

Метод генерации случайного оптического поля с помощью разложения Карунена–Лоэва для имитации турбулентности атмосферы

С.Н. Хонина^{1,2}, С.Г. Волотовский¹, М.С. Кириленко²

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

При численном моделировании распространения излучения сквозь случайную среду для описания имитаторов турбулентности предложено использовать метод генерации случайного поля на основе разложения Карунена–Лоэва с различными типами корреляционных операторов. Свойства рассчитанных имитаторов случайной среды с Гауссовой корреляционной функцией были исследованы при моделировании распространения вихревых пучков Лагерра–Гаусса. Результаты моделирования показали, что увеличение порядка оптического вихря приводит, как и в эксперименте, к меньшей стабильности фазовой сингулярности пучков к случайным оптическим флуктуациям. Близость результатов моделирования и оптического эксперимента свидетельствует о перспективности предлагаемого подхода к синтезу имитаторов случайной среды.

Ключевые слова: корреляционный оператор, собственные функции, разложение Карунена–Лоэва, имитатор случайной оптической среды.

Цитирование: Хонина, С.Н. Метод генерации случайного оптического поля с помощью разложения Карунена–Лоэва для имитации турбулентности атмосферы / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, М.С. Кириленко // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 1. – С. 53–59. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-680.

Citation: Khonina SN, Volotovskiy SG, Kirilenko MS. A method of generating a random optical field using the Karhunen-Loeve expansion to simulate atmospheric turbulence. Computer Optics 2020; 44(1): 53-59. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-680.

Введение

Атмосферная оптическая связь даёт возможность передавать данные различного рода между объектами непосредственно в атмосфере без использования какого-либо оптического волокна, не занимая частоты в радиоэфире [1–4]. Такая беспроводная технология широко используется для создания каналов связи между многоэтажными домами и бизнес-центрами на так называемых участках последней мили, для соединения узлов связи от оператора до базовых станций сетей сотовой связи при больших объёмах передаваемого цифрового трафика, а также для связи объектов, когда прокладка кабеля невозможна или её стоимость велика [5, 6]. Современные атмосферные оптические линии связи могут обеспечить передачу данных на расстояния до 4 км и скорость передачи до 10 Гбит/с.

Хорошо известно, что с ухудшением погоды и повышением турбулентности в существующих системах оптической связи экспоненциально уменьшаются скорость передачи и предельное расстояние [7–9]. Поэтому множество усилий направлено на поиск возможности преодоления негативного влияния турбулентности среды. На сегодняшний день предлагается несколько способов решения этой проблемы: применение лазерных пучков со специальной про-

странственной структурой [10–13], а также одновременно массивов пучков [14, 15], векторных пучков с неоднородной поляризацией [16–19] и частично когерентных пучков [20, 21].

Для анализа способности тех или иных пучков сохранять информационную стабильность при воздействии случайных флуктуаций оптической среды используется численное моделирование с имитаторами турбулентности, такими как диффузоры, рассеивающие экраны и ячейки турбулентности [22, 23].

При анализе и компенсации атмосферных искажений частот используется разложение Карунена–Лоэва (КЛ) [24, 25], обеспечивающее некоррелированность коэффициентов разложения [26, 27]. При этом оптимальные свойства функций КЛ очень близки к свойствам вытянутых сфероидальных волновых функций [28, 29]. Оба типа функций в общем случае не являются аналитическими, поэтому требуют решения задачи на собственные значения [30]. Однако для некоторых типов корреляционного оператора собственные функции имеют аналитический вид, в частности, для Гауссова распределения [31] и экспоненциально-косинусного распределения [32].

В данной работе рассмотрен метод генерации случайного оптического поля (имитатора турбулентности) с помощью разложения КЛ для различных типов корреляционных операторов. Через сформированный

имитатор случайной среды с Гауссовой корреляционной функцией были распространены однокольцевые пучки Лагерра–Гаусса с целью исследования способности оптических вихрей сохранять свою структуру.

1. Модель оптической среды со случайными искажениями

Для описания распространения лазерного пучка в среде со случайными искажениями используется расширенный принцип Гюйгенса–Френеля [33, 34]:

$$E(u, v, z, t) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x-u)^2 + (y-v)^2]\right\} + \Psi(x, y, u, v, z) - i\omega t \} dx dy, \quad (1)$$

где $E_0(x, y)$ – поле во входной плоскости (при $z=0$); $E(u, v, z, t)$ – поле на расстоянии z от входной плоскости; $\Psi(x, y, u, v, z)$ – случайная комплексная фаза, связанная с турбулентностью атмосферы.

Выражение (1) соответствует методу Рытова [9], а функция описывает случайные отклонения фазовой функции сферической волны, распространяющейся от исходной плоскости к выходной.

В связи с тем, что теоретические и экспериментальные параметры турбулентных сред рассматриваются в статистическом аспекте, расширенный принцип Гюйгенса–Френеля используется только для анализа усреднённых характеристик световых пучков, таких как средняя интенсивность [7, 9–11, 35].

Среднее распределение интенсивности пучка в выходной плоскости вычисляется через усреднение по ансамблю случайных реализаций неоднородности среды:

$$I(u, v, z) = \langle E(u, v, z, t) E^*(u, v, z, t) \rangle, \quad (2)$$

где знак «*» соответствует комплексному сопряжению.

Подставляя выражение (1) в (2), получим:

$$I(u, v, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x_1, y_1) E_0^*(x_2, y_2) \times \langle \exp[\Psi(x_1, y_1, u, v, z) + \Psi^*(x_2, y_2, u, v, z)] \rangle \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x_1-u)^2 + (y_1-v)^2 - (x_2-u)^2 + (y_2-v)^2]\right\} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \quad (3)$$

В интеграле (3) усреднение по случайным реализациям неоднородности турбулентной среды может описываться следующим образом [36]:

$$\langle \exp[\Psi(x_1, y_1, u, v, z) + \Psi^*(x_2, y_2, u, v, z)] \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{2} D_{\Psi}\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}, z\right)\right\}, \quad (4)$$

где $D_{\Psi}(\cdot)$ – фазовая структурная функция, которая согласно теории турбулентности, развитой А.Н. Колмогоровым и А.М. Обуховым, зависит лишь от расстояния между двумя точками [37].

