

## Может ли радиальное число вихревых мод управлять орбитальным угловым моментом?

А.В. Волярь<sup>1</sup>, Е.Г. Абрамочкин<sup>2</sup>, М.В. Брецько<sup>1</sup>, Я.Е. Акимова<sup>1</sup>, Ю.А. Егоров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4;

<sup>2</sup> Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН), 443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

### Аннотация

В общем случае стандартный пучок Лагерра–Гаусса, состояние которого задаётся двумя квантовыми числами – радиальным числом  $n$  и азимутальным числом  $\ell$  (или топологическим зарядом вихря, переносимым пучком Лагерра–Гаусса), является неустойчивым относительно слабых возмущений. Это нетрудно заметить, если разложить комплексную амплитуду пучка Лагерра–Гаусса по модам Эрмита–Гаусса, общее число которых равно  $N=2n+\ell+1$ . Изменяя амплитуды и фазы коэффициентов разложения с помощью возмущающих параметров, можно существенно трансформировать первоначальную радиально симметричную структуру пучка Лагерра–Гаусса. Мы назвали композицию мод Эрмита–Гаусса, зависящую от двух возмущающих параметров (амплитудный параметр  $\epsilon$ , фазовый параметр  $\theta$ ), структурированным пучком Лагерра–Гаусса. При изменении этих параметров орбитальный угловой момент структурированного пучка Лагерра–Гаусса меняется в интервале  $(-\ell, \ell)$ , а полный топологический заряд – в интервале  $(-2n-\ell, 2n+\ell)$ . При  $n=0$  изменение орбитального углового момента в интервале  $(-\ell, \ell)$  является плавным, а с ростом  $n$  поведение орбитального углового момента становится всё более осциллирующим. Число минимумов (максимумов) осцилляций равно радиальному числу в интервале  $\theta=(0, \pi)$  и  $\theta=(\pi, 2\pi)$ , а их амплитуда нелинейно зависит от разности  $\ell-n$ , за исключением точки  $\theta=\pi$ , где сЛГ-пучок становится вырожденным. Если же  $\ell=0$ , то орбитальный угловой момент  $=0$  и в структуре структурированного пучка Лагерра–Гаусса возникает либо симметричный массив вихрей с противоположными знаками топологического заряда, либо узор краевых дислокаций, число которых равно радиальному числу  $n$ . Также мы обнаружили, что, несмотря на быстрые осцилляции орбитального углового момента, абсолютное значение полного топологического заряда структурированного пучка не изменяется при вариации как амплитудного  $\epsilon$ , так и фазового параметра  $\theta$ , но зависит исключительно от исходного состояния  $(n, \ell)$  пучка Лагерра–Гаусса и равно модулю  $(2n+\ell)$ .

**Ключевые слова:** структурная устойчивость, топологический заряд, орбитальный угловой момент, спектр вихрей.

**Цитирование:** Волярь, А.В. Может ли радиальное число вихревых мод управлять орбитальным угловым моментом? / А.В. Волярь, Е.Г. Абрамочкин, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 6. – С. 853-863. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1169.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV, Akimova YE, Egorov YA. Can the radial number of vortex modes control the orbital angular momentum? Computer Optics 2022; 46(6): 853-863. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1169.

### Введение

Для единичного ЛГ-пучка ответ на вопрос в заголовке статьи вполне ожидаем: конечно, нет. Для композиции ЛГ-пучков с одинаковым ТЗ ответ тот же: конечно, нет. Как правило, орбитальный угловой момент (ОУМ) единичных осесимметричных вихревых пучков однозначно связан с их азимутальными числами  $\ell$ , иначе говоря, с их топологическими зарядами (ТЗ) [1]. Если комплексные амплитуды  $\Psi$  параксиальных вихревых пучков нормированы, то ОУМ суперпозиции таких пучков (мод) также ассоциируется с их ТЗ [2]  $\ell_z = \sum_c \ell |c_\ell|^2$ , где  $c_\ell$  – амплитуды вихревых

мод,  $\sum_c \ell |c_\ell|^2 = 1$ . Более сложная ситуация возникает для несимметричных пучков, а также комбинаций вихревых мод. Принято считать [3], что ОУМ лазерных пучков можно разделить на внутренний и внешний. Внутренний ОУМ определяется геликоидальным волновым фронтом (или непосредственно его фазовыми сингулярностями, оптическими вихрями), тогда как внешний ОУМ задаётся сдвигом пучков относительно общей оси, деформацией формы поперечного сечения или астигматизмом. Внутренний и внешний ОУМ можно измерить в эксперименте, используя метод моментов интенсивности [4]. Более того, можно достичь больших значений ОУМ простой деформа-

цией безвихревых лазерных пучков [5]. Управление параметрами массива внеосевых вихревых и безвихревых пучков позволяет либо многократно увеличивать ОУМ [6], либо полностью его компенсировать [7]. Тем не менее, зависимость ОУМ от радиального числа не была замечена. Однако деформация вихревых пучков неявно приводит к возникновению такой зависимости [8]. Более того, зависимость от радиального числа начинает существенно сказываться на ОУМ в симметричных ЛГ-пучках, подверженных комплексному сдвигу [9]. Таким образом, в ряде статей был обнаружен эффект зависимости ОУМ от радиального числа за счёт либо деформации вихревых пучков, либо их несимметричных сдвигов, что можно отнести к внешним проявлениям ОУМ. В настоящей работе мы рассмотрим проблему влияния радиального числа на ТЗ вихревых мод и ОУМ в структурированных осесимметричных пучках [10,11]. Недавно была опубликована статья [12], в которой авторы теоретически рассматривают ОУМ в композиции пучков Эрмита–Гаусса (ЭГ) с различными амплитудами. Однако ими не был затронут вопрос влияния радиального и азимутального числа результирующего структурированного вихревого пучка на ОУМ при изменении амплитуд и фаз ЭГ-мод.

Целью нашей статьи является исследование ОУМ и общего ТЗ структурированных ЛГ-пучков, в составе которых каждая ЭГ-мода испытывает двухпараметрическое гармоническое возбуждение амплитуды и начальной фазы.

### 1. Двухпараметрическое возбуждение ЭГ-мод в структурированном ЛГ-пучке

Использование многих степеней свободы структурированных пучков предполагает ввод полезной информации в каждую его независимую моду [10]. Однако изменение амплитуд и фаз этих мод неизбежно приводит к нарушению структурной устойчивости пучка в целом и резкому изменению ОУМ. Поэтому возбуждение собственных мод можно рассматривать как *внутреннее возмущение* структурированного пучка в отличие от *внешнего возмущения*, источником которого являются регулярные и случайные возмущения внешней среды. Отклик структурированного пучка на внутренние возмущения зависит от свойств вихревых мод в его составе и способов детектирования введенной информации. Как мы покажем ниже, ОУМ всего структурированного пучка может существенно отличаться от ОУМ мод пучка при возбуждении безвихревых ЭГ-мод. Более того, радиальное число структурированного пучка может существенно изменять как ТЗ каждой моды, так и ОУМ пучка в целом.

#### 1.1. Комплексная амплитуда структурированного ЛГ-пучка

В работе [13] мы показали, что фильтрация ЭГ-мод в составе ЛГ-пучков может существенно изме-

нять свойства структурированного пучка в целом. Там же было показано, насколько чувствительна такая волновая конструкция к небольшим изменениям амплитудного параметра. В этом подпараграфе мы рассмотрим, как изменяется вихревая структура пучка при возбуждении кратными фазами каждой ЭГ-моды и как вариация амплитудного параметра разделяет структурированный пучок на два структурно устойчивых семейства.

Структурированный ЛГ-пучок (сЛГ) можно представить в базисе ЭГ-мод в виде

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \times \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \varepsilon_k(\varepsilon, \theta) HG_{2n+\ell-k, k}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}=(x, y)$ ,  $P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(\cdot)$  – многочлен Якоби и  $\varepsilon_k(\varepsilon, \theta)$  – возмущающие коэффициенты. В невозмущенном случае,  $\varepsilon_k(0, 0)=1$ , сЛГ-пучок превращается в стандартную ЛГ-моду [14]. Мы хотим узнать, как изменится вихревая структура ЛГ-пучка для случая

$$\varepsilon_k(\varepsilon, \theta) = 1 + \varepsilon e^{ik\theta}, \quad (2)$$

т.е. когда к каждой ЭГ-моды добавлено амплитудное возмущение  $\varepsilon$  и фазовое возмущение, кратное  $\theta$ .

