

Измерение орбитального углового момента астигматического пучка Эрмита–Гаусса

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.П. Порфирьев^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,

443001, Россия, Самарская область, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Рассмотрены три разных типа астигматических Гауссовых пучков, комплексная амплитуда которых в зоне дифракции Френеля описывается многочленом Эрмита с номером $(n, 0)$ с комплексным аргументом. Первый тип – это оптический Гауссов вихрь с круговой симметрией и топологическим зарядом n , прошедший цилиндрическую линзу. При распространении оптический вихрь «распадается» на n оптических вихрей первого порядка. Его орбитальный угловой момент на один фотон равен n . Второй тип – это эллиптический оптический Гауссов вихрь с топологическим зарядом n , прошедший цилиндрическую линзу. При специальном выборе степени эллиптичности (1:3) такой пучок сохраняет свою структуру при распространении и вырожденный ноль интенсивности на оптической оси не «распадается» на n оптических вихрей. Орбитальный угловой момент такого пучка дробный и не равен n . Третий тип – это астигматический пучок Эрмита–Гаусса порядка $(n, 0)$, который формируется после прохождения пучком Эрмита–Гаусса цилиндрической линзы. Цилиндрическая линза вносит орбитальный угловой момент в исходный пучок Эрмита–Гаусса. Орбитальный угловой момент такого пучка состоит из суммы вихревой и астигматической составляющих и может достигать больших значений (десятки и сотни тысяч на фотон). При определённых условиях нулевые линии интенсивности пучка Эрмита–Гаусса «собираются» в n -кратно вырожденный ноль интенсивности на оптической оси, и орбитальный угловой момент такого пучка равен n . По измерению двух распределений интенсивности астигматического пучка Эрмита–Гаусса в фокусах двух цилиндрических линз рассчитан нормированный орбитальный угловой момент: экспериментальное значение – 13,62, теоретическое значение – 14,76, СКО – 7%.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент, пучок Эрмита–Гаусса, астигматизм, цилиндрическая линза, полином Эрмита.

Цитирование: Котляр, В.В. Измерение орбитального углового момента астигматического пучка Эрмита–Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 356-367. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-356-367.

Введение

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) активно исследуются в настоящее время из-за широкого применения для оптического захвата и вращения микрочастиц [1] и холодных атомов [2], в фазово-контрастной микроскопии [3], в микроскопии со стимулированным истощением излучения [4], в оптической классической [5] и квантовой [6] информатике. Чаще всего пучками с ОУМ являются вихревые лазерные пучки с сингулярной фазой и вихревым (спиральным) волновым фронтом. Комплексная амплитуда таких пучков имеет общий вид $A(r)\exp(in\varphi)$, где $A(r)$ – амплитуда пучка, (r, φ) – полярные координаты, n – топологический заряд оптического вихря. Плотность ОУМ и полный ОУМ на один фотон таких пучков равны топологическому заряду n . Возникают два вопроса. Все ли лазерные пучки с ОУМ имеют дислокацию фазы и вихревой волновой фронт, или есть другие типы пучков с ОУМ? И какой максимальный ОУМ можно получить на практике?

Ответ на первый вопрос положительный, и его можно найти в работе [7]. В [7] вычислили ОУМ для эллиптического Гауссова пучка, сфокусированного

цилиндрической линзой. В этой работе с помощью теоретической оценки показано, что у такого пучка ОУМ может быть равен 10000 на фотон. Правда, практически в [7] реализован только пучок с ОУМ, равным 25 на фотон. Заметим, что идея использования цилиндрической линзы для придания пучку ОУМ была впервые высказана в [8]. В [8] было экспериментально показано, что пучок Эрмита–Гаусса, не обладающий ОУМ, после цилиндрической линзы на определённом расстоянии и при определённых условиях преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с ОУМ.

В работах [9–20] пытались ответить на второй вопрос и получить как можно большее значение ОУМ. В [9] предложено увеличивать ОУМ с помощью набора Гауссовых вихревых пучков, центры которых расположены на окружности, а оптические оси отдельных пучков и общая оптическая ось являются скрещенными прямыми. В [9] показано, что ОУМ такого составного пучка может быть равен 204 на фотон. В [10] вместо Гауссовых пучков предлагается использовать небольшие отверстия в непрозрачном экране как точечные источники. Если их расположить в виде спирали, то в совокупности они сформируют вихревой пучок с ОУМ. В [10] практически реализован пучок с

ОУМ, равным 3. В [11] показано, что при острой фокусировке оптического вихря с большим топологическим зарядом уменьшается контраст или видность боковых лепестков. В [11] практически фокусировался пучок с ОУМ, равным 15 на фотон. В [12] предложен интересный способ определения топологического заряда оптического вихря с помощью кольцевой дифракционной решётки. Экспериментально показано, что таким способом можно определить топологический заряд ± 25 . В [13] экспериментально с помощью трёхволнового смещения в нелинейной среде Керра сформированы вихревые гармоники с ОУМ до 30 на фотон. В [14] с помощью цифрового многоэлементного зеркала (с числом микрзеркал 1024×768) практически осуществили генерацию идеального оптического вихря с топологическим зарядом 90. В [15] с помощью жидкокристаллического модулятора света (число элементов 1900×1200) сформировали оптический вихрь с топологическим зарядом 200, что позволило вращать микрочастицы диаметром 1,4 мкм со скоростью 500 мкм/с. В [16] также с помощью модулятора света (число отсчётов 1920×1080) сформированы перепутанные пары фотонов с ОУМ ± 300 на фотон. В [17] с помощью спирального фазового зеркала, полученного в пластинке алюминия алмазным резцом, экспериментально сформирован оптический вихрь с топологическим зарядом 100. Эти же авторы [18] с помощью усовершенствованной технологии на подложке из алюминия диаметром 75 мм и шероховатостью 3 нм создали спиральное зеркало, способное формировать оптические вихри с топологическим зарядом 1020. В [18] также интерферометрически доказали, что сформированный зеркалом оптический вихрь имеет топологический заряд 5050. В [19] с помощью электронной литографии в резисте РММА создали голограмму диаметром 80 мкм с разрешением 35 нм и высотой рельефа 25 нм, которая позволила сформировать вихревой пучок электронов с энергией 0,5–1 эВ с топологическим зарядом 1000. И, наконец, в [20] с помощью спирального алюминиевого зеркала диаметром около 50 мм для длины волны 810 нм сформированы фотоны, перепутанные по ОУМ и поляризации. Причём квантовый ОУМ фотонов был равен ± 10010 . Это максимальное значение ОУМ, полученное на сегодняшний день.

В предыдущих работах авторов [21, 22] были получены точные формулы для ОУМ астигматического Гауссова пучка, отличные от формул, полученных в [7]. В данной работе обобщаются результаты работ [21, 22] и рассматривается астигматический пучок Эрмита–Гаусса. Показано, что эллиптический пучок Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$ после цилиндрической линзы приобретает ОУМ, который в n раз больше, чем у эллиптического Гауссова пучка после цилиндрической линзы. Теоретическая оценка даёт значение для ОУМ такого пучка более 100 000 на фотон. Приведены также экспериментальные результаты для астигматического пучка Гаусса–Эрмита: полученный ОУМ отличался от теоретического на 7%.

В этой работе рассмотрены три типа астигматических пучков, комплексные амплитуды которых в зоне

дифракции Френеля описываются многочленами Эрмита порядка n с комплексным аргументом. Но физически эти пучки существенно отличаются друг от друга. Первый тип пучков описан в параграфе 1. Оптический вихрь с круговой симметрией и топологическим зарядом n , пройдя через цилиндрическую линзу, не приобретает дополнительного ОУМ; его нормированный ОУМ равен n и может быть определён простым подсчётом числа минимумов интенсивности на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы.