Используя метод плавных возмущений С.М. Рытова [38] для амплитудно-фазовых флуктуаций с учётом дифракционных эффектов [39], выражение (4) при квадратичной аппроксимации можно представить в виде [34]:

$$\langle \exp[\Psi(x_1, y_1, u, v, z) + \Psi^*(x_2, y_2, u, v, z)] \rangle \approx \exp\left\{-\frac{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}{\sigma_0^2(z)}\right\}, \quad (5)$$

где $\sigma_0(z) = (0,545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}$ – радиус корреляции (когерентности) волны, проходящей через турбулентную атмосферу на расстояние z , C_n^2 – структурная постоянная среды.

Значения C_n^2 могут меняться в зависимости от метеоусловий в пределах трёх и более порядков даже вблизи земной поверхности (высота около 2,5 м): от $10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$ для сильной турбулентности и до $10^{-17} \text{ м}^{-2/3}$ для слабой. С увеличением высоты над землёй происходит уменьшение C_n^2 по степенному закону [40]: при неустойчивом термическом состоянии атмосферы как $C_n^2 \sim h^{-4/3}$, а при устойчивом более медленно $C_n^2 \sim h^{-2/3}$. Для коротких трасс визирования, когда можно пренебрегать зависимостью величины C_n^2 от высоты h и не учитывать эффекты многократного молекулярно-аэрозольного рассеяния. Типичным средним значением считается $C_n^2 = 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$.

Как следует из приведенных выше рассуждений, для исследования влияния случайных флуктуаций оптической среды на некоторое поле $E_0(x, y)$ можно воспользоваться выражением (1) при условии генерации отдельных реализаций случайной функции $\Psi(x, y, u, v, z)$.

Для генерации реализаций случайного поля с заданными статистическими характеристиками (математическое ожидание и корреляционная функция) можно воспользоваться разложением КЛ [24].

2. Базис Карунена–Лоэва

Известно, что функции КЛ являются собственными для корреляционного оператора [24, 41–43]:

$$b_n \varphi_n(x_2, y_2) = \iint_{\Omega} \varphi_n(x_1, y_1) K(x_1, y_1, x_2, y_2) dx_1 dy_1, \quad (6)$$

где $\varphi_n(x_1, y_1)$ – собственные функции, b_n – собственные числа, $K(x_1, y_1, x_2, y_2)$ – ядро корреляционного оператора.

В нашей задаче ядро соответствует корреляционной функции (4) при фиксированном параметре z .

Для некоторых типов корреляционного оператора собственные функции КЛ имеют аналитический вид, в частности, для Гауссова распределения [31] и экспоненциально-косинусного распределения [32]. Однако в общем случае они не являются аналитическими и требуют решения задачи на собственные значения.

Рассмотрим несколько примеров численного расчёта функций КЛ для различных типов корреляционных функций, часто используемых для анализа случайных процессов [44], в частности:

$$K_G(x_1, y_1, x_2, y_2) = \exp\left\{-\frac{r^2}{r_0^2}\right\}, \quad (7)$$

$$K_{EC}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \exp\left\{-\frac{r}{r_0}\right\} \cos\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (8)$$

$$K_B(x_1, y_1, x_2, y_2) = J_0\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (9)$$

$$K_L(x_1, y_1, x_2, y_2) = \max\left(1 - \frac{r}{r_0}, 0\right), \quad (10)$$

где $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, r_0 – масштабный параметр. В данном параграфе вместо радиуса корреляции, входящего в формулу (5), мы используем масштабный параметр корреляционной функции. Такой подход был использован в работе [45].

На рис. 1 показан вид четырёхмерных корреляционных матриц (7)–(10), развернутых в двумерную форму при $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [-1 \text{ мм}, 1 \text{ мм}]$, $r_0 = 0,5 \text{ мм}$.

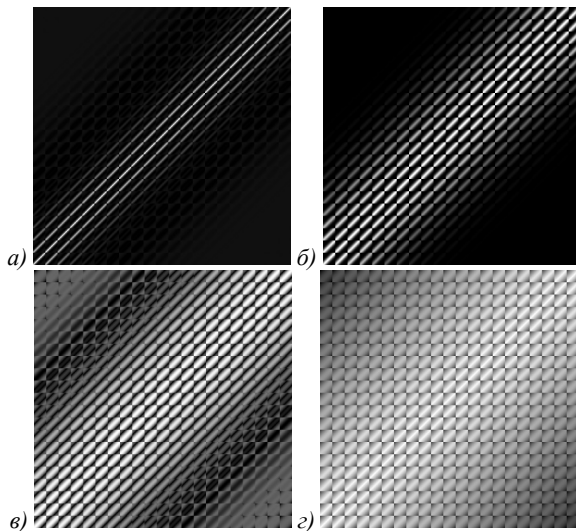


Рис. 1. Вид четырёхмерных корреляционных матриц, развернутых в двумерную форму: для Гауссова типа (7) (а), экспоненциально-косинусного типа (8) (б), Бесселева типа (9) (в) и линейного типа (10) (г)

На рис. 2, 3 показаны рассчитанные для Гауссова типа корреляционной функции собственные числа b_n и первые 12 собственных функций $\varphi_n(x_1, y_1)$. При этом на рис. 2 показаны результаты для $r_0 = 0,1 \text{ мм}$, а на рис. 3 – для $r_0 = 0,5 \text{ мм}$. Как видно из сравнения

картин собственных функций, масштабное изменение в корреляционной функции приводит также к уширению собственных функций. Но кроме этого, происходит существенное изменение результатов для собственных чисел – их значения резко убывают при уширении корреляционной функции. Таким образом, заметно сокращается число степеней свободы [46].

Очевидно, что чем шире корреляционная функция (в пределе стремится к постоянному значению), тем более коррелированными будут соседние значения случайного поля, т.е. оно фактически перестанет быть случайным. Таким образом, уменьшается число степеней свободы и число значащих собственных чисел и соответствующих им собственных функций.

И, наоборот, при сужении корреляционной функции (в пределе стремится к дельта-функции) соседние значения случайного поля становятся практически независимыми, приближаясь к белому шуму. Число степеней свободы растёт, ограничиваясь лишь числом отсчётов в матрице.

