-линий скачкообразно меняется на π . Так, на рис. 6д этот угол возрастает на π на участках АВ и ВА, а на рис. 6е он возрастает на π на участках АВ, ВС и СА. Поэтому рис. 6д, е подтверждают, что $\eta = n/2$ при $|a| = 1$.

7. Оптический вихрь с поляризационной сингулярностью

Рассмотрим вихревое световое поле с топологическим зарядом m и цилиндрической поляризацией n -го порядка. Вектор Джонса такого поля имеет вид:

$$E_{RV}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \exp(im\varphi) \cos(n\varphi + \delta) \\ \exp(im\varphi) \sin(n\varphi + \delta) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где δ – константа. Если из двух проекций векторного поля (28) сформировать скалярное комплексное поле вида

$$E_c(\varphi) = E_x + iE_y = \exp(im\varphi + in\varphi + i\delta), \quad (29)$$

то топологический заряд такого поля (29) будет равен $TC = m + n$. В (29) оба типа сингулярности (фазовая и поляризационная) дают вклад в ТЗ всего поля как равноправные слагаемые. Но если рассчитывать ИПС поля (28) с помощью параметров Стокса

$$\begin{aligned} S_1 &= \cos(2n\varphi + 2\delta), \\ S_2 &= \sin(2n\varphi + 2\delta), \\ S_3 &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

и комплексного поля Стокса

$$S_c = S_1 + iS_2 = \exp(2in\varphi + 2i\delta), \quad (31)$$

то получим, что ИПС равен: $\sigma = 2\eta = 2n$ и не зависит от номера m . Поэтому поляризационные сингулярности можно рассматривать двояким образом. Либо с помощью параметров Стокса, и тогда их ИПС будет равен n , либо с помощью комплексного поля (29), и тогда ТЗ такого поля будет равен $m + n$.