Второй тип (описан в параграфе 3) – это астигматический эллиптический Гауссов пучок, который формируется после прохождения цилиндрической линзы эллиптическим оптическим вихрем с топологическим зарядом n . При специальном выборе степени эллиптичности (1:3) такой пучок сохраняет свою структуру при распространении, и вырожденный ноль интенсивности на оптической оси такого пучка не «распадается» на n оптических вихрей. ОУМ такого пучка сложным образом зависит от параметров цилиндрической линзы, эллиптичности Гауссова пучка и топологического заряда вихря и может принимать значения как больше, так и меньше топологического заряда n .

И третий тип пучков (описан в параграфе 2) – это астигматические пучки Эрмита–Гаусса порядка $(0, n)$, которые формируются после прохождения пучком Эрмита–Гаусса цилиндрической линзы. У таких лазерных пучков полный ОУМ состоит из суммы астигматической и вихревой составляющих. При определённых условиях ОУМ может быть полностью вихревым, и тогда пучок будет иметь вид моды Лагерра–Гаусса $(0, n)$.

1. Оптический вихрь после цилиндрической линзы

В [23] показано, что на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы на прямой линии, идущей под углом 45° к декартовым осям, лежат изолированные нули интенсивности (точки сингулярности), число которых точно совпадает с топологическим зарядом оптического вихря n . Рассмотрим внедрение в Гауссов пучок с единичной максимальной амплитудой и радиусом перетяжки w

$$E_0(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) \quad (1)$$

оптического вихря n -го порядка

$$T_n^+(x, y) = (x + iy)^n = \sum_{l=0}^n C_l x^l (iy)^{n-l}, \quad (2)$$

где C_l – биномиальные коэффициенты:

$$C_l = \frac{n!}{l!(n-l)!}. \quad (3)$$

Пусть после полей (1) и (2) расположена цилиндрическая линза, ось которой совпадает с осью y , тогда сразу за цилиндрической линзой комплексная амплитуда поля равна:

$$E(x) = (x + iy)^n \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ikx^2}{2f}\right), \quad (4)$$

где k – волновое число света, f – фокусное расстояние цилиндрической линзы. Заметим, что поворот цилиндрической линзы вокруг оптической оси на некоторый угол приводит только к повороту картины интенсивности в плоскости наблюдения на такой же угол. Комплексная амплитуда света на расстоянии z описывается преобразованием Френеля:

$$E_n(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z} \right) \exp \left[\frac{ik}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right] \times \tag{5}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) - \frac{ik}{z} (x\xi + y\eta) \right] dx dy.$$

Подставляя в (5) выражение (4), получим [23]:

$$E_n(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-iz_0}{z} \right) \left(\frac{-1}{2} \right)^n \left(\frac{1}{qq_0} \right) \left(\frac{w}{q} \right)^n \times \tag{6}$$

$$\times \exp \left[\frac{ik}{2z} (\xi^2 + \eta^2) - \left(\frac{z_0\xi}{zwq} \right)^2 - \left(\frac{z_0\eta}{zwq_0} \right)^2 \right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2} \right)^{n/2} H_n \left[\frac{\left(\frac{z_0}{wz} \right) \left(\frac{iq_0\xi}{q} - \frac{q\eta}{q_0} \right)}{\sqrt{q^2 - q_0^2}} \right].$$

В (6) использованы обозначения:

$$z_0 = \frac{kw^2}{2}, \quad q_0^2 = 1 - \frac{iz_0}{z}, \quad q^2 = 1 + \frac{iz_0}{z_1}, \quad z_1 = \frac{zf}{z-f}. \tag{7}$$

Чтобы найти нули многочлена Эрмита $H_n(F)$ в (6), выпишем его аргумент F более подробно:

$$F = e^{-i\pi/4+i\pi/2} \frac{\sqrt{z_0 f}}{wz} \left[\frac{\xi \left(1 - i \frac{z_0}{z} \right) + i\eta \left(1 + i \frac{z_0}{z_1} \right)}{\sqrt{\left(1 - i \frac{z_0}{z} \right) \left(1 + i \frac{z_0}{z_1} \right)}} \right]. \tag{8}$$

Аргумент многочлена Эрмита в (8) существенно упростится, если положить плоскость наблюдения на расстоянии $z = 2f$:

$$F = e^{-i\pi/4+i\pi/2} \frac{\sqrt{z_0 f}}{2wf} \left[\frac{\xi \left(1 - i \frac{z_0}{2f} \right) + i\eta \left(1 + i \frac{z_0}{2f} \right)}{\sqrt{1 + \frac{z_0^2}{4f^2}}} \right]. \tag{9}$$

Приравняем действительную часть выражения в аргументе многочлена Эрмита (9) значению корня γ_n (то есть $H_n(\gamma_n) = 0$), а мнимую часть – нулю. Получим, что корни многочлена Эрмита (9) лежат на биссектрисе второго и четвертого квадрантов ($\eta = -\xi$) и координаты этих корней равны:

$$\xi_n = -\eta_n = 2\gamma_n \sqrt{\frac{f}{k} \left(\frac{\sqrt{4f^2 + z_0^2}}{2f + z_0} \right)}. \tag{10}$$

Из (9) следует, что в дальней зоне ($z \gg z_0$) действительные нули в аргументе многочлена Эрмита по-прежнему лежат на прямой $\eta = -\xi$. То есть картина

нулей интенсивности не вращается при распространении в пространстве. При смещении с биссектрисы ($\eta = -\xi, z = 2f$) корни многочлена Эрмита становятся комплексными, то есть вместо нулей интенсивности поля (6) появляются минимумы интенсивности. Число локальных нулей интенсивности с координатами (10) точно равно топологическому заряду n оптического вихря (2). Вокруг каждого такого нуля (10) находится оптический вихрь с топологическим зарядом +1.

В этом параграфе показано, что цилиндрическая линза снимает вырождение оптического вихря, который имеет на оптической оси точку сингулярности или n -кратно вырожденный ноль интенсивности. При этом ОУМ оптического вихря (2) и поля (6) с n изолированными нулями одинаковые и равны топологическому заряду n . Ранее нами было показано, что цилиндрическая линза изменяет ОУМ несимметричного (например, эллиптического) светового пучка [22]. Так, для Гауссова пучка с радиусами перетяжки w_x и w_y нормированный ОУМ равен

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2), \tag{11}$$

где J_z – полный ОУМ пучка в поперечной плоскости, W – его энергия, α – угол поворота цилиндрической линзы и f – её фокусное расстояние.

В следующем параграфе мы покажем, как цилиндрическая линза изменяет ОУМ одномерного пучка Эрмита–Гаусса, который не обладает ОУМ.