Стоит отметить, что с ростом размерности корреляционных матриц значительно возрастает вычислительная ресурсозатратность задачи на собственные значения. В частности, для размерности корреляционных матриц 100×100 отсчетов для решения задачи формируется матрица собственных векторов размерностью 10000×10000 . Поэтому задача решалась с привлечением суперкомпьютера К-100 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

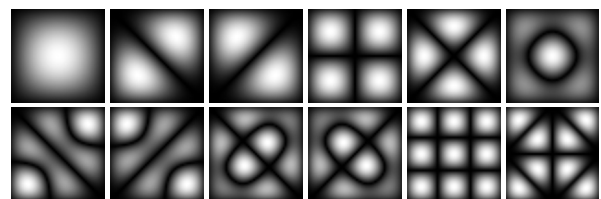
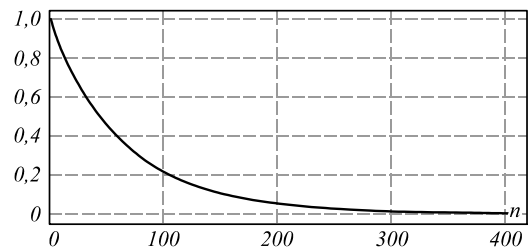


Рис. 2. Расчёты для Гауссова типа корреляционной функции (7) при $r_0 = 0,1 \text{ мм}$: собственные числа b_n и первые 12 собственных функций $\varphi_n(x, y)$

Заметим, что важен не только масштабный параметр σ_0 , но и сложность функции. На рис. 4 показаны результаты расчета для экспоненциально-косинусного типа корреляционной функции (8) при $r_0 = 0,5 \text{ мм}$. Эти результаты можно сравнить с результатами для Гауссова типа корреляционной функции (7) с тем же параметром $r_0 = 0,5 \text{ мм}$, приведенными на рис. 3. Видно, что степеней свободы больше, хотя масштаб собственных функций тот же.

Очевидно, масштаб можно менять не только за счёт параметра r_0 , но и за счёт интервала изменения

координат. На рис. 5 показаны результаты расчёта для Бесселева типа корреляционной функции (10) при $r_0 = 0,5$ мм и $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [-3$ мм, 3 мм].

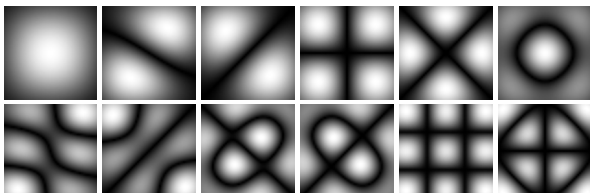
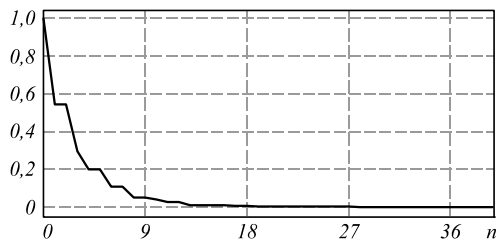


Рис. 3. Расчёты для Гауссова типа корреляционной функции (7) при $r_0 = 0,5$ мм: собственные числа b_n и первые 12 собственных функций $\varphi_n(x, y)$

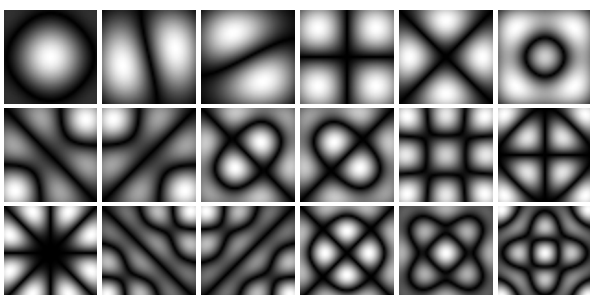
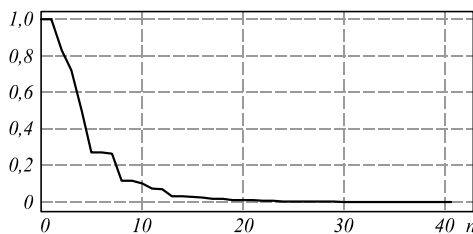


Рис. 4. Расчёты для экспоненциально-косинусного типа корреляционной функции (8) при $r_0 = 0,5$ мм: собственные числа b_n и первые 18 собственных функций $\varphi_n(x, y)$

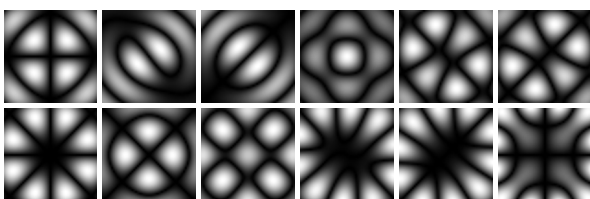
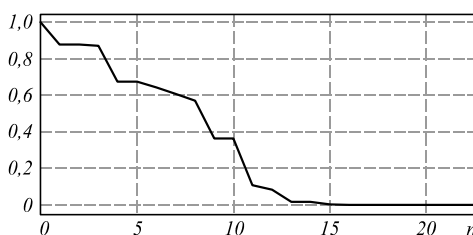


Рис. 5. Расчёты для Бесселева типа корреляционной функции (9) при $r_0 = 0,5$ мм: собственные числа b_n и первые 12 собственных функций $\varphi_n(x, y)$

3. Расчёт случайного имитатора для Гауссова корреляционного оператора

Для генерации реализаций случайного поля с заданными статистическими характеристиками (математическое ожидание и корреляционная функция) воспользуемся разложением КЛ [41–43]:

$$U(x, y) = \mu(x, y) + \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x, y), \quad (11)$$

где $\mu(x, y)$ – математическое ожидание случайного поля (принимается его равным 0), N – количество рассматриваемых ортогональных функций разложения, $\varphi_n(x, y)$ – собственные функции корреляционного оператора (6). Коэффициенты a_n суперпозиции (11) являются независимыми комплексными случайными величинами, имеющими нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную собственному значению b_n соответствующей собственной функции [41–43].