Суперпозицию мод (1) с учетом возмущения (2) можно существенно упростить (см. Приложение А) и записать при  $\ell \geq 0$  как

$$sLG_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = LG_{n,\ell}(\mathbf{r}) + \varepsilon \frac{i^{n-\ell} e^{\pm i(2n+\ell)\alpha}}{2^{n+\ell} n!} HLG_{n,n+\ell} \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, -\frac{x-y}{\sqrt{2}} \middle| \alpha \right), \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{1}{2} \pi \right).$$

Фактически комплексная амплитуда (3) показывает, что возбужденное состояние сЛГ-пучка представляет собой сумму двух стандартных мод: ЛГ-моды и гибридной Эрмит–Лагерр–Гауссовой (ЭЛГ) моды, структурой которой управляют амплитудный  $\varepsilon$  и фазовый  $\theta$  параметры. Из формулы (3) следует, что вариация амплитудного параметра  $\varepsilon$  позволяет разделить возмущенный ЛГ-пучок на два структурно устойчивых семейства: 1) для  $\varepsilon \leq 1$  сЛГ-пучок, содержащий две стандартных ЛГ- и ЭЛГ-моды; 2) для  $\varepsilon \gg 1$  сЛГ-пучок превращается в стандартную ЭЛГ-моду с одним управляющим параметром  $\theta$ . Рис. 1 иллюстрирует картины интенсивности и фазы этих двух семейств.

В многообразии структурных преобразований на рис. 1 привлекают внимание характерные картины для трех значений фазового параметра  $\theta$ :  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$  и обоих значений амплитудного параметра. Так, в случае  $\varepsilon=1$  и  $\theta=\pi/2$  возникает суперпозиция ЛГ- и ЭГ-мод (т.к.  $HLG_{n,n+\ell}(\mathbf{r}|\pi/2) = i^\ell HG_{n+\ell, n}(\mathbf{r})$  [14]) с

одинаковыми весами, а в случае  $\varepsilon = 1$  и  $\theta = 3\pi/2$  картина интенсивности и фазы поворачивается на угол  $\pi/2$ , в то время как при  $\varepsilon = 100$  возникают почти чистые состояния ЭГ-мод, ориентированные под углами  $\pi/4$  и  $3\pi/4$ . В случае  $\theta = \pi$  при  $\varepsilon = 1$  формируется вырожденное состояние ЛГ-пучка, состоящее из суммы ЛГ-мод с противоположными знаками ТЗ, а при  $\varepsilon = 100$  формируется ЛГ-пучок с противоположным знаком ТЗ.

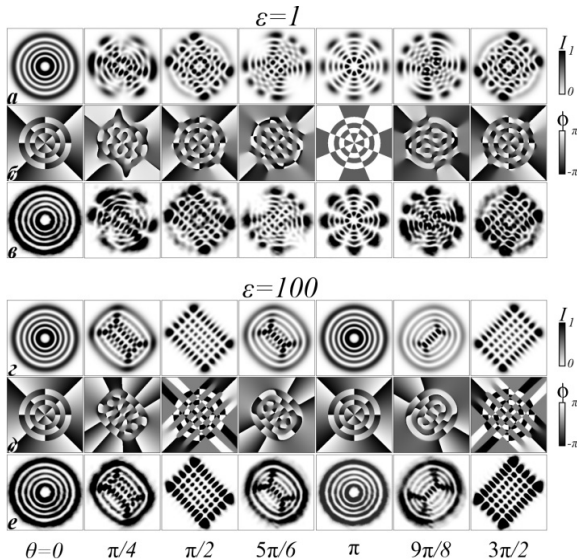


Рис. 1. Теоретические (а, г) и экспериментальные (в, е) картины интенсивности и фазы (б, д) сЛГ-пучка для двух амплитудных параметров  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon = 100$  и некоторых значений фазового параметра  $\theta$

Важно отметить, что каждый сЛГ-пучок остаётся структурно устойчивым при распространении при любых значениях параметров возмущения, поскольку каждая ЭГ-мода в разложении (1) получает одно и то же значение фазы Гуи, равное  $\Gamma = (2n + \ell + 1) \arctg(z/z_0)$ , где  $z_0$  – длина Рэлея.

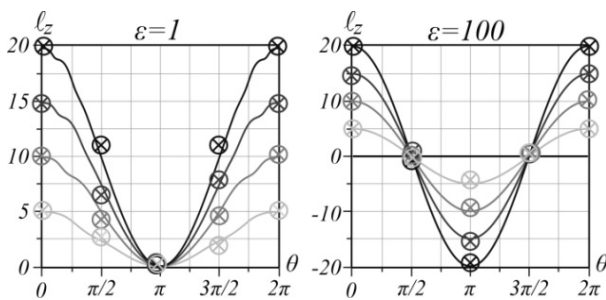


Рис. 2. ОУМ  $l_z(\theta)$  как функция фазового параметра  $\theta$  в двух семействах сЛГ-пучков,  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon = 100$ , при радиальном числе  $n = 0$  и азимутальных числах  $\ell = 5, 10, 15, 20$ . Непрерывные кривые – теория, перекрещенные кружочки – эксперимент

### 1.2. Быстрые осцилляции ОУМ

Для ответа на вопрос, поставленный в заголовке статьи, необходимо разложить комплексную амплитуду сЛГ-пучка (3) по базису ЛГ-мод. Как показано в **Приложении Б**:

$$s\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = \sum_{k=0}^{2n+\ell} c_k \text{LG}_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

$$c_k = \delta_{n,k} + (-1)^{\min} \varepsilon \frac{\ell^{n+k} e^{i(2n+\ell)\theta/2}}{2^{n+\ell} n!} 2^{\max} \min! \times \sin^{n-k} \left(\frac{1}{2}\theta\right) \cos^{n+\ell-k} \left(\frac{1}{2}\theta\right) P_k^{(n-k, n+\ell-k)}(\cos \theta), \quad (5)$$

где  $\min = \min(2n + \ell - k, k)$ ,  $\max = \max(2n + \ell - k, k)$  и  $\delta_{n,k}$  – символ Кронекера. Радиальное  $\nu = \min$  и азимутальное  $\mu = 2n + \ell - 2k$  числа связаны между собой полным числом мод  $2\nu + \mu + 1 = 2n + \ell + 1$  в сЛГ-пучке. Именно это приводит к перепутыванию радиального числа и ТЗ-мод. Такое перепутывание не изменяет свойства самих собственных ЛГ-мод, но радикально изменяет свойства всего сЛГ-пучка в целом. Коллективное влияние перепутывания следует искать в суммарных характеристиках сЛГ-пучков, к которым относятся ОУМ и общий ТЗ.

Амплитуды ЛГ-мод и их ТЗ в (4) позволяют записать выражение для ОУМ, предварительно отнормировав ЛГ-моды:

$$l_z = \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2n + \ell - 2k) |\bar{c}_k|^2 / \sum_{k=0}^{2n+\ell} |\bar{c}_k|^2, \quad (6)$$

где  $\bar{c}_k = c_k \cdot \|\text{LG}_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r})\|$  и нормировочные коэффициенты ЛГ-мод хорошо известны (см. (B5)).

Для сЛГ-пучка это общее выражение сводится к более простому виду (см. **Приложение Б**):

$$l_z = \ell \cdot \frac{1 + 2\varepsilon \cos(\frac{1}{2}(2n + \ell)\theta) \cos^\ell(\frac{1}{2}\theta) P_n^{(0,\ell)}(\cos \theta) + \varepsilon^2 \cos \theta}{1 + 2\varepsilon \cos(\frac{1}{2}(2n + \ell)\theta) \cos^\ell(\frac{1}{2}\theta) P_n^{(0,\ell)}(\cos \theta) + \varepsilon^2}. \quad (7)$$

Как простое следствие, отсюда легко получить асимптотическую формулу для ОУМ:  $l_z \simeq \ell \cos \theta$  при  $\varepsilon \gg 1$ . Кроме того, если радиальное число равно нулю ( $n = 0$ ), то ОУМ запишется в виде

$$l_z = \ell \cdot \frac{1 + 2\varepsilon \cos(\frac{1}{2}\ell\theta) \cos^\ell(\frac{1}{2}\theta) + \varepsilon^2 \cos \theta}{1 + 2\varepsilon \cos(\frac{1}{2}\ell\theta) \cos^\ell(\frac{1}{2}\theta) + \varepsilon^2}. \quad (8)$$

На рис. 2 показаны кривые  $l_z(\theta)$ , построенные по формуле (8), для случаев  $\varepsilon = 1$  и  $\varepsilon \gg 1$ . При  $\varepsilon = 1$  ОУМ обращается в ноль в одной точке  $\theta = \pi$ . Стоит только амплитудному параметру превысить единицу  $\varepsilon > 1$ , как особенность в нуле расщепляется на две точки, где ОУМ обращается в ноль в окрестности точки  $\theta = \pi$ . По мере увеличения амплитудного параметра точки нулей стремятся к  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ , в то время как ОУМ стремится к максимальному ОУМ с противоположным знаком ТЗ.