2. Эллиптический пучок Эрмита–Гаусса (0, n) после цилиндрической линзы

Рассмотрим эллиптический пучок Эрмита–Гаусса с номером (0, n), в перетяжке которого расположена цилиндрическая линза [7], образующая которой повернута в плоскости перетяжки на угол α . Комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой имеет вид:

$$E_n(x, y) = H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} \right) \times \tag{12}$$

$$\times \exp \left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f} \right),$$

где w_x и w_y – радиусы перетяжки Гауссова пучка по декартовым осям, f – фокусное расстояние тонкой цилиндрической линзы, образующая которой имеет угол с вертикальной осью y , равный α (линза повернута против часовой стрелки), k – волновое число света. Частный случай такого пучка при $n=0$ был рассмотрен в [22]. Нормированный ОУМ в параксиальном случае вычисляется по формулам [7] (с точностью до постоянных):

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \tag{13}$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \tag{14}$$

где J_z – проекция на оптическую ось ОУМ, W – плотность энергии (мощности) света, Im – мнимая часть числа, \bar{E} – комплексно сопряжённая амплитуда к амплитуде (12). Подставляя (12) в (13) и (14), получим простое выражение для нормированного ОУМ светового поля (12):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2 (2n+1)). \quad (15)$$

Из (15) видно, что при $n=0$ ОУМ (15) совпадает с [7]. Но есть и отличия: если радиусы Гауссова пучка равны $w_x=w_y=w$, то ОУМ в [7] равен нулю, а ОУМ пучка (12) не равен нулю, а вместо (15) можно записать:

$$\frac{J_z}{W} = - \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{4f} \right) n. \quad (16)$$

Из (16) следует, что ОУМ поля (12) при $w_x=w_y=w$ примерно в $2n$ больше по модулю, чем у поля из [7, 24]. Из (16) также следует, что при равенстве выражения в скобках единице ОУМ равен по модулю целому числу: $J_z/W = -n$. В [8] было показано, что при определённых условиях пучок Эрмита–Гаусса, не обладающий ОУМ, можно с помощью цилиндрической линзы преобразовать в пучок Лагерра–Гаусса, имеющий ОУМ, равный $J_z/W = \pm n$. Ниже мы покажем (другим способом, чем в [8]), что пучок (12) Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$ при условии, что $w_x=w_y=w$, $\sin 2\alpha = 1$ и $kw^2/(4f) = z_0/(2f) = 1$, где z_0 – длина Рэлея, на расстоянии $z = 2f$ формирует пучок Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$. Действительно, преобразование Френеля для комплексной амплитуды пучка (12) при перечисленных выше условиях можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E_n(\xi, \eta, z = 2f) &= \\ &= \left(\frac{-ik}{4\pi f} \right) \exp \left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \times \\ &\times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{2f} (xy + x\xi + y\eta) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Заметим, что условие $z_0/(2f) = 1$ в (17) пока не использовалось, это будет сделано позже.

Интеграл по переменной x в выражении (17) можно вычислить с помощью справочного интеграла [25]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(cx) \exp \left(ibx - \frac{c^2 x^2}{2} \right) dx &= \\ &= \frac{i^n \sqrt{2\pi}}{c} \exp \left(-\frac{b^2}{2c^2} \right) H_n \left(\frac{b}{c} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

а интеграл по y , после вычисления интеграла по x , можно вычислить с помощью другого справочного интеграла [25, 26]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(cy) \exp \left(-p(y-t)^2 \right) dy &= \\ &= \frac{\sqrt{\pi} (p-c^2)^{n/2}}{p^{(n+1)/2}} H_n \left(ct \sqrt{\frac{p}{p-c^2}} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда на двойном фокусном расстоянии за цилиндрической линзой получим вместо (17) комплексную амплитуду вида:

$$\begin{aligned} E_n(\xi, \eta, z = 2f) &= (-i)^{n+1} \left(\frac{z_0}{2f} \right) \left(\frac{\bar{\gamma}^n}{\gamma^{(n+1)}} \right) \times \\ &\times \exp \left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\bar{w}^2} + \frac{ik\xi\eta}{2\bar{f}} \right) \times \\ &\times H_n \left[\frac{z_0(\gamma\bar{\gamma})^{-1}}{\sqrt{2}fw} \left(\xi - i\eta \frac{z_0}{2f} \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w \left(1 + \frac{4f^2}{z_0^2} \right)^{1/2}, \quad \bar{f} = f \left(1 + \frac{4f^2}{z_0^2} \right), \\ \gamma &= \left(1 + \frac{z_0^2}{4f^2} \right)^{1/2}, \quad \bar{\gamma} = \left(1 - \frac{z_0^2}{4f^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (20) видно, что поле (12) на расстоянии $z = 2f$ по-прежнему остаётся пучком Эрмита–Гаусса, но с комплексным аргументом у многочлена Эрмита. Заметим, что аргумент многочлена Эрмита в (20) становится действительным только на горизонтальной оси при $\eta = 0$. На этой оси у многочлена Эрмита есть n изолированных невырожденных нулей интенсивности. Причём, как следует из (16), ОУМ такого пучка с n изолированными нулями будет либо больше n , если $z_0/(2f) > 1$, либо меньше n , если $z_0/(2f) < 1$. При условии $z_0/(2f) = 1$, так как $x^{-n} H_n(ax) \rightarrow (2a)^n$ при $x \rightarrow \infty$, вместо многочлена Эрмита в (20) остаётся только одно слагаемое с максимальным показателем степени (один изолированный n -кратно вырожденный ноль интенсивности). Тогда вместо (20) получим:

$$\begin{aligned} E_n(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) &= (-i)^{n+1} 2^{-(n+1)} \times \\ &\times \exp \left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2w^2} + \frac{ik\xi\eta}{4f} \right) \left(\frac{\xi - i\eta}{w} \right)^n. \end{aligned} \quad (22)$$

Строгий вывод (22) из (17) при $z_0 = 2f$ приведён в [8]. Из (22) видно, что комплексная амплитуда поля пропорциональна сомножителю $(\xi - i\eta)^n = r^n \exp(-in\varphi)$, где (r, φ) – полярные координаты, характерные для оптических вихрей и пучков Лагерра–Гаусса с номерами $(0, n)$. Пучок (22) имеет ОУМ, равный $J_z/W = -n$.

Из (22) видно, что с помощью цилиндрической линзы можно пучок ЭГ преобразовать в эллиптический Гауссов оптический вихрь. Причём, если у исходного пучка (12) при условии $z_0/(2f) = 1$ и $\alpha = \pi/4$ ОУМ был равен $-n$ и носил (не вихревой) астигматический характер [27], то пучок (22) имеет такой же ОУМ, что и (12), но он уже носит вихревой (а не астигматический) характер. Заметим, что в общем случае изменение ОУМ может иметь не только вихревую или астигматическую природу, но также может быть вызвано смещением центра тяжести пучка [28]. Однако цилиндрическая линза не меняет положение центра тяжести – у обоих пучков (12) и (22) он находится в начале координат.

Таким образом, в этом параграфе мы показали, что цилиндрическая линза из n нулевых линий интенсивности пучка Эрмита–Гаусса порядка $(0, n)$ формирует n изолированных нулей интенсивности и оптический вихрь с дробным ОУМ и n точками сингулярности.

В следующем параграфе мы покажем, что имеется специальный тип астигматических эллиптических оптических вихрей, которые преобразуются цилиндрической линзой и приобретают дополнительный ОУМ, но осевой n -кратно вырожденный ноль интенсивности, в отличие от поля (3), не теряет своей вырожденности по мере распространения.

Оценим ОУМ (16) на один фотон для пучка (12) при следующих практически реализуемых параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, угол поворота цилиндрической линзы $\alpha = \pi/4$, радиус перетяжки Гауссова пучка $w = 2$ мм, фокусное расстояние $f = 10$ мм и порядок многочлена Эрмита $n = 100$. Нормированный ОУМ будет равен: 118 104 на фотон.