Рассмотрим формирование случайного поля с использованием выражения (11) для Гауссова распределения. Очевидно, Гауссов характер зависимости (5) является лишь частным случаем, однако это представление очень удобно для теоретического анализа. Кроме того, для Гауссова корреляционного оператора известен аналитический вид собственных функций и чисел [31]:

$$\varphi_{l,q}(x, y) = \psi_l(x) \psi_q(y), \quad (12)$$

$$b_{l,q} = d_l d_q,$$

$$\psi_l(x) = \frac{\sqrt[8]{\varepsilon}}{\sqrt{2^l l!}} \exp\left(-(\sqrt{\varepsilon} - 1) \frac{\alpha^2 x^2}{2}\right) \times H_l\left(\sqrt[4]{\varepsilon} \alpha x\right), \quad (13)$$

$$d_l = \frac{\alpha}{r_0^{2l}} \left(\frac{\alpha^2}{2} (1 + \sqrt{\varepsilon}) + \frac{1}{r_0^2}\right)^{-l - \frac{1}{2}}, \quad (14)$$

где $H_l(x)$ – полином Эрмита, $\varepsilon = 1 + (2/\alpha r_0)^2$, α – коэффициент масштабирования.

При генерации случайного поля использовались следующие параметры: $r_0 = 0,3$ мм, $\alpha = 16$. Количество собственных функций, участвующих в разложении $N = 20$.

На рис. 6 изображены амплитуда и фаза одномерного случайного поля. Сравнение теоретической и выборочной корреляционных функций для случайного поля приведено на рис. 7. Как видно, данный подход позволяет формировать случайные поля со статистическими характеристиками, очень близкими к заданным.

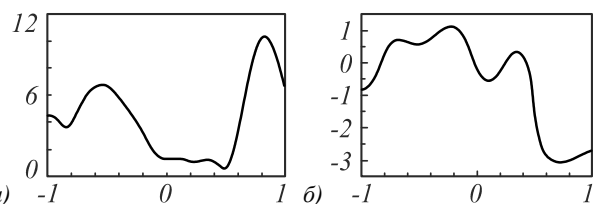


Рис. 6. Амплитуда (а) и фаза (б) одномерного случайного комплексного поля

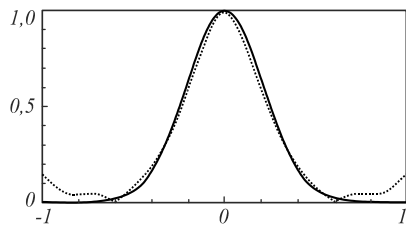


Рис. 7. Теоретическая (сплошная линия) и выборочная (пунктирная линия) корреляционные функции

На рис. 8 показана реализация случайного двумерного поля для $r_0 = 0,3$ мм.

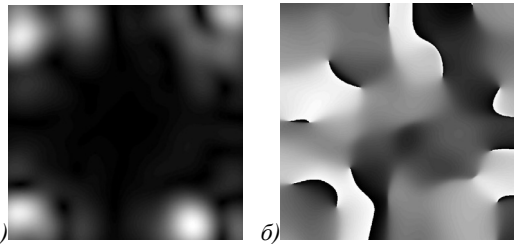


Рис. 8. Амплитуда (а) и фаза (б) двумерного случайного комплексного поля

4. Моделирование искажения вихревых мод имитатором случайной среды

В качестве входных пучков будем рассматривать моды Лагерра–Гаусса [47, 48]:

$$GL_{nm}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{2w^2}\right) \left(\frac{r}{w}\right)^{|m|} L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{w^2}\right) \exp(im\varphi), \quad (15)$$

где $L_n^{|m|}(\cdot)$ – обобщённые полиномы Лагерра [47], n, m – радиальный и угловой индексы, w – радиус перетяжки Гауссова пучка.

При моделировании искажения мод Лагерра–Гаусса (15) с использованием рассчитанного имитатора случайной среды были выбраны следующие параметры: $\lambda = 532$ нм, $w = 0,2$ мм, $z = 100$ мм, радиальный индекс $n = 0$, порядок оптического вихря m варьировался.

На рис. 9 представлены изображения вихревого пучка с $m = 3$ до и после прохождения среды со случайными искажениями. Моделирование распространения выполнялось с использованием оператора распространения (1) для Гауссовой зависимости (5).

Оценка сохранения модовых свойств искаженного пучка выполнялась на основе разложения поля по угловым гармоникам, которое позволяет определить состояние орбитального углового момента [49, 50]:

$$c_p = \int_0^{2\pi} \int_0^R E(r, \varphi, z) \exp(-ip\varphi) r \, d\varphi \, dr, \quad (16)$$

где $E(r, \varphi, z)$ – анализируемый пучок.

Результаты расчётов собраны в табл. 1.

Как видно из табл. 1, увеличение порядка оптического вихря m приводит к меньшей стабильности модовых свойств вихревых пучков к случайным оптиче-

ским флуктуациям, что согласуется с ранее полученными экспериментальными результатами [14].

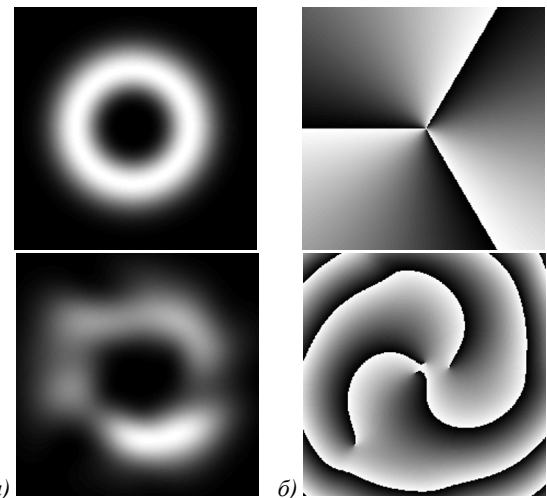


Рис. 9. Интенсивность и фаза оптического поля, соответствующего моде Лагерра–Гаусса $(n, m) = (0, 3)$ на входе (верхняя строка) и на расстоянии $z = 100$ мм (нижняя строка)