Когда радиальное число становится ненулевым,  $n \neq 0$ , то на графиках ОУМ возникают осцилляции, характер которых показан на рис. 3. Чем больше разность между радиальным  $n$  и азимутальным  $\ell$  числами, тем больше частота осцилляций.

Но для наших исследований важным является проблема связи числа нулей ОУМ и полного ТЗ

структурированного ЛГ-пучка, которую мы рассмотрим в следующем подпараграфе. Здесь же мы отметим, что положение нулей ОУМ удобно исследовать, приравняв нулю числитель выражения (7):

$$1 + 2\epsilon \cos\left(\frac{1}{2}(2n + \ell)\theta\right) \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) \times \times P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \epsilon^2 \cos\theta = 0. \tag{9}$$

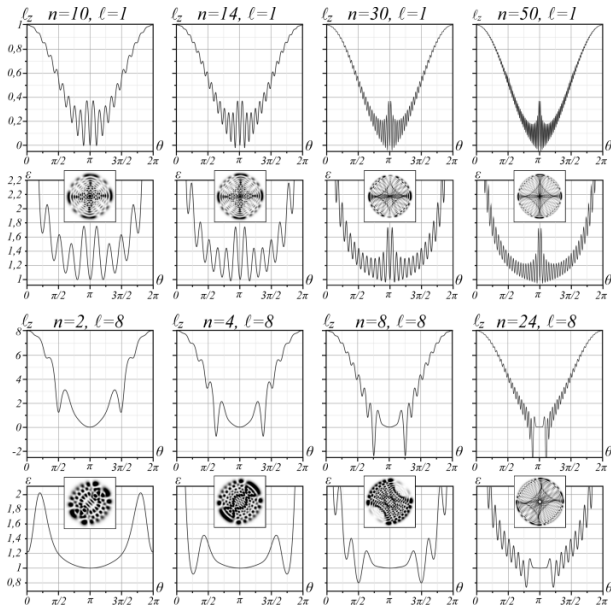


Рис. 3. Зависимость ОУМ  $L_z(\theta)$  от фазового параметра  $\theta$  (первая и третья строки сверху) и положение нулей ОУМ на плоскости параметров  $(\epsilon, \theta)$  (вторая и четвертая строки) для двух случаев исходного ТЗ  $\ell=1$  и  $\ell=8$ . На вставках приведены картины интенсивности для  $\theta=3\pi/4$

Осцилляции положения нулей ОУМ на плоскости параметров  $(\epsilon, \theta)$  показаны на рис. 3. Заметим, что нули ОУМ появляются в широкой области амплитудных параметров  $\epsilon$ . Но нас будет интересовать в основном возникновение нулей ОУМ при критическом условии  $\epsilon=1$ , когда амплитуды ЛГ- и ЭЛГ-мод одинаковы и ярко проявляются свойства сЛГ-пучков.

Интересная ситуация возникает в случае нулевого азимутального числа ( $\ell=0$ ) сЛГ-пучка при произвольном значении радиального числа  $n$ . ОУМ пучка обращается в ноль, но оптические вихри в структуре пучка не исчезают. Как видно из рис. 4а,в, пары вихрей с противоположными по знаку ТЗ, но равными «весами» группируются в симметричные топологические диполи. Спектры ЛГ-мод (4) становятся симметричными относительно состояния  $k=n$ . Такая картина наблюдается для всех  $\theta \neq \pi/2, \pi, 3\pi/2$ . В точках  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  оптические вихри с противоположными знаками ТЗ аннигилируют, образуя узор краевых дислокаций, как показано на рис. 4б,г. В точке  $\theta = \pi$  замкнутые фигурные дислокации вырождаются в семейство концентрических колец, соответствующих стандартной ЛГ-моды с  $n=4$  (или  $n=8$ ), так что в спектре ЛГ-мод присутствует только одна линия с

$k=4$  (или  $k=8$ ). Напомним, что радиальное число ЛГ-моды изменяется с индексом  $k$  как  $v = \min(2n + \ell - k, k)$ , а азимутальное число – в соответствии с выражением  $\mu = 2n + \ell - 2k$ .

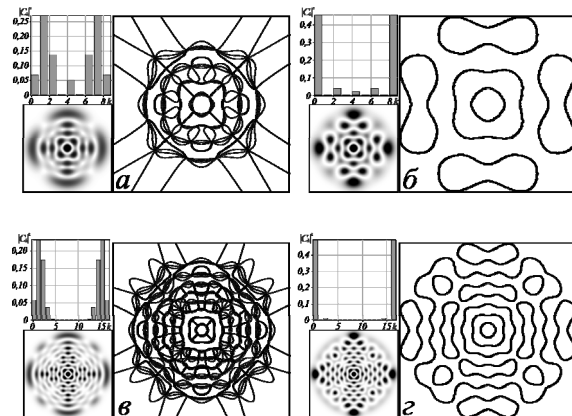


Рис. 4. Линии равной фазы для состояний  $(n, \ell)$ : (а)  $(4, 0)$ ,  $\theta = \pi/4$ , (б)  $(4, 0)$ ,  $\theta = \pi/2$ ; (в)  $(8, 0)$   $\theta = \pi/4$ , (г)  $(8, 0)$ ,  $\theta = \pi/2$ . На выносках представлены картины интенсивностей и спектры ЛГ-мод  $|c_k|^2$  для соответствующих состояний сЛГ-пучка,  $\epsilon = 1$

### 1.3. Топологические инварианты сЛГ-пучков и их измерение

Быстрые осцилляции ОУМ являются коллективным откликом множества ЛГ-мод в сЛГ-пучке на перемешивание в них радиальных и азимутальных чисел. При этом свойства собственных ЛГ-мод не изменяются, но радикально изменяют свойства структурированного пучка таким образом, что ОУМ может многократно менять знак при вариации фазового параметра. Возникает вопрос, какие физические характеристики сЛГ-пучка остаются неизменными на фоне быстрых осцилляций ОУМ? Как мы видели в предыдущем подпараграфе, обращение в ноль ОУМ при  $\epsilon=1$  и  $\theta=\pi$  сопровождается перестройкой картины фазы в виде сетки краевых дислокаций. Поэтому нас заинтересовал вопрос, какое перераспределение фаз ЛГ-мод возникает в случае дополнительных нулей ОУМ?

На рис. 5а,в представлены картины интенсивности и теоретические линии равной фазы (рис. 5б,г) сЛГ-пучка в случае обращения в ноль ОУМ в точке (рис. 5а, б)  $\epsilon=1, \theta=0,9\pi$  в состоянии  $n=1, \ell=2$  и для пучка (в, г) в состоянии  $n=8, \ell=4$  в точке  $\epsilon=1, \theta \approx 0,86\pi$ . Заметим их отличие от состояния пучка с нулевым ОУМ при  $\theta \neq \pi$  (см. рис. 1), где формируется вырожденная ЛГ-мода из  $\ell$  радиальных краевых дислокаций и  $n$  кольцевых дислокаций. В нашем же случае (рис. 5б, г) возникает система топологических диполей [15, 16] (пары вихрей с противоположными знаками ТЗ, покрывающих все поперечное сечение пучка). Даже небольшое изменение параметров пучка приводит к резкому изменению картин интенсивности и фазы.

Тем не менее, внутри этого процесса имеются скрытые инварианты, которые остаются неизменными

ми при быстрых осцилляциях ОУМ. В этом подпараграфе мы займёмся поиском таких инвариантов.