3. Астигматический эллиптический Гауссов пучок

Ниже получена формула, обратная к (22), которая описывает преобразование эллиптического Гауссова вихря в эллиптический пучок ЭГ. Это позволит получить выражение для комплексной амплитуды модового вихревого эллиптического светового поля, инвариантного к преобразованию цилиндрической линзой. Заметим, что в [8] нет таких формул, так как не рассматриваются эллиптические пучки. В [8] вместо (22) получено следующее интегральное преобразование:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(u) \times \exp\left(-\frac{u^2 + v^2 - 2iuv}{2} + 2ixu + 2iyv\right) du dv = \quad (23)$$

$$= i^n 2^n \sqrt{2\pi} (x + iy)^n \exp(-x^2 - y^2 - 2ixy).$$

В (23) введены безразмерные переменные (по сравнению с (22)): $z = z_0 = 2f$, $x/w = u$, $y/w = v$, $\xi/w = x$, $\eta/w = y$. Обратное преобразование Фурье к (23) даёт преобразование Гауссова оптического вихря цилиндрической линзой в виде [8]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \times \exp(-x^2 - y^2 - 2ixy - 2ixu - 2iyv) dx dy = \quad (24)$$

$$= (-i)^n \frac{\pi}{2^n \sqrt{2}} H_n(u) \exp\left(-\frac{u^2 + v^2 - 2iuv}{2}\right).$$

То есть Гауссов оптический вихрь с ОУМ n (вихревой ОУМ) цилиндрическая линза переводит в пучок ЭГ $(0, n)$ также с ОУМ n (астигматический ОУМ). Выражения (23) и (24) были получены в [8]. Ниже мы покажем, что аналогично преобразуется эллиптический Гауссов вихрь. Действительно, можно показать, что обратное преобразование к (22) в безразмерных переменных имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \times \exp\left[-\gamma^2 x^2 - \beta^2 y^2 - 2ixy - 2iux - 2ivy\right] dx dy = \quad (25)$$

$$= \left(\frac{-i}{2}\right)^n \frac{\pi}{\sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2}} \left(\frac{2 - \gamma^2 + \beta^2}{1 + \gamma^2 \beta^2}\right)^{n/2} \times$$

$$\times H_n \left[\frac{(1 + \beta^2)u + i(\gamma^2 - 1)v}{\sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2} \sqrt{2 - \gamma^2 + \beta^2}} \right] \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\beta^2 u^2 + \gamma^2 v^2 - 2iuv}{1 + \gamma^2 \beta^2}\right).$$

В (25) безразмерные постоянные β и γ задают масштаб эллиптичности Гауссова пучка по декартовым осям. Из (25) видно, что цилиндрическая линза под углом в 45° преобразует эллиптический Гауссов вихрь в эллиптический пучок ЭГ с комплексным аргументом. Из (25) можно сделать несколько интересных следствий. При $\gamma = 1$ аргумент многочлена Эрмита в (25) становится действительным, то есть изолированные n нулей многочлена Эрмита становятся нулевыми линиями, перпендикулярными оси u . При этом ОУМ пучка (25) становится безвихревым (астигматическим). Если $\beta = \gamma = 1$, то (25) совпадает с (24).

Из (25) можно найти специальный эллиптический Гауссов пучок, который инвариантен для цилиндрической линзы, то есть восстанавливается на расстоянии $z = 2f$. Заметим, что в (25) знаменатель аргумента многочлена Эрмита будет равен нулю при $\gamma^2 = 3$ и $\beta^2 = 1$. Тогда, пользуясь пределом $x^n H_n(\gamma/x) \rightarrow (2\gamma)^n$ при $x \rightarrow 0$, получим частный случай (25) в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \times \exp\left[-3x^2 - y^2 - 2ixy - 2iux - 2ivy\right] dx dy = \quad (26)$$

$$= \left(\frac{-i}{2}\right)^n \frac{\pi}{2} (u + iv)^n \exp\left(-\frac{u^2 + 3v^2 - 2iuv}{4}\right).$$

Из (26) видно, что оптический вихрь с круговой симметрией, внедрённый в эллиптический Гауссов пучок с эллиптичностью 3:1 и прошедший цилиндрическую линзу, повернутую под углом 45° в начальной плоскости, является Фурье-инвариантным с точностью до масштаба и поворота эллиптического Гауссова пучка на 90° (эллиптичность 1:3).

В параграфе 2 показано, что астигматический пучок Эрмита–Гаусса с номером $n = 100$ может иметь ОУМ больше 10^4 . Хотя на практике с помощью модулятора можно сформировать пучок ЭГ с номером $n = 100$, но зарегистрировать с нужным разрешением интерферограмму такого пучка или промодулированное излучение в фокусе цилиндрической линзы с помощью современных ПЗС-матриц нельзя, так как требуется разрешить около 100 000 интерференционных полос. Поэтому в следующем параграфе описан демонстративный эксперимент, подтверждающий наличие ОУМ у астигматического пучка ЭГ (12).

4. Эксперимент

В этом параграфе с помощью двух цилиндрических линз будет измерен ОУМ астигматического пучка ЭГ (12). Этот метод измерения подробно описан в [30] и основан на измерении ОУМ пучков с радиальной симметрией с помощью одной цилиндрической линзы [29]. Оптическая схема показана на рис. 1.

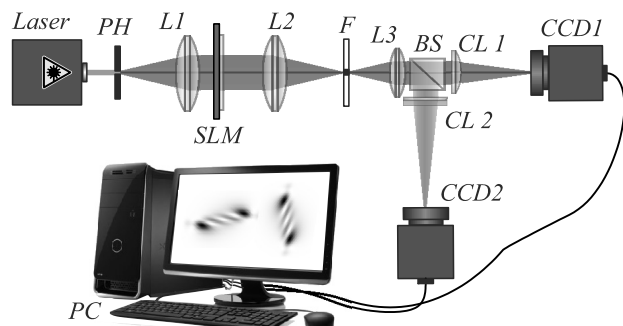


Рис. 1. Схема измерения ОУМ с помощью двух цилиндрических линз: Laser – лазер, PH – непрозрачный экран с круглым отверстием, L1, L2, L3 – сферические линзы, SLM – модулятор, формирующий пучок, F – пространственный фильтр, блокирующий нулевой дифракционный порядок, содержащий излучение, немодулированное модулятором света, BS – кубик, разделяющий пучок на два одинаковых пучка, CL1, CL2 – цилиндрические линзы, повернутые по отношению друг к другу на 90 градусов, CCD1, CCD2 – ПЗС-камеры, PC – компьютер

Длина волны излучения лазера была равна 532 нм. Круглое отверстие PH диаметром 40 мкм в непрозрачном экране и линза L1 были использованы для расширения и коллимации исходного Гауссова пучка. Коллимированный пучок света нормально падал на пропускающий модулятор света SLM (HOLOEYE LC 2012, число пикселей 1024×768, размер одного пикселя 36 мкм, размер активной рабочей области: 36,9×27,6 мм). В качестве линз L1, L2 и L3 были использованы сферические линзы с фокусными расстояниями 350, 250 и 150 мм. Система, образованная линзами L2, L3 и пространственным фильтром F, позволяла выполнить пространственную фильтрацию сформированного модулятором светового поля и заблокировать нулевой дифракционный порядок, содержащий нерабочее излучение. Цилиндрические линзы CL1 и CL2, повернутые по отношению друг к другу на 90°, имели фокусное расстояние 100 мм. Заметим, что выбор длиннофокусных цилиндрических линз при моделировании и в эксперименте обусловлен требованием параксиальной фокусировки рассматриваемых световых полей. Плоскости данных линз совпадали с плоскостями, сопряжёнными с дисплеем модулятора света. Размер перетяжки Гауссова пучка в этих плоскостях был равен примерно 6,5 мм. Распределение интенсивности в фокусе цилиндрических линз CL1 и CL2 регистрировалось ПЗС-камерами CCD1 и CCD2 (число пикселей 3264×2448, размер одного пикселя 1,67×1,67 мкм).