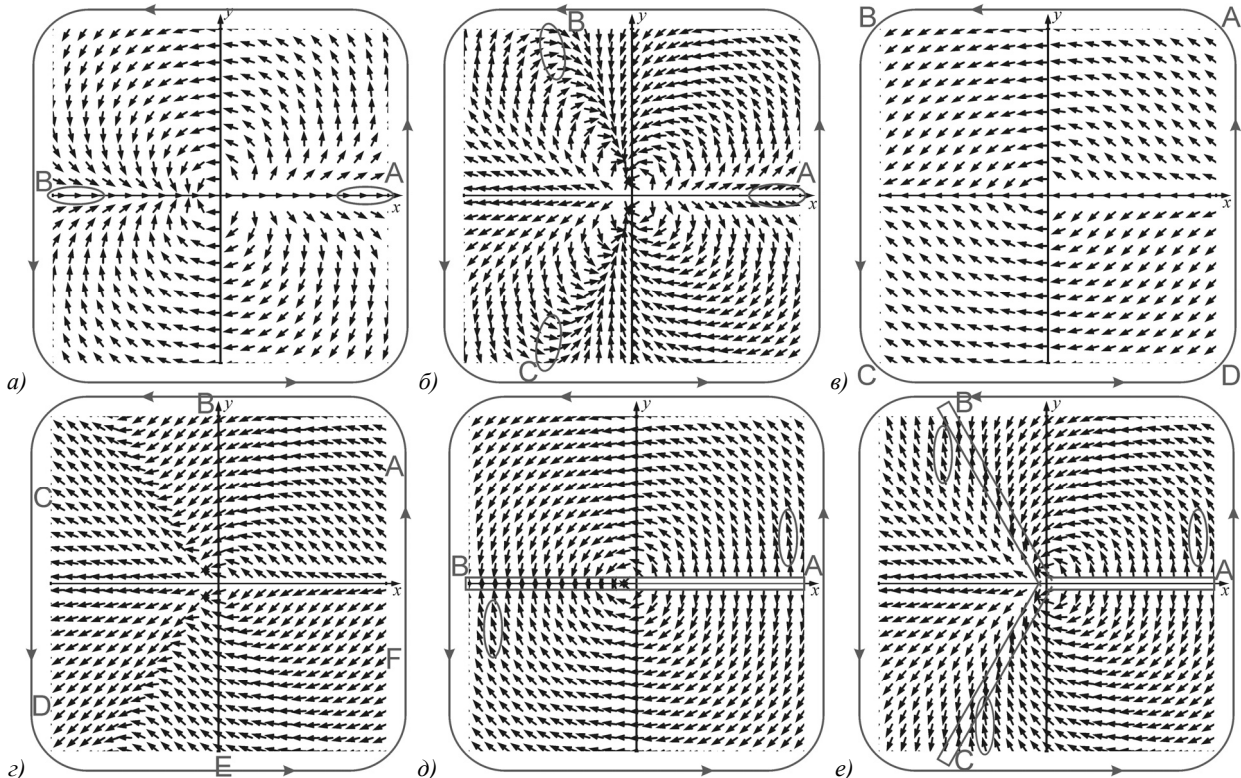


Рис. 6. Карты векторных полей (25) второго ($n = 2$) (а, в, д) и третьего ($n = 3$) (б, г, е) порядка при $a = 1/2$ (а, б), $a = 3/2$ (в, г), $a = 1$ (д, е). Эллипсами показаны области, где вектор напряжённости направлен вправо (а, б) или вверх (д, е). Буквы А, В, С, D, E, F обозначают границы участков контура, при обходе вдоль которого угол вектора напряжённости к оси x возрастает или убывает. Прямоугольниками (д,е) показаны V-линии

На рис. 7 показана карта вихревого векторного поля (28) с фазовой сингулярностью первого порядка ($m = 1$) и с поляризационной сингулярностью третьего порядка ($n = 3$) при $\delta = 0$. Заметим, что поле (28) нельзя показать при любом φ , поскольку в векторе Джонса (28) присутствует фаза. Поэтому, так как $m = 1$, в верхней полуплоскости ($y > 0$) показано поле (28) в предположении $\exp(i\varphi) = 1$, а в нижней полуплоскости ($y < 0$) – в предположении $\exp(i\varphi) = -1$.

Из рис. 7 видно, что количество периферийных областей с определённым направлением поляризации (например, правым) равно четырём, то есть как раз $m + n$.

8. ИПС пучков Пуанкаре

Световые пучки, состояние поляризации которых описывается единичными векторами на сфере Пуанкаре, имеют вектор Джонса вида [18, 19]:

$$E_P(\varphi) = \begin{pmatrix} ae^{-i\varphi} + be^{i\varphi} \\ ia e^{-i\varphi} - ib e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где $a = \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2}$, $b = \sin(\theta/2)e^{i\phi/2}$, а θ и ϕ – полярный и азимутальные углы на сфере. Вектор Стокса будет иметь координаты:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4|ab| \cos(2n\varphi - \arg a + \arg b), \\ S_2 &= 4|ab| \sin(2n\varphi - \arg a + \arg b), \\ S_3 &= |a|^2 - |b|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Из (33) следует, что круговая поляризация у пучков Пуанкаре будет, если

$$S_3 = \begin{cases} 1, & |a| = 1, |b| = 0, \\ -1, & |a| = 0, |b| = 1. \end{cases} \quad (34)$$

Комплексное поле Стокса с учетом (33) будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = 4|ab| \exp(2in\phi - i \arg a + i \arg b). \quad (35)$$

Из (35) следует, что ИПС поля (32) равен:

$$\eta = \begin{cases} n, & |a| > 0, |b| > 0, \\ 0, & |a| = 0, \text{ или } |b| = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Из (36) следует, что ИПС поля равен n , а само поле имеет неоднородную линейную поляризацию, если модули a и b оба отличны от нуля. И поле имеет круговую поляризацию и нет сингулярности ($\eta=0$), если либо a , либо b равны нулю.