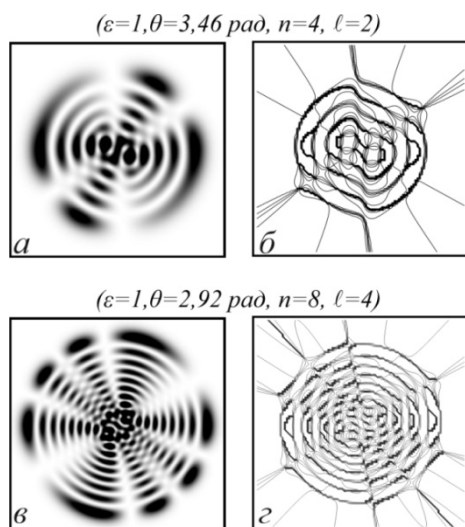


Рис. 5. Картины интенсивности (а, в) и контуры равной фазы (б, г) сЛГ-пучка в состояниях (а, б)  $n = 4, \ell = 2$  в точке  $\varepsilon = 1, \theta = 0,9\pi$  и (в, г)  $n = 8, \ell = 4$  в точке  $\varepsilon = 1, \theta = 0,86\pi$

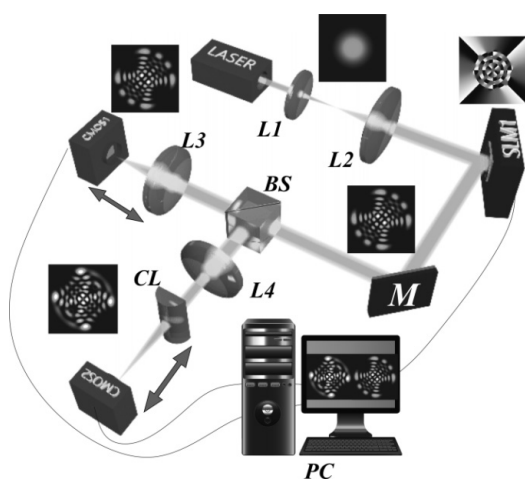


Рис. 6. Схема экспериментальной установки: LASER – He-Ne-лазер, SLM – пространственный модулятор света, L1-L4 – сферические линзы, CL – цилиндрическая линза, BS – делительный кубик (1:1±0,03); CMOS1, CMOS2 – фотодетекторы, M – зеркало, PC – компьютер

Прежде всего, необходимо выяснить, как можно измерить в эксперименте быстрые осцилляции ОУМ? Чтобы обнаружить осцилляции ОУМ, мы использовали метод моментов интенсивности, и процесс измерения спектра ЛГ-мод на экспериментальной установке, схема которой показана на рис. 6.

Метод моментов интенсивности, используемый для измерения спектра ЛГ-мод, подробно рассмотрен в статье [13]. Основной проблемой при измерении осцилляций ОУМ является ошибка измерений. Нам удалось снизить относительную ошибку измерений до 2,7% за счёт использования улучшенного типа пространственного модулятора света (Thorlabs EXULUS-4K1/M) и фотодетекторов типа Michrome

20. В качестве источника света использовался He-Ne-лазер типа Thorlabs HNL100RB с длиной волны  $\lambda = 0,633$  мкм.

В качестве примера на рис. 7 представлены 3D-спектры ЛГ-мод для  $\varepsilon = 1$  с  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = \pi$  при  $n = \ell = 4$  и  $n = \ell = 8$  соответственно. Выбранные состояния пучка соответствуют случаю, когда энергия в основном сосредоточена в двух модах: ЛГ- и гибридной ЭЛГ-моды. Если ЛГ-моды на рис. 7а,в для  $\theta = \pi/2$  соответствует только один яркий всплеск энергии, то энергия гибридной ЭЛГ-моды распределена среди 12 ЛГ-мод для пучка sLG<sub>4,4</sub> (рис. 7а), а для sLG<sub>8,8</sub> уже присутствует 24 ЛГ-моды, что следует из выражения (4). В случае  $\theta = \pi$  (рис. 7б,г) наблюдается только две стандартные ЛГ-моды с противоположными знаками ТЗ. Здесь важно подчеркнуть, что в формирование вторичных ЛГ-мод дают основной вклад кратные периодические возбуждения ЭГ-мод (см. выражения (1) и (2)). Причем радиальные  $n$  и азимутальные  $\ell$  числа сЛГ-пучка перепутываются между собой при его формировании. По нашему мнению, такой совокупный вклад возбуждённых ЛГ-мод и приводит к сложному виду спектров на рис. 7 даже для простых состояний пучка.

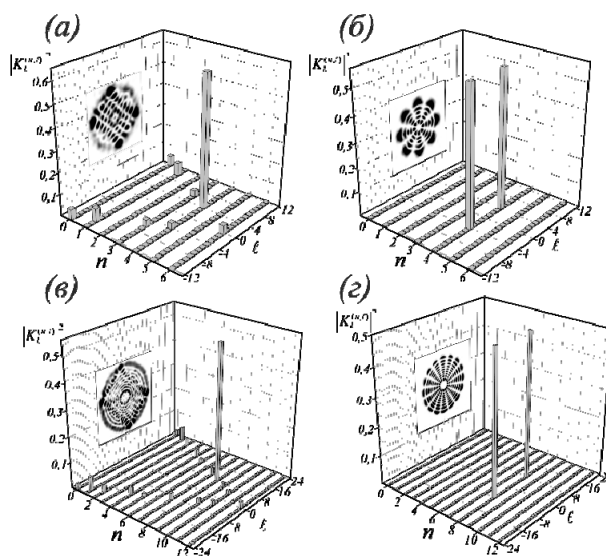


Рис. 7. Измеренные 3D-спектры ЛГ-мод  $|K_k^{(n,\ell)}|^2$  структурированных мод: (а, б) sLG<sub>4,4</sub> и (в, г) sLG<sub>8,8</sub> с (а, в)  $\theta = \pi/2$  и (б, г)  $\theta = \pi$  при  $\varepsilon = 1$

При измерении характера быстрых осцилляций ОУМ нужно учитывать систематические ошибки, вносимые оптическими узлами, и случайные ошибки измерений. Систематические ошибки следует ожидать из-за недостаточно высокой разрешающей способности SLM-модулятора и фотодетекторов. Случайные ошибки сопровождают процесс измерений.

Для оценки предельных условий разрешающей способности модулятора пучка и фотодетектора достаточно сравнить предельные возможности этих устройств с минимальными расстояниями между ну-

лями интенсивности сЛГ-пучка. В нашей экспериментальной установке использовался SLM EXULUS-4K1/M модулятор с диагональю рабочего элемента 20,21 мм и размером зерна 3,7 мкм, а также фотодетекторы CMOS Michrome 20 с диагональю рабочего элемента 15,86 мм и размером одного зерна 2,4 мкм. С другой стороны, расстояние между соседними нулями вдоль оси  $x$  ЭГ-моды можно найти из асимптотического представления четного многочлена Эрмита [17]:  $H_{2n}(x/w) \sim \cos(\sqrt{4n+1}x/w)$ , где  $w$  – радиус перетяжки пучка,  $n > 50$ . Тогда расстояние между соседними нулями интенсивности будет  $\Delta x \approx w\pi/\sqrt{4n+1}$ . Отсюда видно, что даже для ЭГ-пучка с  $n > 100$  расстояние между соседними нулями интенсивности будет значительно больше, чем размер зерна, как на модуляторе, так и на фотодетекторе, при условии, что пучок полностью покрывает минимальную площадь рабочих элементов. Заметим, что в наших экспериментах нет сЛГ-пучков с максимальным числом  $n = 100$ .

Тем не менее, метод измерения ОУМ накладывает некоторые ограничения на экспериментальное определение положения нулей максимумов и минимумов функции  $\ell_z(\theta)$ . Рассмотрим этот вопрос подробнее. На рис. 8 представлены графики зависимости ОУМ  $\ell_z$  от фазового параметра  $\theta$ .