На рис. 2 показана рассчитанная методом суперпиксельного кодирования [31] фазовая маска диаметром 5,4 мм для формирования исходного (астигматического) пучка Эрмита–Гаусса HG_{10,0}, которая освещалась Гауссовым пучком с радиусом перетяжки 2,7 мм (маска рассчитана так, что в (12) $w_x = w_y = 500$ мкм). Длина волны лазерного излучения была равна 532 нм. Сформированный пучок фокусировался с помощью цилиндрической линзы с фокусным расстоянием 500 мм (закодированной вместе с пучком Эрмита–Гаусса на рис. 2), после чего с помощью светоделительного кубика разделялся на два независимых пучка, каждый из которых фокусировался с помощью цилиндрических линз с фокусными расстояниями 100 мм (ось одной из линз была повернута на 90° относительно другой). На рис. 3 показаны распределения интенсивности сформированного модулятором с фазовой функцией на рис. 2 астигматического пучка Эрмита–Гаусса на разных расстояниях. Видно, что пучок трансформируется по мере распространения из пучка Эрмита–Гаусса в эллиптический пучок Лагерра–Гаусса, а также вращается как единое целое. Для сравнения, на рис. 4 показаны эти же распределения, но полученные численно с помощью преобразования Френеля. Из рис. 4 видно, что численные и экспериментальные распределения качественно согласуются. На рис. 3*г-е* и 4*г-е* со световым эллипсом нули интенсивности уже не видны, но на соответствующих распределениях фазы (рис. 4*ж-и*) видно, что в центре вместо одной фазовой сингулярности имеется десять изолированных нулей, расположенных на одной прямой.

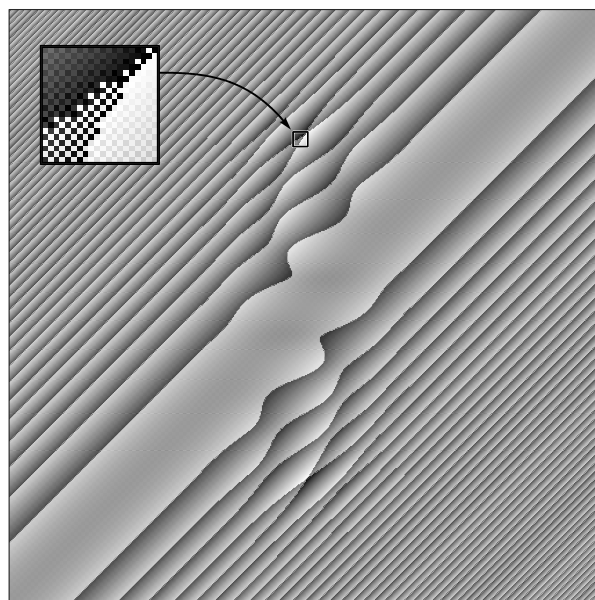


Рис. 2. Фазовая маска для формирования астигматического пучка Эрмита–Гаусса. Вставка показывает, что фаза закодирована суперпиксельным методом

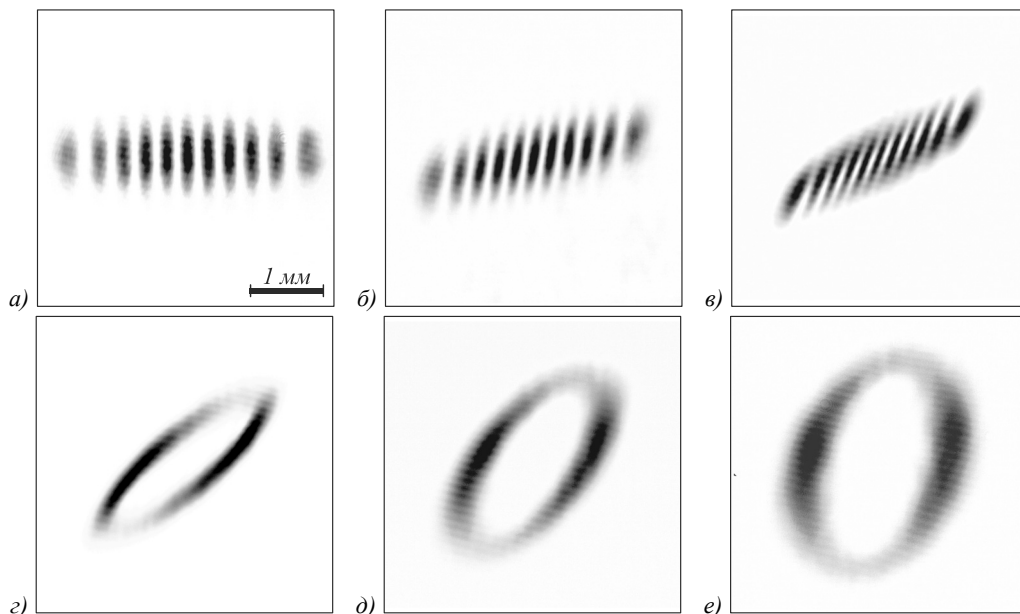


Рис. 3. Распределения интенсивности астигматического пучка Эрмита–Гаусса, сформированного модулятором света с фазой, показанной на рис. 2, зарегистрированные на расстояниях z : 0 мм (а), 200 мм (б), 400 мм (в), 600 мм (г), 800 мм (д), 1000 мм (е). Размер кадров – 4000×4000 мкм

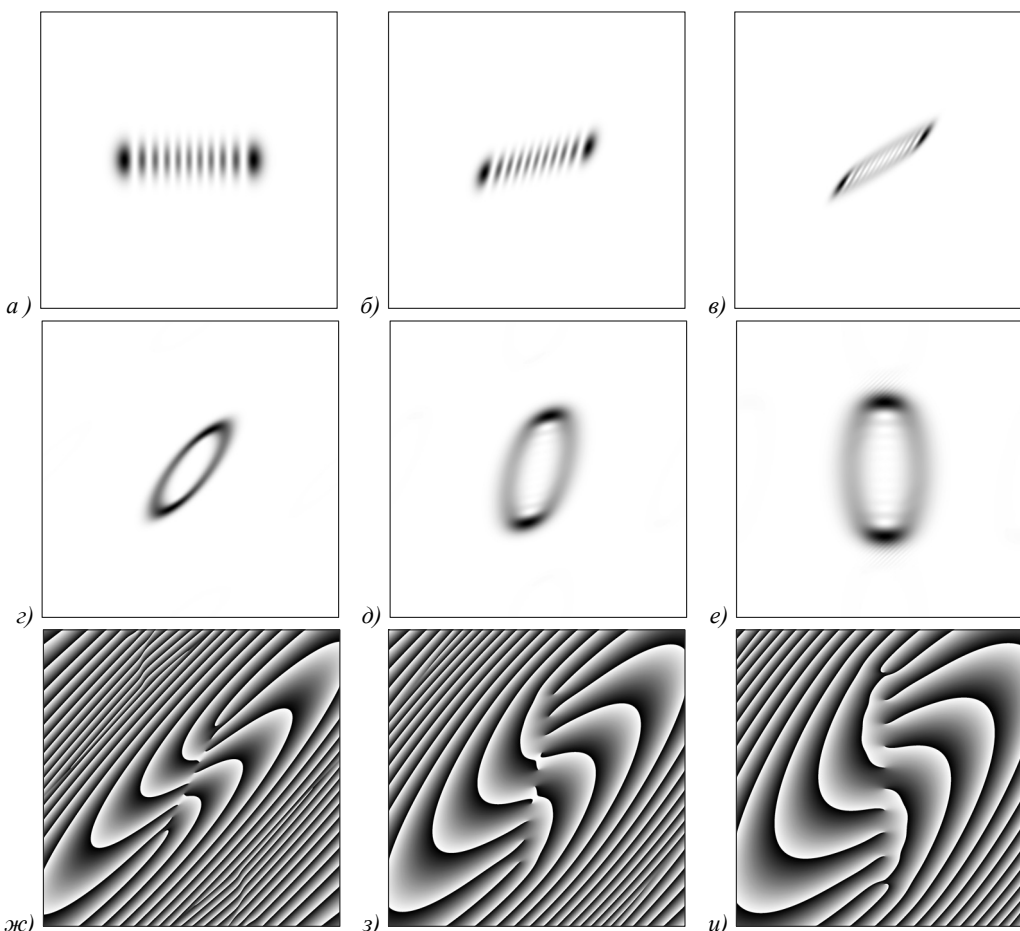


Рис. 4. Распределения интенсивности (а-е) и фазы (ж-и) астигматического пучка Эрмита–Гаусса с рис. 3 для расстояний $z=0$ (а), 200 мм (б), 400 мм (в), 600 мм (г, ж), 800 мм (д, з), 1000 мм (е, и), рассчитанные с помощью преобразования Френеля. Размер кадров – 8000×8000 мкм (для распределений интенсивности) и 4000×4000 мкм (для распределений фазы)