Табл. 1. Содержание оптических вихрей порядка p в пучке Лагерра–Гаусса с порядком вихря m после прохождения случайной среды

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$p=0$	0,9822	0,0085	0,0382	0,0024	0,009	0,074
$p=1$	0,0023	0,9493	0,0293	0,0523	0,0061	0,0123
$p=2$	0,0059	0,0042	0,8875	0,0667	0,0627	0,015
$p=3$	0,0038	0,0126	0,0064	0,805	0,1151	0,0733
$p=4$	0,0003	0,0067	0,0222	0,0094	0,6981	0,1617
$p=5$	0	0,0005	0,0085	0,0332	0,013	0,5743

Заключение

В работе рассмотрен метод генерации случайного оптического поля (имитатора турбулентности) с помощью разложения Карунена–Лоэва для различных типов корреляционных операторов. Через сформированный имитатор случайной среды с Гауссовой корреляционной функцией были распространены однокольцевые пучки Лагерра–Гаусса с целью исследования способности оптических вихрей сохранять свою структуру. Результаты моделирования показали качественное согласование с ранее полученными экспериментальными результатами.

Благодарности

Данная работа была выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 18-37-00056 мол_а, 18-29-20045 мк) в части расчета имитаторов случайных полей на основе разложения Карунена–Лоэва и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (согла-

шение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части моделирования искажения мод Лагерра–Гаусса.

Литература

1. **Ramirez-Iniguez, R.** Optical wireless communications: IR for wireless connectivity / R. Ramirez-Iniguez, S.M. Idrus, Z. Sun. – Boca Raton: CRC Press, 2007. – 376 p.
2. **Majumdar, A.K.** Free-space laser communications: principles and advances / A.K. Majumdar, J.C. Ricklin. – New York: Springer Science & Business Media, 2008. – 418 p.
3. **Henniger, H.** An introduction to free-space optical communications / H. Henniger, O. Wilfer // *Radioengineering*. – 2010. – Vol. 19, Issue 2. – P. 203-212.
4. **Willner, A.E.** Recent advances in high-capacity free-space optical and radio-frequency communications using orbital angular momentum multiplexing / A.E. Willner, Y. Ren, G. Xie, Y. Yan, L. Li, Z. Zhao, J. Wang, M. Tur, A.F. Molish, S. Ashrafi // *Philosophical Transactions of the Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences*. – 2017. – Vol. 375, Issue 2087. – 20150439.
5. **Krenn, M.** Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna / M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl, R. Ursin, A. Zeilinger // *New Journal of Physics*. – 2014. – Vol. 16. – 113028.
6. **Ren, Y.** Experimental characterization of a 400 Gbit/s orbital angular momentum multiplexed free-space optical link over 120 m / Y. Ren, Z. Wang, P. Liao, L. Li, G. Xie, H. Huang, Z. Zhao, Y. Yan, N. Ahmed, A. Willner, M.P.J. Lavery, N. Ashrafi, S. Ashrafi, R. Bock, M. Tur, I.B. Djordjevic, M.A. Neifeld, A.E. Willner // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 3. – P. 622-625.
7. **Isumaru, A.** Wave propagation and scattering in random media / A. Isumaru. – New York: John Wiley & Sons, 1999. – 272 p.
8. **Mishchenko, M.I.** Scattering, absorption, and emission of light by small particles / M.I. Mishchenko, L.D. Travis, A.A. Lacis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 462 p.
9. **Andrews, L.C.** Laser beam propagation in random media / L.C. Andrews. – 2nd ed. – Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press, 2005. – 808 p.
10. **Eyyuboglu, H.T.** Propagation of higher order Bessel-Gaussian beams in turbulence / H.T. Eyyuboglu // *Applied Physics B*. – 2007. – Vol. 88, Issue 2. – P. 259-265. – DOI: 10.1007/s00340-007-2707-6.
11. **Gbur, G.** Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation / G. Gbur, R.K. Tyson // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2008. – Vol. 25, Issue 1. – P. 225-230. – DOI: 10.1364/JOSAA.25.000225.
12. **Porfirev, A.P.** Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium / A.P. Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 11. – P. E8-E15. – DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
13. **Khonina, S.N.** A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre–Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, V.D. Parantin // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2018. – Vol. 105. – P. 68-74. – DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
14. **Polynkin, P.** Optimized multiemitter beams for free-space optical communications through turbulent atmosphere / P. Polynkin, A. Peleg, L. Klein, T. Rhoadarmer, J.V. Moloney // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32, Issue 8. – P. 885-887. – DOI: 10.1364/OL.32.000885.
15. **Chen, C.** Propagation of radial Airy array beams through atmospheric turbulence / C. Chen, H. Yang, M. Kavehrad, Z. Zhou // *Optics and Lasers in Engineering*. – 2014. – Vol. 52. – P. 106-114. – DOI: 10.1016/j.optlaseng.2013.07.003.
16. **Gu, Y.** Scintillation of nonuniformly polarized beams in atmospheric turbulence / Y. Gu, O. Korotkova, G. Gbur // *Optics Letters*. – 2009. – Vol. 34, Issue 15. – P. 2261-2263. – DOI: 10.1364/OL.34.002261.
17. **Zhou, P.** Propagation property of a nonuniformly polarized beam array in turbulent atmosphere / P. Zhou, X. Wang, Y. Ma, H. Ma, X. Xu, Z. Liu // *Applied Optics*. – 2011. – Vol. 50, Issue 9. – P. 1234-1239. – DOI: 10.1364/AO.50.001234.
18. **Moreno, I.** Vector beam polarization state spectrum analyzer / I. Moreno, J.A. Davis, K. Badham, M.M. Sánchez-López, J.E. Holland, D.M. Cottrell // *Scientific Reports*. – 2017. – Vol. 7. – 2216.
19. **Khonina, S.N.** Recognition of polarization and phase states of light based on the interaction of nonuniformly polarized laser beams with singular phase structures / S.N. Khonina, A.P. Porfirev, S.V. Karpeev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 13. – P. 18484-18492. – DOI: 10.1364/OE.27.018484.
20. **Gbur, G.** Angular spectrum representation for the propagation of arbitrary coherent and partially coherent beams through atmospheric turbulence / G. Gbur, O. Korotkova // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2007. – Vol. 24, Issue 3. – P. 745-752. – DOI: 10.1364/JOSAA.24.000745.
21. **Chen, R.** Statistical properties of a cylindrical vector partially coherent beam in turbulent atmosphere / R. Chen, Y. Dong, F. Wang, Y. Cai // *Applied Physics B*. – 2013. – Vol. 112. – P. 247-259.
22. **Thomas, S.** A simple turbulence simulator for adaptive optics / S. Thomas // *Proceedings of SPIE*. – 2004. – Vol. 5490. – P. 766-773. – DOI: 10.1117/12.549858.
23. **Mishra, S.K.** Design and testing of customized phase plate as atmospheric turbulence simulator / S.K. Mishra, A. Dixit, V. Porwal, D. Mohan // 37th National Symposium of OSI at Pondicherry University. – 2013. – P. 172-174. – DOI: 10.13140/2.1.4106.5920.
24. **Fukunaga, K.** Representation of random processes using the finite Karhunen-Loeve expansion / K. Fukunaga, W.L.G. Koontz // *Information and Control*. – 1970. – Vol. 16. – P. 85-101. – DOI: 10.1016/S0019-9958(70)80043-2.
25. **Kirby, M.** Application of the Karhunen-Loeve procedure for the characterization of human faces / M. Kirby, L. Sirovich // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. – 1990. – Vol. 12, Issue 1. – P. 103-108.
26. **Wang, L.** Karhunen-Loeve expansions and their application / L. Wang. – Ann Arbor: ProQuest, 2008. – 292 p.
27. **Soifer, V.A.** Decorrelated features of images extracted with the aid of optical Karhunen-Loeve expansion / V.A. Soifer, M.A. Golub, S.N. Khonina // *Pattern Recognition and Image Analysis*. – 1993. – Vol. 3, Issue 3. – P. 289-295.
28. **Fancourt, C.L.** On the relationship between the Karhunen-Loeve transform and the prolate spheroidal wave functions / C.L. Fancourt, C. Principe // 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 2000. – Vol. 1. – P. 261-264.
29. **Kirilenko, M.S.** Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *Proceedings of SPIE*. – 2014. – Vol. 9146. – 91560J. – DOI: 10.1117/12.2054214.