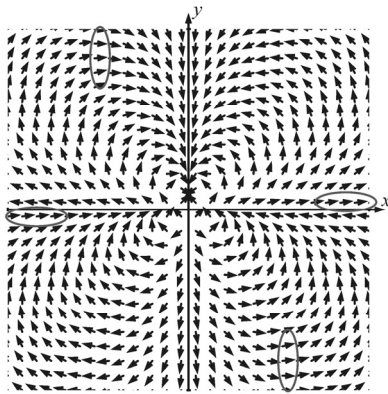


Рис. 7. Карта векторного поля оптического вихря первого порядка ($m = 1$) с поляризационной сингулярностью третьего порядка ($n = 3$)

9. Векторное поле в одноосном кристалле

В работе [20] рассмотрены оптические вихри в одноосных кристаллах. Вектор Джонса световых полей внутри кристалла имеет вид:

$$E_c(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma/2) + i \sin(\gamma/2) e^{i2\phi} \\ i \cos(\gamma/2) + \sin(\gamma/2) e^{i2\phi} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где γ – разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами в параксиальном случае, ϕ – поляриционный угол в сечении пучков. Параметры Стокса имеют вид:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \sin \gamma \sin 2\phi, \\ S_2 &= 2 \sin \gamma \cos 2\phi, \\ S_3 &= 2 \cos \gamma. \end{aligned} \quad (38)$$

Комплексное поле Стокса с учетом (38) будет иметь вид:

$$S_c = S_1 + iS_2 = 2i \sin \gamma \exp(-2i\phi). \quad (39)$$

Из (39) видно, что ИПС поля (37) равен

$$\eta = \begin{cases} -1, & \sin \gamma \neq 0, \\ 0, & \sin \gamma = 0. \end{cases} \quad (40)$$

Интересно, что если задержка фазы равна $\gamma = \pi$, то $\eta = 0$ и световое поле в кристалле представляет оптический вихрь с ТЗ 2 и круговой поляризацией. А если задержка фазы равна $\gamma = 0$, то оптического вихря нет в кристалле и пучок имеет только круговую поляризацию.

10. Световое поле с неоднородной поляризацией, изменяющейся по радиусу

В предыдущих параграфах рассматривались световые поля, состояние поляризации которых изменялось только по полярному (азимутальному) углу ϕ (кроме поля (19)). В этом параграфе рассмотрим световое поле, введенное в работе [21], состояние поляризации которого изменяется только по радиусу. Вектор Джонса такого поля имеет вид:

$$E_{RR}(r) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi nr / R) \\ i \sin(2\pi nr / R) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где R – это масштабный параметр. Компоненты вектора Стокса для поля (41) имеют вид:

$$S_1 = \cos(4\pi nr / R), \quad S_2 = 0, \quad S_3 = \sin(4\pi nr / R). \quad (42)$$

Из (42) следует, что у поля (41) будет правая круговая поляризация на радиусах, удовлетворяющих условию $r = (m + 1/2)R / (4n)$, левая круговая поляризация будет на радиусах $r = (m - 1/2)R / (4n)$ и линейная поляризация будет на радиусах $r = mR / (4n)$. Для поля (41) и для любого другого поля, состояние поляризации которого зависит только от радиальной переменной, при обходе по замкнутому контуру (по окружности любого радиуса) вокруг центра пучка направление векторов линейной поляризации и направления большой оси векторов эллиптической поляризации не будет меняться. То есть у полей, состояние поляризации которых зависит только от радиальной переменной, нет особых точек и индекс поляризионной сингулярности равен нулю.

На рис. 8 показано распределение линейной (отрезки) и круговой поляризации (круги) в сечении пучка (41) для $n = 2$ (а) и $n = 3$ (б).

Из рис. 8 видно, что внутри круга $r \leq R$ поле (41) имеет $4n$ колец радиуса $r = mR / (4n)$ с линейной поляризацией (на рис. 8 показаны кольца с горизонтальной поляризацией с радиусами $r = mR / (2n)$), между которыми располагаются области с круговой поляризацией (С-линии или С-кольца).