На рис. 5 показаны распределения интенсивности сформированного астигматического пучка Эрмита–Гаусса, полученные в фокальных плоскостях двух цилиндрических линз CL1, CL2 (рис. 1), повернутых

относительно друг друга на 90° . На рис. 5 видны те же 10 локальных минимумов интенсивности, что и на рис. 3, но это не значит, что ОУМ такого пучка равен 10. Так как для пучка на рис. 3 $z_0/(2f) = 1,476 > 1$, то ОУМ такого пучка будет больше $n=10$. Наличие астигматизма и эллиптичности добавляют некоторое значение к ОУМ, делая его дробным.

На рис. 6 показаны интенсивности в фокусах двух цилиндрических линз CL1, CL2 (рис. 1), рассчитанные с помощью преобразования Френеля. Из сравнения рис. 5 и 6 видно, что экспериментальные и расчётные распределения интенсивности согласуются, на обоих распределениях одинаковое число минимумов и максимумов интенсивности.

Методом, описанным в [29], с помощью этих распределений (рис. 5) были рассчитаны первые моменты интенсивности и был рассчитан ОУМ сформированного астигматического пучка Эрмита–Гаусса. Полученное значение равно $-13,62$. Для сравнения, теоретическое значение ОУМ равно $-14,7631$. СКО составляет 7%. Здесь ошибка есть не только в измеренном значении ОУМ, но и в теоретическом, так как параметры f , w , α , входящие в формулу (16), измеряются с определённой ошибкой.

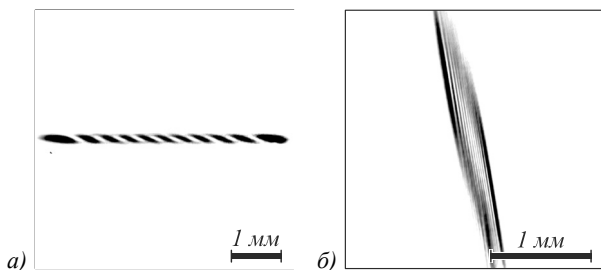


Рис. 5. Распределения интенсивности астигматического пучка Эрмита–Гаусса, зарегистрированные в фокусах двух цилиндрических линз, одна из которых (а) повернута на 90° относительно другой (б). Размер кадра – 5100×5100 мкм (а) и 2550×2550 мкм (б)

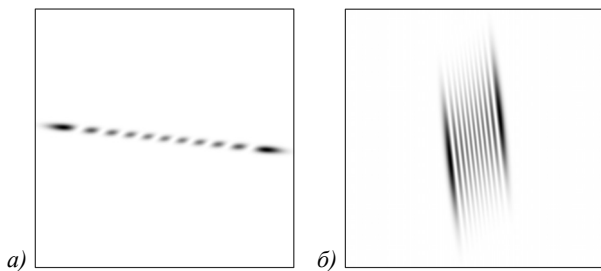


Рис. 6. Распределения интенсивности в фокусах двух цилиндрических линз CL1, CL2 (рис. 1), рассчитанные с помощью преобразования Френеля. Размер расчётной области – 4×4 мм (а) и 2×2 мм (б)

Для сравнения на рис. 7 показана схема эксперимента, в которой используется цилиндрическая линза L4 с фокусным расстоянием $f=100$ мм.

На рис. 8 показаны распределения интенсивности на двойном фокусном расстоянии $z=2f=200$ мм от цилиндрической линзы. В соответствии с (9) и (10) $n=10$ нулей интенсивности лежат на прямой, под углом -45° к горизонтальной оси.

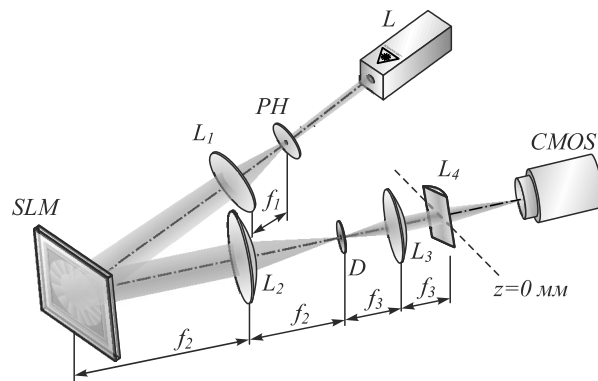


Рис. 7. Экспериментальная схема: L – твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH – пинхолл (40 мкм), L1, L2 и L3 – сферические линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм), L4 – цилиндрическая линза с фокусными расстоянием $f_4 = 100$ мм, SLM – пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм), D – диафрагма, выполняющая роль пространственного фильтра, CMOS – видеокамера GoipTek U3CMOS08500KPA (размер пикселя – 1,67 мкм)

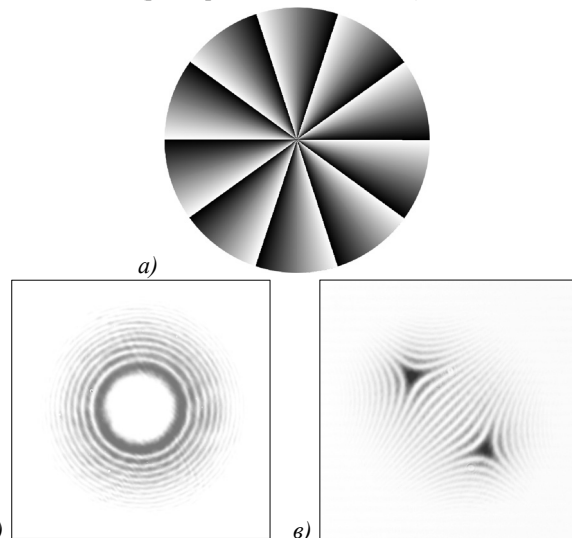


Рис. 8. Фаза спиральной фазовой пластинки порядка $n = 10$ (чёрный цвет – фаза 0, белый цвет – фаза 2π) для формирования оптического вихря (а), распределение интенсивности перед цилиндрической линзой L4 (рис. 7) (б) и распределение интенсивности, зарегистрированное на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы L4 ($z = 200$ мм). Размеры кадра – 4200×4200 мкм

Из сравнения распределений интенсивности на рис. 5а и на рис. 8в видно, что число локальных минимумов интенсивности в обеих картинах одинаковое и равно 10. Но линии нулей на рис. 8в перпендикулярны к оси цилиндрической линзы, которая повернута на -45° к горизонтальной оси, а на рис. 5а линии локальных минимумов интенсивности направлены под углом 45° к оси цилиндрической линзы, которая совпадает с осью x . ОУМ пучка (4) здесь определяется просто по числу минимумов интенсивности, лежащих на линии – 45° между двумя максимальными значениями интенсивности (ОУМ = $n = 10$).