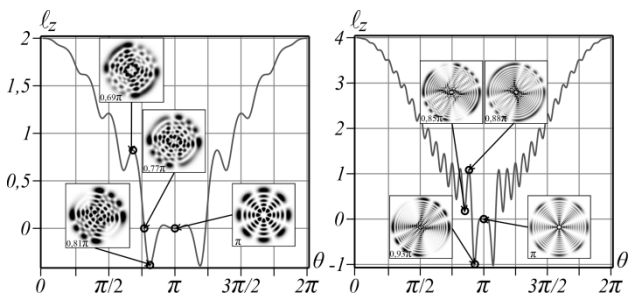


Рис. 8. Осцилляции ОУМ  $\ell_z(\theta)$  и их измерение в сЛГ-пучке в состояниях (а)  $n = 4, \ell = 2$  и (б)  $n = 14, \ell = 4$ . На выносках картины интенсивности в критических точках: (а) для максимума  $\theta = 0,69\pi$ , для нулей  $\theta = 0,77\pi$  и  $\theta = \pi$ , минимума  $\theta = 0,81\pi$ ; (б) максимума  $\theta = 0,88\pi$ , минимумов  $\theta = 0,85\pi$  и  $\theta = 0,93\pi$ , нуля  $\theta = \pi$

Картины интенсивности, расположенные на выносках рис. 8, соответствуют состояниям пучка в максимумах, минимумах и нулях ОУМ. Именно анализ этих распределений интенсивности позволяет определить амплитуды ЛГ-мод в составе сЛГ-пучка. Измерение амплитуд ЛГ-мод позволяет определить ОУМ по формуле (6). Важно отметить, что ошибка измерений ОУМ пропорциональна сумме произведений азимутального числа  $\pm(2n + \ell - 2k)$  на среднюю погрешность измерения квадрата амплитуды ЛГ-моды (2,7%) в данной точке кривой  $\ell_z(\theta)$ . Анализ состояния сЛГ с  $n = 4, \ell = 2$  на рис. 8а показывает, что положения максимума ( $\theta = 0,69\pi$ ), первого нуля ( $\theta = 0,77\pi$ ) и минимума ( $\theta = 0,81\pi$ ) ОУМ вполне различимы. Однако измерения ОУМ в минимуме

( $\theta = 0,81\pi$ ) и во втором нуле ОУМ ( $\theta = \pi$ ) лежат внутри ошибки измерений. В то же время ошибка измерений позволяет хорошо различать все особые точки ОУМ структурированного пучка в состоянии  $n = 14, \ell = 4$  на рис. 8б. По-видимому, чем больше разность радиального и азимутального чисел, тем с большей точностью можно воспроизвести зависимость  $\ell_z(\theta)$  в эксперименте. Однако по мере увеличения азимутального числа  $\ell$  амплитуды осцилляций уменьшаются (см. третью и четвертую строки на рис. 3) и в эксперименте эти осцилляции неразличимы за исключением узкой области вблизи  $\theta = \pi$ .

В то же время на фоне таких быстрых осцилляций ОУМ можно найти физическую характеристику, которая остаётся неизменной в широком интервале изменения параметров  $\epsilon$  и  $\theta$ . Действительно, это следует из условия постоянства числа мод,  $2n + \ell + 1$ , в сЛГ-пучке. Обратим внимание на полный ТЗ структурированного пучка. Согласно недавней работе [18] общий ТЗ структурированного пучка, состоящего из ЛГ-мод, задаётся азимутальным числом ЛГ-моды с большим модулем амплитуды. Если же модули амплитуд мод с противоположными знаками ТЗ одинаковы, то сравниваются амплитуды с предыдущими азимутальными числами. Вырожденное состояние структурированного пучка возникает при условии равенства амплитуд всех мод с положительными и отрицательными знаками азимутальных чисел. Теперь мы должны ответить на два вопроса: 1) следует ли изменение знака общего ТЗ структурированного пучка за его ОУМ? 2) насколько точно мы можем различить в эксперименте изменение знака общего ТЗ?

Ответ на первый вопрос даёт рис. 9, на котором изображены контуры квадратов амплитуд  $|\bar{c}_k(\theta)|^2$  с максимальными ТЗ и противоположными знаками. Смена знаков ТЗ происходит при  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$  для любых состояний  $(n, \ell)$  сЛГ-пучка, какие-либо осцилляции амплитуд отсутствуют. Чтобы ответить на второй вопрос, необходимо определить минимальный интервал фазовых параметров  $\Delta\theta$ , на краях которого можно надёжно разделить в эксперименте квадраты амплитуд ЛГ-мод с положительными и отрицательными ТЗ, то есть определить условия, при которых разность измеренных квадратов амплитуд  $|\bar{c}_k(\theta)|^2$  будет превышать ошибку эксперимента. Заметим, что амплитудам  $|\bar{c}_k(\theta)|^2$  с максимальными ТЗ соответствуют индексы  $k = 0$  и  $k = 2n + \ell$ , при этом радиальное число равно нулю  $\min(2n + \ell - k, k) = 0$ . Топологически нейтральное состояние наступает при  $k = (2n + \ell)/2$ , в эксперименте оно наблюдается только для чётных  $\ell$ . Примеры надёжного измерения интервалов  $\Delta\theta$ , на краях которых различие квадратов амплитуд превышает ошибку измерений, приведены на рис. 9.

Так, для sLG<sub>15,5</sub> получается интервал фазовых параметров  $\theta \in (0,44\pi; 0,56\pi)$ , где в эксперименте знак ТЗ остаётся неопределённым; для состояния sLG<sub>15,15</sub> получается интервал  $\theta \in (0,45\pi; 0,53\pi)$ . На выносках к

рисункам приведены картины интенсивности на краях соответствующих интервалов фазовых параметров. В остальной области фазовых параметров общий ТЗ структурированного пучка не изменяется, принимая одинаковые значения с точностью до знака. Таким образом, модуль общего ТЗ структурированного ЛГ-пучка является инвариантом процесса двухпараметрического возбуждения мод сЛГ-пучка.

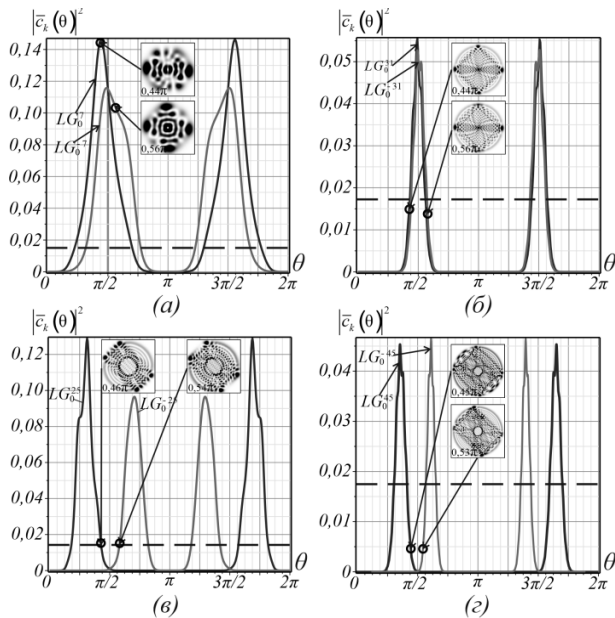


Рис. 9. Контуры квадратов амплитуд ЛГ-мод  $|\bar{c}_k(\theta)|^2$  с максимальными положительными и отрицательными ТЗ для начальных состояний сЛГ-пучков: (а)  $n = 3, \ell = 1$ ;

(б)  $n = 15, \ell = 1$ ; (в)  $n = 5, \ell = 15$  (г)  $n = 15, \ell = 15$ .

На вставках приведены картины интенсивности сЛГ-пучка на границах области надежного измерения ЛГ-мод с противоположными знаками ТЗ: (а)  $\theta = 0,44\pi$  и  $\theta = 0,56\pi$ ;

(б)  $\theta = 0,44\pi$  и  $\theta = 0,56\pi$ ; (в)  $\theta = 0,46\pi$  и  $\theta = 0,54\pi$ ;

(г)  $\theta = 0,45\pi$  и  $\theta = 0,53\pi$

### Выводы

Рассмотрено двухпараметрическое возбуждение ЭГ-мод в структурированных ЛГ-пучках, при котором амплитудный параметр  $\epsilon$  меняет амплитуды массива ЭГ-мод, а фазовый параметр  $\theta$  вносит кратную начальную фазу в каждую ЭГ-моду. Теоретически и экспериментально обнаружено, что в общем случае сЛГ-пучок при кратных гармонических возбуждениях ЭГ-мод является суммой двух сингулярных пучков – стандартного ЛГ-пучка и гибридного ЭЛГ-пучка. При больших значениях амплитудного параметра структурированный ЛГ-пучок превращается в гибридный ЭЛГ-пучок, ось которого повернута на угол  $\pi/4$ . Вариация фазового параметра  $\theta$  вызывает быстрые осцилляции ОУМ при отличном от нуля радиальном числе  $n$ , которые сглаживаются при  $n=0$  или при больших значениях амплитудного параметра  $\epsilon$ . Быстрые осцилляции ОУМ связаны с перепутыванием ра-