11. Обсуждение результатов

В этом параграфе сведем полученные ИПС разных световых полей в одну табл. 1 и сравним их.

Из таблицы видно, что у гибридных световых полей E_{RC} , E_H и E_P третья компонента вектора Стокса может быть отлична от нуля при некоторых поляриционных углах ϕ и при некоторых значениях параметров a и b . При этом ИПС η может быть любым: нулевым (E_{RC}), полуцелым (E_H) или целым (E_P). У только век-

торных световых полей \mathbf{E}_R , \mathbf{E}_{nS} и \mathbf{E}_{nV} третья компонента вектора Стокса равна нулю ($S_3=0$), а ИПС может быть как целым (\mathbf{E}_R , \mathbf{E}_{nS}), так и полуцелым, и нулевым (\mathbf{E}_{nV}). Заметим, что третья компонента ненор-

мированного вектора Стокса S_3 (3) совпадает с продольной проекцией спинового углового момента S_y :

$$S_3 = S_z = 2 \operatorname{Im}[\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}]_z. \tag{43}$$

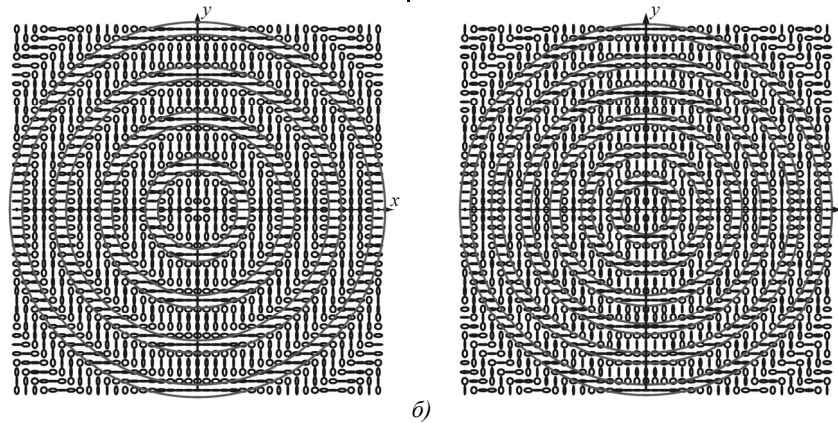


Рис. 8. Карты векторных полей (41) с радиально-неоднородной поляризацией при $n = 2$ (а) и при $n = 3$ (б). Окружностями показаны области с горизонтальной линейной поляризацией

Табл. 1. Сравнение векторных световых полей высокого порядка и их ИПС

Обозначение векторного поля	Вектор Джонса	Параметр Стокса S_3	Индекс поляризации сингулярности	Источник
\mathbf{E}_R	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = n$	[22]
\mathbf{E}_{RC}	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ i \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = \sin 2n\varphi$	$\eta = 0$	[14]
\mathbf{E}_H	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ ia + \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = a \cos n\varphi$	$\eta = \begin{cases} n/2, a = 1 \\ n, a \neq 1 \end{cases}$	[17]
\mathbf{E}_{nS}	$\begin{pmatrix} r^n \cos n\varphi - a^n \\ r^n \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = n$	[6]
\mathbf{E}_{nV}	$\begin{pmatrix} \cos n\varphi - a \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = \begin{cases} n/2, a = 1 \\ n, a < 1 \\ 0, a > 1 \end{cases}$	-
\mathbf{E}_{RV}	$e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix}$	$S_3 = 0$	$\eta = n,$ $TC = m + n$	[23]
\mathbf{E}_P	$\begin{pmatrix} ae^{-i\varphi} + be^{i\varphi} \\ iae^{-i\varphi} - ibe^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$S_3 = a ^2 - b ^2$	$\eta = \begin{cases} n, a \neq 0, b \neq 0 \\ 0, a = 0 \vee b = 0 \end{cases}$	[18], [19]

Среди всех полей из таблицы только векторное поле \mathbf{E}_{nS} зависит от обеих полярных координат и имеет n точек поляризации сингулярности, лежащих равномерно на окружности некоторого радиуса. Для всех остальных полей точка поляризации сингулярности целого или полуцелого порядка лежит в начале координат (на оптической оси). Нет совсем точек поляризации сингулярности только у поля \mathbf{E}_{RC} .