Заключение

В работе мы получили следующие результаты. Рассмотрены три разных типа астигматических Гауссовых пучков, комплексные амплитуды которых в зоне дифракции Френеля описываются многочленами Эрмита с комплексным аргументом. Более детально исследованы астигматические пучки Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$, сфокусированные цилиндрической линзой (12). Для них получена явная формула для нормированного ОУМ. Теоретическая оценка показывает, что при практически реализуемых параметрах задачи ОУМ такого пучка может достигать значения больше 100000 на фотон. Максимально достигнутое значение ОУМ равно 10010 [20]. Однако измерить такой большой ОУМ нельзя из-за ограниченного числа элементов разрешения современных CCD-камер (камера с максимальным разрешением имеет 10000×7096 пикселей [32]). Получено выражение для комплексной амплитуды пучка Эрмита–Гаусса, сфокусированного цилиндрической линзой. Эта амплитуда выражается через многочлен Эрмита с комплексным аргументом (20). Причем действительным аргумент становится только на горизонтальной декартовой оси, на которой у него расположены n невырожденных изолированных нулей интенсивности, в окрестности которых имеют место оптические вихри с топологическим зарядом 1. ОУМ такого пучка может быть больше n , если длина Рэлея больше двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы, или меньше n , если длина Рэлея меньше двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы. Показано, что на двойном фокусном расстоянии и при условии, что длина Рэлея равна двойному фокусному расстоянию, многочлен Эрмита преобразуется в одночлен с максимальным показателем степени n , и n нулей соединяются в один n -кратно вырожденный изолированный ноль. А весь пучок Эрмита–Гаусса преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$, нормированный ОУМ которого равен n . Используя распределения интенсивности в фокусах двух цилиндрических линз, был измерен ОУМ астигматического пучка Эрмита–Гаусса. Этот ОУМ отличался от своего теоретического значения на 7% (теоретическое значение составляет $-14,76$, экспериментальное значение $-13,62$).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 17-19-01186) в частях «Эллиптический пучок Эрмита–Гаусса $(0, n)$ после цилиндрической линзы» и «Эксперимент», Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003) в части «Астигматический эллиптический Гауссов пучок», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части «Оптический вихрь после цилиндрической линзы».

Литература

1. **Grier, D.** A revolution in optical manipulation / D. Grier // *Nature*. – 2003. – Vol. 424. – P. 810-816.
2. **Kuga, T.** Novel optical trap of atoms with a doughnut beam / T. Kuga, Y. Torii, N. Shiokawa, T. Hirano // *Physical Review Letters*. – 1997. – Vol. 78. – P. 4713-4716.
3. **Bernet, S.** Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy / S. Bernet, A. Jesacher, S. Furhapter, C. Maurer, M. Ritsch-Marte // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14. – P. 3792-3805.
4. **Willig, K.I.** STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis / K.I. Willig, S.O. Rizzoli, V. Westphal, R. Jahn, S.W. Hell // *Nature*. – 2006. – Vol. 440. – P. 935-939.
5. **Wang, J.** Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 6. – P. 488-496.
6. **Mair, A.** Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // *Nature*. – 2001. – Vol. 412. – P. 313-316.
7. **Courtial, J.** Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // *Optics Communications*. – 1997. – Vol. 144. – P. 210-213.
8. **Abramochkin, E.G.** Beam transformations and nontransformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1991. – Vol. 83, Issues 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
9. **Izdebskaya, Y.** Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum / Y. Izdebskaya, T. Fadeyeva, V. Shvedov, A. Volyar // *Optics Letters*. – 2006. – Vol. 31, Issue 17. – P. 2523-2525.
10. **Li, A.** Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination / A. Li, M. Zhang, G. Liang, X. Li, X. Chen, C. Cheng // *Optics Express*. – 2013. – Vol. 21, Issue 13. – P. 15755-15764.
11. **Krenn, M.** On small beams with large topological charge / M. Krenn, N. Tischler, A. Zeilinger // *New Journal of Physics*. – 2016. – Vol. 18. – P. 033012.
12. **Zheng, S.** Measuring orbital angular momentum (OAM) states of vortex beams with annular gratings / S. Zheng, J. Wang // *Scientific Reports*. – 2017. – Vol. 7. – P. 40781.
13. **Vieira, J.** High orbital angular momentum harmonic generation / J. Vieira, R.M.G.M. Trines, E.P. Alves, R.A. Fonseca, J.T. Mendonca, R. Bingham, P. Norreys, L.O. Silva // *Physical Review Letters*. – 2016. – Vol. 117. – P. 265001.
14. **Chen, Y.** Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micro-mirror device / Y. Chen, Z. Fang, Y. Ren, L. Gong, R. Lu // *Applied Optics*. – 2015. – Vol. 54, Issue 27. – P. 8030-8035.
15. **Jesacher, A.** Holographic optical tweezers for object manipulations at an air-liquid surface / A. Jesacher, S. Furhapter, C. Maurer, S. Bernet, M. Ritsch-Marte // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14, Issue 13. – P. 6342-6352.
16. **Fickler, R.** Quantum entanglement of high angular momenta / R. Fickler, R. Lapkiewicz, W.N. Plick, M. Krenn, C. Schaeff, S. Ramelow, A. Zeilinger // *Science*. – 2012. – Vol. 338. – P. 640-643.
17. **Campbell, G.** Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors / G. Campbell, B. Hage, B. Buchler, P.K. Lam // *Applied Optics*. – 2012. – Vol. 51, Issue 7. – P. 873-876.

18. **Shen, Y.** Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices / Y. Shen, G.T. Campbell, B. Hage, H. Zou, B.C. Buchler, P.K. Lam // *Journal of Optics*. – 2013. – Vol. 15, Issue 4. – 044005.
19. **Mafakheri, E.** Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography / E. Mafakheri, A.H. Tavabi, P. Lu, R. Balboni, F. Venturi, C. Menozzi, G.C. Gazzadi, S. Frabboni, A. Sit, R.E. Dunin-Borkowski, R. Karimi // *Applied Physics Letters*. – 2017. – Vol. 110. – 093113.
20. **Fickler, R.** Quantum entanglement of angular momentum states with quantum number up to 10010 / R. Fickler, G. Campbell, B. Buchler, P.K. Lam, A. Zeilinger // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2016. – Vol. 113, Issue 48. – P. 13642-13647.
21. **Kotlyar, V.V.** Vortex-free laser beam with an orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Computer Optics*. – 2017. – Vol. 41(4). – P. 573-576. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-4-573-576.
22. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26(1). – P. 141-156.
23. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
24. **Molina-Terriza, G.** Observation of the dynamical inversion of the topological charge of an optical vortex / G. Molina-Terriza, J. Recolons, J.P. Torres, L. Torner, E.M. Wright // *Physical Review Letters*. – 2001. – Vol. 87, Issue 2. – 023902.
25. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марищев. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
26. **Abramovitz, M.** Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables / ed. by M. Abramovitz, I.A. Stegun. – New York: Dover Publications, Inc., 1965. – 1046 p.
27. **Bekshaev, A.** Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams / A. Bekshaev, M. Soskin, M. Vasnetsov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2003. – Vol. 20, Issue 8. – P. 1635-1643.
28. **Fadeyeva, T.A.** Does the optical angular momentum change smoothly in fractional-charged vortex beams? / T.A. Fadeyeva, A.F. Rubass, R.V. Aleksandrov, A.V. Volyar // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2014. – Vol. 31, Issue 4. – P. 798-805.
29. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederriter, J.T. Gopinath, M.E. Siemens // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 21. – P. 5019-5022.
30. **Котляр, В.В.** Методы определения орбитального углового момента лазерного пучка / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 42-53. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.
31. **Goorden, S.A.** Superpixel-based spatial amplitude and phase modulation using a digital micromirror device / S.A. Goorden, J. Bertolotti, A.P. Mosk // *Optics Express*. – 2014. – Vol. 22. – P. 17999-18009.
32. CHR71000. Ultra high resolution 71 megapixels CMOS image sensor [Electronical Resource]. – URL: <https://ams.com/chr71000> (request date 28.03.2019).