30. **Хонина, С.Н.** Метод вычисления собственных значений вытянутых сферических функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Соيفер // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 376, № 1. – С. 30-33.
31. **Fasshauer, G.E.** Positive definite kernels: past, present and future [Electronical Resource] / G.E. Fasshauer. – URL: <http://www.math.iit.edu/~fass/PDKernels.pdf> (request date 10.01.2020). – P. 28.
32. **Голуб, М.А.** Разложение Карунена–Лоэва при экспоненциально-косинусной корреляционной функции / М.А. Голуб, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 1993. – Т. 13. – С. 49-53.
33. **Feizulin, Z.I.** Broadening of a laser beam in a turbulent medium / Z.I. Feizulin, Y.A. Kravtsov // Radiophysics and Quantum Electronics. – 1967. – Vol. 10, Issue 1. – P. 33-35.
34. **Young, C.Y.** Turbulence-induced beam spreading of higher-order mode optical waves / C.Y. Young, Y.V. Gilchrest, B.R. Macon // Optical Engineering. – 2002. – Vol. 41. – P. 1097-1103.
35. **Korotkova, O.** Random light beams: theory and applications / O. Korotkova. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2013. – 366 p. – ISBN: 978-1-4398-1950-0.
36. **Lutomirski, R.F.** Propagation of a finite optical beam in an inhomogeneous medium / R.F. Lutomirski, H.T. Yura // Applied Optics. – 1971. – Vol. 10, Issue 7. – P. 1652-1658.
37. **Кравцов, Ю.А.** Прохождение радиоволн через атмосферу Земли / Ю.А. Кравцов, З.И. Фейзулин, А.Г. Виноградов. – М.: Радио и связь, 1983. – 223 с.
38. **Рытов, С.М.** Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы / С.М. Рытов. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
39. **Обухов, А.М.** Турбулентность и динамика атмосферы / А.М. Обухов. – Л.: Гидрометиздат, 1988.
40. **Гурвич, А.С.** Лазерное излучение в турбулентной атмосфере / А.С. Гурвич, А.И. Кон, В.Л. Миронов, С.С. Хмелевцов. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
41. **Van Trees, H.L.** Detection; estimation and modulation theory: Part I. Detection; estimation and linear modulation theory / H.L. Van Trees – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968. – 1176 p.
42. **Le Maitre, O.P.** Spectral methods for uncertainty quantification with applications to computational fluid dynamics: scientific computation / O.P. Le Maitre, O.M. Knio. – Luxembourg: Springer, 2010. – 481 p.
43. **Huang, S.P.** Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes / S.P. Huang, S.T. Quek, K.K. Phoon // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2001. – Vol. 52. – P. 1029-1043. – DOI: 10.1002/nme.255.
44. **Прохоров, С.А.** Математическое описание и моделирование случайных процессов / С.А. Прохоров. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. – 209 с.
45. **Ирошников, Н.Г.** Экспресс-анализ параметров турбулентности / Н.Г. Ирошников, А.В. Ларичев, А.В. Корябин, В.И. Шмальгаузен // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2009. – № 5. – С. 74-78.
46. **Kirilenko, M.S.** Formation of signals matched with vortex eigenfunctions of bounded double lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Optics Communications. – 2018. – Vol. 410. – P. 153-159. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.060.
47. **Adams, M.J.** An introduction to optical waveguides / M.J. Adams. – Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 1981.
48. **Khonina, S.N.** Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, M. Honkanen, J. Lautanen, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 1999. – Vol. 46, Issue 2. – P. 227-238. – DOI: 10.1080/09500349908231267.
49. **Харитонов, С.И.** Вычисление момента импульса электромагнитного поля внутри волновода с абсолютно проводящими стенками: *ab initio* / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 588-605. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.
50. **Ustinov, A.V.** Local characteristics of paraxial Laguerre-Gaussian vortex beams with a zero total angular momentum / A.V. Ustinov, V.G. Niziev, S.N. Khonina, S.V. Karpeev // Journal of Modern Optics. – 2019. – Vol. 66, Issue 20. – P. 1961-1972. – DOI: 10.1080/09500340.2019.1686183.