Заключение

В работе рассмотрено новое векторное световое поле с неоднородной линейной поляризацией \mathbf{E}_{nV} высокого порядка n , зависящее от действительного па-

раметра. Это световое поле сравнено с известными векторными и гибридными световыми полями, которые имеют точки поляризации сингулярности. У всех рассмотренных световых полей были найдены индексы поляризации сингулярности. Показано, что у рассматриваемого векторного поля V-точка поляризации сингулярности находится на оптической оси и индекс сингулярности может быть как целым, равным порядку n , так и полуцелым $n/2$, а также нулевым. В данной работе для 7 разных векторных и гибридных световых полей, в том числе для полей с многими точками поляризации сингулярности, найдены индексы поляризации сингулярности по известной формуле М. Берри, которая

применяется обычно для нахождения топологического заряда скалярных вихревых световых полей. Рассмотрены световые поля, состояние поляризации которых по сечению пучка зависит только от расстояния от центра пучка. Показано, что для таких полей индекс поляризационной сингулярности равен нулю.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 22-22-00265) (теория), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (моделирование).

References

[1] Nye JE. Natural focusing and fine structure of light. 1st ed. Institute of Physics Publishing; 1999. ISBN: 978-0-7503-0610-2.

[2] Freund I. Poincaré vortices. *Opt Lett* 2001; 26(24): 1996-1998. DOI: 10.1364/OL.26.001996.

[3] Freund I. Polarization singularity indices in Gaussian laser beams. *Opt Commun* 2002; 201(4-6): 251-270. DOI: 10.1016/S0030-4018(01)01725-4.

[4] Freund I, Mokhun AI, Soskin MS, Angelsky OV, Mokhun II. Stokes singularity relations. *Opt Lett* 2002; 27(7): 545-547. DOI: 10.1364/OL.27.000545.

[5] Vyas S, Kozawa Y, Sato S. Polarization singularities in superposition of vector beams. *Opt Express* 2013; 21(7): 8972-8986. DOI: 10.1364/OE.21.008972.

[6] Kovalev AA, Kotlyar VV. Fresnel and Fraunhofer diffraction of a Gaussian beam with several polarization singularities. *Computer Optics* 2018; 42(2): 179-189. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-179-189.

[7] Ruchi, Senthilkumaran P, Pal SK. Phase singularities to polarization singularities. *Int J Opt* 2020; 2020: 2812803. DOI: 10.1155/2020/2812803.

[8] Komal B, Deepa S, Kumar S, Senthilkumaran P. Polarization singularity index determination by using a tilted lens. *Appl Opt* 2021; 60(12): 3266-3271. DOI: 10.1364/AO.420554.

[9] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A–Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.

[10] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photon* 2009; 1(1): 1-57. DOI: 10.1364/AOP.1.000001.

[11] Kolyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA. Sharp focusing of a light field with polarization and phase singularities of an arbitrary order. *Computer Optics* 2019; 43(3): 337-346. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.

[12] Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999.

[13] Kotlyar VV, Kovalev AA, Stafeev SS, Nalimov AG, Rasouli S. Tightly focusing vector beams containing V-point polarization singularities. *Opt Las Tech* 2022; 145: 107479. DOI: 10.1016/j.optlastec.2021.107479.

[14] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kozlova ES, Nalimov AG. Spin-orbital conversion of a strongly focused light wave with high-order cylindrical–circular polarization. *Sensors* 2021; 21(19): 6424. DOI: 10.3390/s21196424.

[15] Dennis MR. Polarization singularities in paraxial vector fields: morphology and statistics. *Opt Commun* 2002; 213(4-6): 201-221. DOI: 10.1016/S0030-4018(02)02088-6.