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 344-345 этого номера.

Порфирьев Алексей Петрович, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование, структурированные лазерные пучки. E-mail: porfirev.alexey@smr.ru.

ГРПТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 15 февраля 2019 г. Окончательный вариант – 2 апреля 2019 г.

Measurement of the orbital angular momentum of an astigmatic Hermite–Gaussian beam

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.P. Porfirev^{1,2}

¹ IPIS RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia;

² Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

Here we study three different types of astigmatic Gaussian beams, whose complex amplitude in the Fresnel diffraction zone is described by the complex argument Hermite polynomial of the order $(n, 0)$. The first type is a circularly symmetric Gaussian optical vortex with and a topological charge n after passing through a cylindrical lens. On propagation, the optical vortex "splits" into n

first-order optical vortices. Its orbital angular momentum per photon is equal to n . The second type is an elliptical Gaussian optical vortex with a topological charge n after passing through a cylindrical lens. With a special choice of the ellipticity degree (1:3), such a beam retains its structure upon propagation and the degenerate intensity null on the optical axis does not “split” into n optical vortices. Such a beam has fractional orbital angular momentum not equal to n . The third type is the astigmatic Hermite-Gaussian beam (HG) of order $(n, 0)$, which is generated when a HG beam passes through a cylindrical lens. The cylindrical lens brings the orbital angular momentum into the original HG beam. The orbital angular momentum of such a beam is the sum of the vortex and astigmatic components, and can reach large values (tens and hundreds of thousands per photon). Under certain conditions, the zero intensity lines of the HG beam “merge” into an n -fold degenerate intensity null on the optical axis, and the orbital angular momentum of such a beam is equal to n . Using intensity distributions of the astigmatic HG beam in foci of two cylindrical lenses, we calculate the normalized orbital angular momentum which differs only by 7% from its theoretical orbital angular momentum value (experimental orbital angular momentum is $-13,62$, theoretical OAM is $-14,76$).

Keywords: orbital angular momentum, Hermite-Gaussian beam, astigmatism, cylindrical lens, Hermite polynomial.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Measurement of the orbital angular momentum of an astigmatic Hermite–Gaussian beam. *Computer Optics* 2019; 43(3): 356-367. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-356-367.

Acknowledgements: The work was partly funded the Russian Science Foundation under grant # 17-19-01186 (in parts “Elliptical Hermite-Gaussian beam of order $(0, n)$ after passing through a cylindrical lens” and “Experiment”), by the Russian Foundation for Basic Research under grant # 18-29-20003 (“Astigmatic elliptical Gaussian beam”), and by the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the “Crystallography and Photonics” Research Center of the RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 (“Optical vortex after passing through a cylindrical lens”).

References

- [1] Grier D. A revolution in optical manipulation. *Nature* 2003; 424: 810-816.
- [2] Kuga T, Torii Y, Shiokawa N, Hirano T. Novel optical trap of atoms with a doughnut beam. *Phys Rev Lett* 1997; 78: 4713-4716.
- [3] Bernet S, Jesacher A, Furhapter S, Maurer C, Ritsch-Marte M. Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy. *Opt Express* 2006; 14: 3792-3805.
- [4] Willig KI, Rizzoli SO, Westphal V, Jahn R, Hell SW. STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis. *Nature* 2006; 440: 935-939.
- [5] Wang J, Yang J, Fazal IM, Ahmed N, Yan Y, Huang H, Ren Y, Yue Y, Dolinar S, Tur M, Willner AE. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nat Photon* 2012; 6: 488-496.
- [6] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412: 313-316.
- [7] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144: 210-213.
- [8] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [9] Izdebskaya Y, Fadeyeva T, Shvedov V, Volyar A. Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum. *Opt Lett* 2006; 31(17): 2523-2525.
- [10] Li A, Zhang M, Liang G, Li X, Chen X, Cheng C. Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination. *Opt Express* 2013; 21(13): 15755-15764.
- [11] Krenn M, Tischler N, Zeilinger A. On small beams with large topological charge. *New J Phys* 2016; 18: 033012.
- [12] Zheng S, Wang J. Measuring orbital angular momentum (OAM) states of vortex beams with annular gratings. *Sci Rep* 2017; 7: 40781.
- [13] Vieira J, Trines RMGM, Alves EP, Fonseca RA, Mendonca JT, Bingham R, Norreys P, Silva LO. High orbital angular momentum harmonic generation. *Phys Rev Lett* 2016; 117: 265001.
- [14] Chen Y, Fang Z, Ren Y, Gong L, Lu R. Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micro-mirror device. *Appl Opt* 2015; 54(27): 8030-8035.
- [15] Jesacher A, Furhapter S., Maurer C, Bernet S, Ritsch-Marte M. Holographic optical tweezers for object manipulations at an air-liquid surface. *Opt Express* 2006; 14(13): 6342-6352.
- [16] Fickler R, Lapkiewicz R, Plick WN, Krenn M, Schaeff C, Ramelow S, Zeilinger A. Quantum entanglement of high angular momenta. *Science* 2012; 338: 640-643.
- [17] Campbell G, Hage B, Buchler B, Lam PK. Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors. *Appl Opt* 2012; 51(7): 873-876.
- [18] Shen Y, Campbell GT, Hage B, Zou H, Buchler BC, Lam PK. Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices. *J Opt* 2013; 15(4): 044005.
- [19] Mafakheri E, Tavabi AH, Lu P, Balboni R, Venturi F, Menozzi C, Gazzadi GC, Frabboni S, Sit A, Dunin-Borkowski RE, Karimi E. Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography. *Appl Phys Lett* 2017; 110: 093113.
- [20] Fickler R, Campbell G, Buchler B, Lam PK, Zeilinger A. Quantum entanglement of angular momentum states with

- quantum number up to 10010. Proc Natl Acad Sci 2016; 113(48): 13642-13647.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA. Vortex-free laser beam with an orbital angular momentum. Computer Optics 2017; 41(4): 573-576. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-4-573-576.
- [22] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. Opt. Express 2018; 26(1): 141-156.
- [23] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. Appl Opt 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [24] Molina-Terriza G, Rekolons J, Torres JP, Torner L, Wright EM. Observation of the dynamical inversion of the topological charge of an optical vortex. Phys Rev Lett 2001; 87(2): 023902.
- [25] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. Integrals and Series, Special Functions. New York: Gordon and Breach; 1981.
- [26] Abramowitz M, Stegun IA. Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications Inc; 1979.
- [27] Bekshaev A, Soskin M, Vasnetsov M. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. J Opt Soc Am A 2003; 20(8): 1635-1643.
- [28] Fadeyeva TA, Rubass AF, Aleksandrov RV, Volyar AV. Does the optical angular momentum change smoothly in fractional-charged vortex beams? J Opt Soc Am B 2014; 31(4): 798-805.
- [29] Alperin SN, Niederriter RD, Gopinath JT, Siemens ME. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. Opt Lett 2016; 41(21): 5019-5022.
- [30] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Methods for determining the orbital angular momentum of a laser beam. Computer Optics 2019; 43(1): 42-53. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.
- [31] Goorden SA, Bertolotti J, Mosk AP. Superpixel-based spatial amplitude and phase modulation using a digital micromirror device. Opt Express 2014; 22: 17999-18009.
- [32] CHR71000. Ultra high resolution 71 megapixels CMOS image sensor. Source: <<https://ams.com/chr71000>>.

Authors' information

The information about authors **Victor Victorovich Kotlyar** and **Alexey Andreevich Kovalev** you can find on page 346 of this issue.

Alexey Petrovich Porfirev (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include diffractive optics, optical manipulation and structured laser beams.

Received February 15, 2019. The final version – April 2, 2019.