диальных и азимутальных чисел в сЛГ-пучке. Такое перепутывание не меняет свойств собственных ЛГ-мод, но радикально изменяет свойства сЛГ-пучка. Мы нашли, что структурированный ЛГ-пучок с радиальным числом  $n$  и азимутальным числом  $\ell$  содержит  $2n + \ell + 1$  мод в интервале азимутальных чисел  $(-(2n + \ell), 2n + \ell)$ . Также на основе компьютерного моделирования было обнаружено, что ТЗ структурированного пучка может принимать значения  $2n + \ell$  или  $-(2n + \ell)$  при изменении фазового параметра  $\theta$ . Если амплитудный параметр меньше или равен единице, а радиальное число равно нулю, то ТЗ структурированного пучка остается неизменным в интервале  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ , за исключением единственной точки  $\theta = \pi$ . Если же амплитудный параметр очень большой ( $\epsilon \gg 1$ ), то ТЗ меняет знак в точках  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ . В общем случае ненулевых значений радиальных чисел общий ТЗ структурированного ЛГ-пучка остаётся неизменным за исключением узких интервалов параметров  $\theta$ , где знак ТЗ остаётся неопределённым.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ в части «Двухпараметрическое возбуждение ЭГ-мод в структурированном ЛГ-пучке» (проект № 20-37-90066), в части «Комплексная амплитуда структурированного ЛГ-пучка» (проект № 20-37-90068), в части «Быстрые осцилляции ОУМ» (проект № 19-29-01233), а также гранта Государственного Совета Республики Крым в части «Топологические инварианты сЛГ-пучков и их измерение».

### References

- [1] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum and the transformation of Gauss-Laguerre modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [2] Berry MV. Paraxial beams of spinning light. *Proc SPIE* 1998; 3487: 6-11. DOI: 10.1117/12.317704.
- [3] Van Enk SJ, Nienhuis G. Commutation rules and eigenvalues of spin and orbital angular momentum of radiation fields. *J Mod Opt* 1994; 41(5): 963-977. DOI: 10.1080/09500349414550911.
- [4] Fadeyeva TA, Rubass AF, Aleksandrov RV, Volyar AV. Does the optical angular momentum change smoothly in fractional-charged vortex beams? *J Opt Soc Am B* 2014; 31(4): 798-805. DOI: 10.1364/JOSAB.31.000798.
- [5] Kotlyar VV, Kovalev AA. Vortex-free laser beam with an orbital angular momentum. *Computer Optics* 2017; 41(4): 573-576. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-4-573-576.
- [6] Izdebskaya YV, Shvedov VG, Volyar AV. Symmetric array of off-axis singular beams: spiral beams and their critical points. *J Opt Soc Am A* 2008; 25(1): 171-181. DOI: 10.1364/JOSAA.25.000171.
- [7] Aksenov VP, Dudorov VV, Filimonov GA, Kolosov VV, Venediktov VYu. Vortex beams with zero orbital angular momentum and non-zero topological charge. *Opt Laser Technol* 2018; 104: 159-163. DOI: 10.1016/j.optlastec.2018.02.022.
- [8] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. *Phys Rev A* 2016; 93(6): 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.

[9] Najafi-Nezhad F, Azizian-Kalanderagh Y, Akhlaghi EA, Amiri P, Porfirev A, Khonina S, Najarbashi G. Superposition of shifted Laguerre–Gaussian beams. *Optik* 2021; 227: 165147. DOI: 10.1016/j.ijleo.2020.165147.

[10] Forbes A, de Oliveira M, Dennis MR. Structured light. *Nat Photonics* 2021; 15: 253-262. DOI: 10.1038/s41566-021-00780-4.

[11] Shen Y, Yang X, Naidoo D, Fu X, Forbes A. Structured ray-wave vector vortex beams in multiple degrees of freedom from a laser. *Optica* 2020; 7(7): 820-831. DOI: 10.1364/OPTICA.382994.

[12] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of paraxial propagation-invariant laser beams. *J Opt Soc Am A* 2022; 39(6): 1061-1065. DOI: 10.1364/JOSAA.457660.

[13] Volyar A, Abramochkin E, Egorov Yu, Bretsko M, Akimova Y. Fine structure of perturbed Laguerre–Gaussian beams: Hermite–Gaussian mode spectra and topological charge. *Appl Opt* 2020; 59(25): 7680-7687. DOI: 10.1364/AO.396557.

[14] Abramochkin EG, Volostnikov VG. The modern optics of the Gaussian beams [In Russian]. Moscow: “Fizmatlit” Publisher; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.

[15] Berry MV. Wave dislocations in non-paraxial Gaussian beams. *J Mod Opt* 1998; 45(9): 1845-1858. DOI: 10.1080/09500349808231706.

[16] Volyar AV, Shvedov VG, Fadeeva TA. The structure of a nonparaxial Gaussian beam near the focus: II. Optical vortices. *Optics and Spectroscopy* 2001; 90: 93-100. DOI: 10.1134/1.1343551.

[17] Szegő G. Orthogonal polynomials [In Russian]. Moscow: “Fizmatgiz” Publisher; 1962.

[18] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt Express* 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.

### Приложение А

Покажем, как представление сЛГ-пучка в виде конечной суммы (1) привести к формуле (3).

Если подставить в (1) возмущающие коэффициенты (2) и свернуть те слагаемые конечной суммы, которые относятся к единице, в обычную ЛГ-моду, то легко видеть, что достаточно доказать равенство

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2ie^{i\theta})^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \text{HG}_{2n+\ell-k, k}(\mathbf{r}) = (-i)^{n+\ell} 2^{n+\ell/2} \exp\left\{i(2n+\ell)\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \times \text{HLG}_{n, n+\ell}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \left| \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right.\right). \quad (\text{A1})$$

Предварительно заметим, что если в этой сумме вместо ЭГ-мод подставить степенные множители  $x^{2n+\ell-k} y^k$ , то сумма может быть найдена в замкнутом виде, если рассматривать её как ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2ie^{i\theta})^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) x^{2n+\ell-k} y^k &= x^{2n+\ell} \sum_{k=0}^{2n+\ell} \partial_t^k \left\{ (1-t)^{n+\ell} (1+t)^n \right\} \Big|_{t=0} \frac{[-ie^{i\theta} y/x]^k}{k!} = \\ &= x^{2n+\ell} (1 - [-ie^{i\theta} y/x])^{n+\ell} (1 + [-ie^{i\theta} y/x])^n = (x + ie^{i\theta} y)^{n+\ell} (x - ie^{i\theta} y)^n. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

Здесь в процессе вычислений мы использовали дифференциальное представление полиномов Якоби (формулу Родрига).

Теперь запишем интегральное представление ЭЛГ-мод (см. равенство (4.9) в [14]):

$$\text{HLG}_{n, m}(\mathbf{r}|\alpha) = \frac{(-2i)^{n+m}}{\pi} e^{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + 2\sqrt{2}i[x\xi + y\eta]) \times (\xi \cos \alpha + i\eta \sin \alpha)^n (\xi \sin \alpha - i\eta \cos \alpha)^m d\xi d\eta, \quad (\text{A3})$$

которое при  $\alpha = 0$  сводится к хорошо известному интегральному представлению ЭГ-мод:

$$\text{HLG}_{n, m}(\mathbf{r}|0) = (-i)^m \text{HG}_{n, m}(\mathbf{r}) = \frac{2^{n+m} (-i)^{n+2m}}{\pi} \times e^{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + 2\sqrt{2}i[x\xi + y\eta]) \xi^n \eta^m d\xi d\eta. \quad (\text{A4})$$

Возвращаемся к вычислению  $S$  и заменяем ЭГ-моды  $\text{HG}_{2n+\ell-k, k}(\mathbf{r})$  с помощью (A4):

$$\begin{aligned} S &= \frac{(-2i)^{2n+\ell}}{\pi} e^{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + 2\sqrt{2}i[x\xi + y\eta]) \times \sum_{k=0}^{2n+\ell} (2ie^{i\theta})^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \xi^{2n+\ell-k} \eta^k d\xi d\eta = \\ &= \frac{(-2i)^{2n+\ell}}{\pi} e^{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\xi^2 - \eta^2 + 2\sqrt{2}i[x\xi + y\eta]) \times (\xi + ie^{i\theta}\eta)^{n+\ell} (\xi - ie^{i\theta}\eta)^n d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