[16] Berry MV. Index formulae for singular lines of polarization. *J Opt A–Pure Appl Opt* 2004; 6(7): 675-678. DOI: 10.1088/1464-4258/6/7/003.

[17] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG. Sharp focusing of a hybrid vector beam with a polarization singularity. *Photonics* 2021; 8(6): 227. DOI: 10.3390/photonics8060227.

[18] Beckley AM, Brown TG, Alonso MA. Full Poincaré beams. *Opt Express* 2010; 18(10): 10777-10785. DOI: 10.1364/OE.18.010777.

[19] Chen S, Zhou X, Liu Y, Ling X, Luo H, Wen S. Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere. *Opt Lett* 2014; 39(18): 5274-5276. DOI: 10.1364/OL.39.005274.

[20] Volyar AV, Fadeeva TA. Generation of singular beams in uniaxial crystals. *Optics and Spectroscopy* 2003; 94: 235-244. DOI: 10.1134/1.1555184.

[21] Li T, Cao B, Zhang X, Ma X, Huang K, Lu X. Polarization transitions in the focus of radial-variant vector circular Airy beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36(4): 526-532. DOI: 10.1364/JOSAA.36.000526.

[22] Rashid M, Marago OM, Jones PH. Focusing of high order cylindrical vector beams. *J Opt A–Pure Appl Opt* 2009; 11(6): 065204. DOI: 10.1088/1464-4258/11/6/065204.

[23] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA. Reverse and toroidal flux of light fields with both phase and polarization higher-order singularities in the sharp focus area. *Opt Express* 2019; 27(12): 16689-16702. DOI: 10.1364/OE.27.016689.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника»

РАН. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@ipsiras.ru.

Зайцев Владислав Дмитриевич, 1991 года рождения. В 2020 году окончил магистратуру Самарского государственного университета имени академика С.П. Королёва по специальности «Прикладная математика и физика». Аспирант Самарского национального исследовательского университета. Область научных интересов: дифракционная оптика, метод конечных элементов, диэлектрики. E-mail: zaicev-vlad@yandex.ru. ORCID: 0000-0002-1243-8208.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 17 марта 2022 г. Окончательный вариант – 29 апреля 2022 г.

Inhomogeneously polarized light fields: polarization singularity indices derived by analogy with the topological charge

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, V.D. Zaitsev^{1,2}

¹ IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

² Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

In this work, we study several different vector and hybrid light fields, including those with multiple polarization singularities. We derive polarization singularity indices by adopting a well-known M.V. Berry's formula, which is commonly used to obtain the topological charge of scalar vortex light fields. It is shown that fields whose polarization state depends only on the polar angle in the beam cross section can have either polarization singularity lines outgoing from the center, or a single polarization singularity in the center of the beam cross section. If the polarization state of the field depends only on the radial variable, then such fields have no polarization singularities and their index is equal to zero. If the polarization state of a vector field depends on both polar coordinates, then such a field can have several polarization singularities at different locations in the beam cross section. We also investigate a vector field with high-order radial polarization and with a real parameter. At different values of this parameter, such a field has either several polarization singularity lines outgoing from the center, or a single singular point in the center. The polarization singularity index of such a field for different parameters can be either half-integer, or integer, or zero.

Keywords: inhomogeneous polarization, polarization singularity, polarization singularity index, Poincaré-Hopf, topological charge.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Zaitsev VD. Inhomogeneously polarized light fields: polarization singularity indices derived by analogy with the topological charge. *Computer Optics* 2022; 46(5): 671-681. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1126.

Acknowledgements: The work was funded by the Russian Science Foundation under grant # 22-22-00265 (theoretical study) and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the government project of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (numerical simulation).

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@ipsiras.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: alanko@ipsiras.ru.

Vladislav Dmitrievich Zaitsev (b. 1991) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State University (2020). PhD student of Samara National Research University. Research interests are diffraction optics, finite element method, dielectrics. E-mail: zaitsev-vlad@yandex.ru.

Received March 17, 2022. The final version – April 29, 2022.