Сведения об авторах

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: khonina@smr.ru.

Волотовский Сергей Геннадьевич, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: sv@smr.ru.

Кириленко Михаил Сергеевич, 1990 года рождения, в 2013 году окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета по специальности «Прикладная математика и информатика». В 2018 году защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Оптика». В настоящее время работает в Самарском университете доцентом кафедры технической кибернетики. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптические операторы распространения, программирование. E-mail: areatangent@gmail.com.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 19 декабря 2019 г. Окончательный вариант – 16 января 2020 г.

A method of generating a random optical field using the Karhunen-Loeve expansion to simulate atmospheric turbulence

S.N. Khonina^{1,2}, S.G. Volotovskiy¹, M.S. Kirilenko²,

¹ IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

² Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

It is proposed to use the random field generation in the numerical simulation of the propagation of radiation through a random medium using method based on the Karhunen–Loeve expansion with various types of correlation operators to describe turbulence simulators. The properties of the calculated simulators of a random medium with a Gaussian correlation function were investigated in modeling the propagation of Laguerre-Gaussian vortex beams. The simulation results showed that an increase in the order of the optical vortex leads, as in the experiment, to lower stability of the phase singularity of the beams to random optical fluctuations. The similarity of the simulation results and the optical experiments indicates the promise of the proposed approach for the synthesis of random environment simulators.

Keywords: correlation operator, eigenfunctions, Karhunen-Loeve expansion, random optical medium simulator.

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under projects Nos. 18-37-00056-mol a, 18-29-20045-mk (calculation of random field simulators based on the Karhunen-Loeve expansion) and the RF Ministry of Science and Higher Education within the government project of FSRC “Crystallography and Photonics” RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 (simulation of Laguerre-Gaussian modes distortions).

Citation: Khonina SN, Volotovskiy SG, Kirilenko MS. A method of generating a random optical field using the Karhunen-Loeve expansion to simulate atmospheric turbulence. *Computer Optics* 2020; 44(1): 53-59. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-680.

References

- [1] Ramirez-Iniguez R, Idrus SM, Sun Z. Optical wireless communications: IR for wireless connectivity. Boca Raton: CRC Press; 2007.
 - [2] Majumdar AK, Ricklin JC. Free-space laser communications: principles and advances. New York: Springer Science & Business Media; 2008.
 - [3] Henniger H, Wilfer O. An introduction to free-space optical communications. *Radioengineering* 2010; 19(2): 203-212.
 - [4] Willner AE, Ren Y, Xie G, Yan Y, Li L, Zhao Z, Wang J, Tur M, Molish AF, Ashrafi S. Recent advances in high-capacity free-space optical and radio-frequency communications using orbital angular momentum multiplexing. *Philos Trans A Math Phys Eng Sci* 2017; 375(2087): 20150439.
 - [5] Krenn M, Fickler R, Fink M, Handsteiner J, Malik M, Scheidl T, Ursin R, Zeilinger A. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna. *New J Phys* 2014; 16: 113028.
 - [6] Ren Y, Wang Z, Liao P, Li L, Xie G, Huang H, Zhao Z, Yan Y, Ahmed N, Willner A, Lavery MPJ, Ashrafi N, Ashrafi S, Bock R, Tur M, Djordjevic IB, Neifeld MA, Willner AE. Experimental characterization of a 400 Gbit/s orbital angular momentum multiplexed free-space optical link over 120 m. *Opt Lett* 2016; 41(3): 622-625.
 - [7] Isumaru A. Wave propagation and scattering in random media. New York: John Wiley & Sons; 1999.
 - [8] Mishchenko MI, Travis LD, Lacis AA. Scattering, absorption, and emission of light by small particles. Cambridge: Cambridge University Press; 2002.
 - [9] Andrews LC. Laser beam propagation in random media. 2nd ed. Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press; 2005.
 - [10] Eyyuboglu HT. Propagation of higher order Bessel-Gaussian beams in turbulence. *Appl Phys B* 2007; 88(2): 259-265. DOI: 10.1007/s00340-007-2707-6.
 - [11] Gbur G, Tyson RK. Vortex beam propagation through atmospheric turbulence and topological charge conservation. *J Opt Soc Am A* 2008; 25(1): 225-230. DOI: 10.1364/JOSAA.25.000225.
 - [12] Porfirev AP, Kirilenko MS, Khonina SN, Skidanov RV, Soifer VA. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium. *Appl Opt* 2017; 56(11): E8-E15. DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
 - [13] Khonina SN, Karpeev SV, Parinin VD. A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre-Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles. *Opt Lasers Eng* 2018; 105: 68-74. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
 - [14] Polynkin P, Peleg A, Klein L, Rhoadarmer T, Moloney JV. Optimized multiemitter beams for free-space optical communications through turbulent atmosphere. *Opt Lett* 2007; 32(8): 885-887. DOI: 10.1364/OL.32.000885.
 - [15] Chen C, Yang H, Kavehrad M, Zhou Z. Propagation of radial Airy array beams through atmospheric turbulence. *Opt Lasers Eng* 2014; 52: 106-114. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2013.07.003.
 - [16] Gu Y, Korotkova O, Gbur G. Scintillation of nonuniformly polarized beams in atmospheric turbulence. *Opt Lett* 2009; 34(15): 2261-2263. DOI: 10.1364/OL.34.002261.
 - [17] Zhou P, Wang X, Ma Y, Ma H, Xu X, Liu Z. Propagation property of a nonuniformly polarized beam array in turbulent atmosphere. *Appl Opt* 2011; 50(9): 1234-1239. DOI: 10.1364/AO.50.001234.
 - [18] Moreno I, Davis JA, Badham K, Sánchez-López MM, Holland JE, and Cottrell DM. Vector beam polarization state spectrum analyzer. *Sci Rep* 2017; 7: 2216.
 - [19] Khonina SN, Porfirev AP, Karpeev SV. Recognition of polarization and phase states of light based on the interaction of nonuniformly polarized laser beams with singular
-