Сравнивая эту формулу и формулу (A3), можно заметить, что при  $\theta = 0, \pm\pi$  мы получаем ЛГ-моды, а при  $\theta = \pm\pi/2$  – ЭГ-моды, повернутые на угол  $\pi/4$ . Если в интеграле (A5) повернуть переменные  $(\xi, \eta)$  на такой же угол,  $\xi + i\eta = (u + iv)e^{i\pi/4}$ , то скобки  $(\xi + ie^{i\theta}\eta)$  и  $(\xi - ie^{i\theta}\eta)$  можно привести к виду соответствующих скобок в (A3). Пусть  $e^{2i\alpha} = -ie^{i\theta}$ , т.е.  $2\alpha = \theta - \pi/2$ . Тогда



$$\begin{aligned} \xi - ie^{i\theta}\eta &= \frac{u-v}{\sqrt{2}} + e^{2i\alpha} \frac{u+v}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e^{i\alpha}(u \cos \alpha + iv \sin \alpha), \\ \xi + ie^{i\theta}\eta &= \frac{u-v}{\sqrt{2}} - e^{2i\alpha} \frac{u+v}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}ie^{i\alpha}(u \sin \alpha - iv \cos \alpha) \end{aligned} \tag{A6}$$

и

$$\begin{aligned} S &= \frac{(-2i)^{2n+\ell}}{\pi} (\sqrt{2}e^{i\alpha})^n (-\sqrt{2}ie^{i\alpha})^{n+\ell} \times e^{r^2} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-u^2 - v^2 + 2\sqrt{2}i \left[ \frac{x+y}{\sqrt{2}}u + \frac{y-x}{\sqrt{2}}v \right]\right) \times \\ &\times (u \cos \alpha + iv \sin \alpha)^n (u \sin \alpha - iv \cos \alpha)^{n+\ell} dudv = (\sqrt{2}e^{i\alpha})^{2n+\ell} (-i)^{n+\ell} \text{HLG}_{n,n+\ell} \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \middle| \alpha \right), \end{aligned} \tag{A7}$$

что совпадает с (A1).

Чтобы разложить структурированный ЛГ-пучок в ряд по обычным ЛГ-модам и получить формулу (4), достаточно разложить только ЭЛГ-моду в правой части формулы (3). (Очевидно, что первое слагаемое в правой части (3) даст вклад  $\delta_{n,k}$  в коэффициент  $c_k$ .) Воспользуемся для этого более общим результатом – формулой разложения ЭЛГ-моды с одним параметром по базису ЭЛГ-мод с другим параметром (см. равенство (4.20) в [14]):

$$\text{HLG}_{n,m}(\mathbf{R}_\gamma \mathbf{r} | \theta) = e^{i(n-m)\phi} \times \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k e^{i(n+m-2k)\omega} c_k^{(n,m)}(\beta) \text{HLG}_{n+m-k,k}(\mathbf{r} | \alpha), \tag{A8}$$

где  $\mathbf{R}_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$  – матрица вращения,

$$c_k^{(n,m)}(\beta) = \cos^{n-k} \beta \sin^{m-k} \beta P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\beta) \tag{A9}$$

и параметры  $(\beta, \phi, \omega)$  при заданных  $(\alpha, \gamma, \theta)$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} e^{i(\omega+\phi)} \cos \beta = \cos \gamma \cos(\theta - \alpha) + i \sin \gamma \sin(\theta + \alpha), \\ e^{i(\omega-\phi)} \sin \beta = \cos \gamma \sin(\theta - \alpha) - i \sin \gamma \cos(\theta + \alpha), \end{cases} \tag{A10}$$

причём достаточно найти только *одно* (любое!) решение этой системы. Отметим также, что коэффициент  $c_k^{(n,m)}(\beta)$  можно представить в виде

$$c_k^{(n,m)}(\beta) = \llbracket t^k \rrbracket \{ (\cos \beta + t \sin \beta)^n (\sin \beta - t \cos \beta)^m \}, \tag{A11}$$

т.е. это коэффициент при  $t^k$  в разложении произведения двух биномов, что иногда позволяет находить его быстро и легко. Например,

$$c_k^{(n,m)}(0) = (-1)^m \delta_{m,k}, \quad c_{2k+1}^{(n,n)}(\pi/4) = 0. \tag{A12}$$

Нам нужен случай, когда  $\gamma = -\pi/4$ ,  $\theta = \theta/2 - \pi/4$  и  $\alpha = \pi/4$ . Тогда  $\beta = (\theta - \pi)/2$ ,  $\phi = 0$ ,  $\omega = -\pi/4$  – решение системы (A10) и равенство (A8) примет вид

$$\begin{aligned} \text{HLG}_{n,m}(\mathbf{R}_{-\pi/4} \mathbf{r} | \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi) &= \\ &= (-1)^m e^{-i(n+m)\pi/4} \sum_{k=0}^{n+m} t^k \sin^{n-k}(\frac{1}{2}\theta) \cos^{m-k}(\frac{1}{2}\theta) \times \\ &\times P_k^{(n-k,m-k)}(\cos \theta) \text{HLG}_{n+m-k,k}(\mathbf{r} | \pi/4). \end{aligned} \tag{A13}$$

Теперь, чтобы получить коэффициенты (5), осталось сделать замену индекса  $m := n + \ell$  и перейти в правой части (A13) от ЭЛГ-мод к стандартным ЛГ-модам по формуле

$$\text{HLG}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4) = (-1)^{\min} 2^{\max} \min! \cdot \text{LG}_{\min,n-m}(\mathbf{r}), \tag{A14}$$

где  $\min = \min(n, m)$  и  $\max = \max(n, m)$ .

### Приложение Б

Известно [1], что ОУМ двумерного светового поля  $f(\mathbf{r})$  задаётся формулой  $\ell z[f] = L/E$ , где

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r},$$

$$L = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Im}\{f^*(\mathbf{r})\partial_\varphi f(\mathbf{r})\} d^2\mathbf{r}. \tag{B1}$$

Вычислим оба интеграла для структурированного ЛГ-пучка, используя далее формулу (3) в кратком варианте записи:

$$s\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \theta) = \text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}) + A \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha). \tag{B2}$$

Сначала найдём  $E$ :

$$E = \int_{\mathbb{R}^2} |\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}) + A \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha)|^2 d^2\mathbf{r} = E_1 + E_2 + E_3, \tag{B3}$$

где

$$E_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r} = \|\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})\|^2,$$

$$E_2 = \int_{\mathbb{R}^2} |A \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha)|^2 d^2\mathbf{r} = |A|^2 \cdot \|\text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{r}|\alpha)\|^2, \tag{B4}$$

$$E_3 = 2 \text{Re} \left\{ A \int_{\mathbb{R}^2} \text{LG}_{n,\ell}^*(\mathbf{r}) \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha) d^2\mathbf{r} \right\}.$$

Интегралы  $E_1$  и  $E_2$  вычисляются сразу, поскольку нормировочные множители ЛГ- и ЭЛГ-мод хорошо известны:

$$\|\text{LG}_{n,\pm\ell}(\mathbf{r})\|^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n+\ell)!}{2^\ell n!},$$

$$\|\text{HLG}_{n,m}(\mathbf{r}|\alpha)\|^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 2^{n+m} n! m!. \tag{B5}$$

Для вычисления  $E_3$  воспользуемся формулой (A13) и заметим, что в силу свойства ортогональности ЛГ-мод только член  $k = n$  даёт ненулевой вклад в интеграл. Поэтому

$$E = \|\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})\|^2 \left\{ 1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}[2n+\ell]\theta\right) \times \cos^\ell\left(\frac{1}{2}\theta\right) P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \varepsilon^2 \right\}. \tag{B6}$$

Нахождение  $L$  проделаем аналогичным образом, разбивая интеграл на три части и вычисляя их по отдельности:

$$L = \text{Im} \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \text{LG}_{n,\ell}^*(\mathbf{r}) + A^* \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}^*(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha) \right\} \times \partial_\varphi \left\{ \text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}) + A \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha) \right\} d^2\mathbf{r} = L_1 + L_2 + L_3, \tag{B7}$$