- phase structures. *Opt Express* 2019; 27(13): 18484-18492. DOI: 10.1364/OE.27.018484.
- [20] Gbur G, Korotkova O. Angular spectrum representation for the propagation of arbitrary coherent and partially coherent beams through atmospheric turbulence. *J Opt Soc Am A* 2007; 24(3): 745-752. DOI: 10.1364/JOSAA.24.000745.
- [21] Chen R, Dong Y, Wang F, Cai Y. Statistical properties of a cylindrical vector partially coherent beam in turbulent atmosphere. *Appl Phys B* 2013; 112: 247-259.
- [22] Thomas S. A simple turbulence simulator for adaptive optics. *Proc SPIE* 2004; 5490: 766-773. DOI: 10.1117/12.549858.
- [23] Mishra SK, Dixit A, Porwal V, Mohan D. Design and testing of customized phase plate as atmospheric turbulence simulator. 37th National Symposium of OSI at Pondicherry University 2013: 172-174. DOI: 10.13140/2.1.4106.5920.
- [24] Fukunaga K, Koontz WLG. Representation of random processes using the finite Karhunen-Loeve expansion. *Information and Control* 1970; 16: 85-101. DOI: 10.1016/S0019-9958(70)80043-2.
- [25] Kirby M, Sirovich L. Application of the Karhunen-Loeve procedure for the characterization of human faces. *IEEE Trans Patt Anal Machine Intell* 1990; 12(1): 103-108.
- [26] Wang L. Karhunen-Loeve expansions and their application. *Ann Arbor: ProQuest*; 2008.
- [27] Soifer VA, Golub MA, Khonina SN. Decorrelated features of images extracted with the aid of optical Karhunen-Loeve expansion. *Pattern Recognition and Image Analysis* 1993; 3(3): 289-295.
- [28] Fancourt CL, Principe C. On the relationship between the Karhunen-Loeve transform and the prolate spheroidal wave functions. 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing 2000; 1: 261-264.
- [29] Kirilenko MS, Khonina SN. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system. *Proc SPIE* 2014; 9146: 91560J. DOI: 10.1117/12.2054214.
- [30] Khonina SN, Volotovskii SG, Soifer VA. A method for computing the eigenvalues of prolate spheroidal functions of order zero. *Doklady Mathematics* 2001; 63(1): 136-138.
- [31] Fasshauer GE. Positive definite kernels: past, present and future. Source: <<http://www.math.iit.edu/~fass/PDKernels.pdf>>.
- [32] Golub MA, Khonina SN. Karhunen-Loeve expansion for exponential-cosine correlation function. *Computer Optics* 1993; 13: 49-53.
- [33] Feizulin ZI, Kravtsov YA. Broadening of a laser beam in a turbulent medium. *Radiophysics and Quantum Electronics* 1967; 10(1): 33-35.
- [34] Young CY, Gilchrest YV, Macon BR. Turbulence-induced beam spreading of higher-order mode optical waves. *Opt Eng* 2002; 41: 1097-1103.
- [35] Korotkova O. *Random light beams: theory and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press; 2013. ISBN: 978-1-4398-1950-0.
- [36] Lutomirski RF, Yura HT. Propagation of a finite optical beam in an inhomogeneous medium. *Appl Opt* 1971; 10(7): 1652-1658.
- [37] Kravtsov YuA, Feizulin ZI, Vinogradov AG. Propagation of radio waves through the Earth's atmosphere [In Russian]. Moscow: "Radio i svyaz" Publisher; 1983.
- [38] Rytov SM. Introduction in statistical radiophysics. Part I [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1976.
- [39] Obukhov AM. Turbulence and atmospheric dynamics [In Russian]. Leningrad: "Gidrometizdat" Publisher; 1988.
- [40] Gurvich AS, Kon AI, Mironov VL, Khmelevtsov SS. Laser radiation in a turbulent atmosphere [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1976.
- [41] Van Trees HL. Detection, estimation and modulation theory: Part I. Detection; estimation and linear modulation theory. – New York: John Wiley & Sons Inc; 1968.
- [42] Le Maitre OP, Knio OM. Spectral methods for uncertainty quantification with applications to computational fluid dynamics: scientific computation. – Luxembourg: Springer; 2010.
- [43] Huang SP, Quek ST, Phoon KK. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes. *Int J Num Method Eng* 2001; 52: 1029-1043. DOI: 10.1002/nme.255.
- [44] Prohorov SA. Mathematical description and modeling of random processes [In Russian]. Samara: Samara State Aerospace University Publisher; 2001.
- [45] Iroshnikov NG, Larichev AV, Koryabin AV, Shmalhausen VI. Express analysis of turbulent parameters [In Russian]. Moscow: University Physics Bulletin 2009; 5: 74-78.
- [46] Kirilenko MS, Khonina SN. Formation of signals matched with vortex eigenfunctions of bounded double lens system. *Opt Commun* 2018; 410: 153-159. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.060.
- [47] Adams MJ. An introduction to optical waveguides, Chichester: John Wiley & Sons Inc, 1981.
- [48] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Honkanen M, Lautanen J, Turunen J. Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics. *J Mod Opt* 1999; 46(2): 227-238. DOI: 10.1080/09500349908231267.
- [49] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Calculation of the angular momentum of an electromagnetic field inside a waveguide with absolutely conducting walls: *ab initio*. *Computer Optics* 2018; 42(4): 588-605. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.
- [50] Ustinov AV, Niziev VG, Khonina SN, Karpeev SV. Local characteristics of paraxial Laguerre–Gaussian vortex beams with a zero total angular momentum. *J Mod Opt* 2019; 66(20): 1961-1972. DOI: 10.1080/09500340.2019.1686183.

Author's information

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: khonina@smr.ru.

Sergey Gennadjevich Volotovskiy (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty "Applied Mathematics", works as the leading programmer in the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: sv@smr.ru.

Mikhail Sergeevich Kirilenko, born in 1990, in 2013 he graduated from Samara State Aerospace University, majoring in Applied Mathematics and Computer Science. He defended his thesis on the specialty "Optics" in 2018. He

currently works at Samara University as an assistant professor at the Technical Cybernetics department. Research interests: diffractive optics, optical propagation operators, programming. E-mail: areatangent@gmail.com .

Received December 19, 2019. The final version – January 16, 2020.