где

$$L_1 = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Im}\{ \text{LG}_{n,\ell}^*(\mathbf{r}) \partial_\varphi \text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}) \} d^2\mathbf{r} = \ell_z [\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})] \cdot \|\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})\|^2 = \ell \cdot E_1,$$

$$L_2 = |A|^2 \int_{\mathbb{R}^2} \text{Im}\{ \text{HLG}_{n,n+\ell}^*(\mathbf{r}|\alpha) \partial_\varphi \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{r}|\alpha) \} d^2\mathbf{r} = \ell_z [\text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{r}|\alpha)] \cdot \|\text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{r}|\alpha)\|^2 = \ell \cos\theta \cdot E_2, \tag{B8}$$

$$L_3 = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Im}\{ A \cdot \text{LG}_{n,\ell}^*(\mathbf{r}) \partial_\varphi \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha) + A^* \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}^*(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha) \partial_\varphi \text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}) \} d^2\mathbf{r} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \text{Im}\{ 2i\ell A^* \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}^*(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha) \text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r}) \} d^2\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^2} \text{Re}\{ 2\ell A \cdot \text{HLG}_{n,n+\ell}(\mathbf{R}_{-\pi/4}\mathbf{r}|\alpha) \text{LG}_{n,\ell}^*(\mathbf{r}) \} d^2\mathbf{r} = \ell \cdot E_3.$$

Интегралы  $L_1$  и  $L_2$  сводятся к ОУМ соответственно ЛГ- и ЭЛГ-мод. При вычислении  $L_2$  была использована формула на стр.94 в [14]:

$$\ell_z [\text{HLG}_{n,m}(\mathbf{r}|\alpha)] = (n-m) \sin 2\alpha. \tag{B9}$$

При вычислении  $L_3$  мы проинтегрировали по частям ( $\int f \partial_{\phi} g \cdot d^2 \mathbf{r} = - \int g \partial_{\phi} f \cdot d^2 \mathbf{r}$ ) для переноса действия  $\partial_{\phi}$  с ЭЛГ-моды на ЛГ-моду, а затем использовали свойство  $\partial_{\phi}[\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})] = i\ell \cdot \text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})$ . В итоге,

$$L = \|\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})\|^2 \left\{ 1 + 2\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}[2n + \ell]\theta\right) \times \cos^{\ell}\left(\frac{1}{2}\theta\right) P_n^{(0,\ell)}(\cos\theta) + \varepsilon^2 \cos\theta \right\}, \quad (\text{B10})$$

что приводит к формуле (7).

#### *Сведения об авторах*

**Воляр Александр Владимирович** – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Абрамочкин Евгений Григорьевич** – доктор физико-математических наук (2006), ведущий научный сотрудник Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. Научные интересы связаны с комплексным анализом, теорией специальных функций и уравнениями математической физики. E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Брецько Михаил Владимирович** – аспирант четвертого курса кафедры общей физики Физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. E-mail: [mihailbretcko4@gmail.com](mailto:mihailbretcko4@gmail.com).

**Акимова Яна Евгеньевна** – аспирантка четвертого курса кафедры общей физики Физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. E-mail: [aklmovalyana@yandex.ru](mailto:aklmovalyana@yandex.ru).

**Егоров Юрий Александрович** – кандидат физико-математических наук (2005), доцент кафедры общей физики (2006). Сфера научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика, оптика анизотропных сред. E-mail: [yuriyegorov@cfuv.ru](mailto:yuriyegorov@cfuv.ru).

ГРНТИ: 29.31.15

*Поступила в редакцию 1 июня 2022 г. Окончательный вариант – 12 июля 2022 г.*

---

# Can the radial number of vortex modes control the orbital angular momentum?

A.V. Volyar<sup>1</sup>, E.G. Abramochkin<sup>2</sup>, M.V. Bretsko<sup>1</sup>, Ya.E. Akimova<sup>1</sup>, Yu.A. Egorov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,  
295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, Academician Vernadsky 4;

<sup>2</sup>Lebedev Physical Institute, 443034, Samara, Russia, Novo-Sadovaya 221

## Abstract

In general, a standard Laguerre-Gauss (LG) beam, whose state is given by two quantum numbers  $(n, \ell)$ : the radial number  $n$  and the azimuthal number  $\ell$  (or the topological charge (TC) of the vortex carried by the LG beam), is unstable with respect to weak perturbations. This is not difficult to see if we decompose the complex amplitude of the LG beam in terms of Hermite-Gauss modes (HG), with the total number of HG modes being equal to  $N = 2n + \ell + 1$ . If we now slightly change the amplitudes and phases of each HG mode, then the structure of the LG beam radically changes. Such a combination of modes is called a structured LG beam (sLG), which can carry large additional arrays of information embedded in the sLG beam by encoding the amplitudes and phases of the HG modes (excitation of modes). But as soon as a perturbation is inserted into the LG beam, its orbital angular momentum (OAM) can change dramatically in such a way that the value of the OAM changes in the interval  $(-\ell, \ell)$ , and the total TC – in the interval  $(-2n - \ell, 2n + \ell)$ . At  $n = 0$ , the OAM changes smoothly in the interval  $(-\ell, \ell)$ , however it is worth "turning on" the radial number  $n$ , as the OAM oscillations occur. The number of minima (maxima) of the oscillations is equal to the radial number  $n$  in the interval  $\theta = (0, \pi)$  and  $\theta = (\pi, 2\pi)$ , with their amplitude nonlinearly depending on the difference  $\ell - n$ , except for the point  $\theta = \pi$ , where the structured beam becomes degenerate. If  $\ell = 0$ , then the OAM is zero, so that in the sLG beam structure, we observe either a symmetrical array of vortices with opposite-sign TCs or a pattern of edge dislocations, the number of which is equal to the radial number  $n$ . We also found that, despite the fast oscillations of the OAM, the absolute value of the total TC of the sLG beam does not change with variation of both the amplitude  $\varepsilon$  and phase  $\theta$  parameters, but depends solely on the initial state  $(n, \ell)$  of the LG beam and modulo  $(2n + \ell)$ .

**Keywords:** structural stability, topological charge, orbital angular momentum, vortex spectrum.

**Citation:** Volyar AV, Abramochkin EG, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Can the radial number of vortex modes control the orbital angular momentum? *Computer Optics* 2022; 46(6): 853-863. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1169.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Foundation for Basic Research under grants No. 20-37-90066 (Section "Two-parametric excitation of HG modes in a structured LG beam"), No. 20-37-90068 (Section "Complex amplitude of a structured LG beam"), and No. 19-29-01233 (Section "Fast OAM oscillations"), as well as a grant from the State Council of the Republic of Crimea (Section "Topological invariants of sLG sheaves and their measurement")

---

## Authors' information

**Alexander Vladimirovich Volyar** (b. 1949) graduated from Simferopol State University (1972). After graduation he is its employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993 he is a professor. Since 1999 he is a head of the General Physics department. His research spans various fields of optics and laser physics.

E-mail: [volyar.singular.optics@gmail.com](mailto:volyar.singular.optics@gmail.com).

**Eugeny Grigor'evich Abramochkin** (b. 1962) graduated from Kuibyshev State University (1984), majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor's Degree in Physics in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests include complex analysis, special functions, and mathematical physics equations.

E-mail: [ega@fian.smr.ru](mailto:ega@fian.smr.ru).

**Mikhail Vladimirovich Bretsko** (b. 1994). Since 2012, a student of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the fourth-year postgraduate student of the General Physics department, Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Scope of scientific interests – singular optics, processing of graphic images, and programming. E-mail: [mihailbretsko4@gmail.com](mailto:mihailbretsko4@gmail.com).

---

---

**Yana Evgenievna Akimova** (b. 1994). Since 2012, a student of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the fourth-year postgraduate student of the General Physics department, Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Scope of scientific interests – singular optics, diffraction optics. E-mail: [akimova.yana@yandex.ru](mailto:akimova.yana@yandex.ru).

**Yuriy Alexandrovich Egorov** (b. 1975). A graduate of Taurida National University (2001). Received the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the field of Optics and Laser Physics at Taurida National V.I. Vernadsky University (Crimean Federal University is now) in 2005. Since 2006, he has been an Associate Professor at the Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. Scope of scientific interests its singular optics and diffraction optics. E-mail: [yuriyegorov@cfuv.ru](mailto:yuriyegorov@cfuv.ru).

---

*Received June 1, 2022. The final version – July 12, 2022.*

---