

## ОБРАТНЫЙ ПОТОК ЭНЕРГИИ ВБЛИЗИ ОПТИЧЕСКОЙ ОСИ В ОБЛАСТИ ОСТРОГО ФОКУСА ОПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ С КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.Г. Налимов<sup>1,2</sup>, С.С. Стафеев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

### Аннотация

С помощью формул Ричардса–Вольфа для дифракционной линзы показано, что при острой фокусировке произвольного оптического вихря с топологическим зарядом 2 и левой круговой поляризацией в плоскости фокуса на оптической оси имеет место обратный поток световой энергии (осевая проекция вектора Пойнтинга отрицательная). Такой же результат мы получили численно с помощью строгого расчёта FDTD-методом дифракции плоской волны с левой круговой поляризацией на вихревой зонной пластинке с топологическим зарядом 2 и числовой апертурой около 1. Причём величина обратного потока сравнима с прямым потоком энергии. Мы также показали, что обратный поток энергии в рассматриваемом случае имеет место на всей оптической оси, но максимальное по модулю значение имеет в плоскости фокуса и быстро спадает при удалении от него. Длина отрезка вдоль оптической оси, на которой значение модуля обратного потока спадает в два раза (глубина обратного потока), почти совпадает с глубиной фокуса, а поперечный кружок, в котором поток энергии обратный, примерно совпадает с диском Эйри.

**Ключевые слова:** вектор Пойнтинга, формулы Ричардса–Вольфа, FDTD-метод, оптический вихрь, «тракторный пучок».

**Цитирование:** Котляр, В.В. Обратный поток энергии вблизи оптической оси в области острого фокуса оптического вихря с круговой поляризацией / В.В. Котляр, А.Г. Налимов, С.С. Стафеев // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 3. – С. 392-400. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-3-392-400.

### Введение

В 1959 году в своей классической работе Richards и Wolf [1] показали, что при фокусировке плоской волны с линейной поляризацией с помощью апланатической системы в плоскости фокуса в области у основания основного лепестка интенсивности имеется область, в которой поток световой энергии направлен в обратную сторону по отношению к направлению распространения падающей плоской волны. В этой области продольная проекция вектора Пойнтинга имеет небольшое отрицательное значение, примерно 1% от максимального потока в прямом направлении. Аналогичный результат был получен ранее В.С. Игнатовским [2] еще в 1920 году. Однако значения этому эффекту не придавали из-за его небольшой величины. Работа [1] послужила толчком для широкого фронта теоретических и численных исследований по острой фокусировке лазерных пучков, например, [3–10]. В [3] исследовалась острая фокусировка оптических вихрей с топологическими зарядами 1–3 и линейной поляризацией. Показано, что при больших числовых апертурах световой эллипс в фокусе вытягивается в направлении, перпендикулярном направлению линейной поляризации. В [4] численно и экспериментально показано, что при фокусировке оптического вихря с топологическим зарядом 1 и левой круговой поляризацией в фокусе формируется круглое световое пятно. Острая фокусировка света с круговой поляризацией рассматривается также в [5]. В [6] исследуется фокусировка мод Лагерра–Гаусса (ЛГ) с произвольными номерами  $(n, m)$  и эллиптической поляризацией. Показано, что в фокусе формируются эллиптические световые кольца. В [7] исследуется острая фокусировка аномальных мод ЛГ с

номерами  $(n + m/2, m)$ , а в [8] моделируется острая фокусировка радиально поляризованных пучков Лагерра–Гаусса–Бесселя. В [9] аналогично исследуется фокусировка оптических вихрей с разными топологическими зарядами и неоднородной поляризацией (радиальной и азимутальной). В [10] моделируется поперечный сдвиг фокусного пятна при острой фокусировке оптических вихрей, внедрённых в Гауссов пучок и смещённых с оптической оси.

Но во всех этих работах не исследуется поведение в фокусе вектора Пойнтинга. Первая работа, в которой теоретически было показано наличие отрицательного значения продольной составляющей вектора Пойнтинга на оптической оси, была посвящена линейной комбинации двух пучков Бесселя с ТЕ- и ТМ-поляризациями [11]. Однако как сформировать такой вихревой пучок Бесселя с произвольным топологическим зарядом  $m$ , у которого имеются все три компонента электрического вектора  $E_r, E_\phi, E_z$  в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$ , авторы не обсуждают в [11]. Мы нашли только одну работу [12], в которой рассмотрена практически реализуемая ситуация (фокусировка с помощью апланатической системы) и теоретически и численно показано, что при фокусировке моды Лагерра–Гаусса порядка  $(0, m) = (0, 2)$  с левой круговой поляризацией ( $\sigma = -1$ ) на оптической оси в фокусе у продольной проекции вектора Пойнтинга имеются отрицательные значения. В данной работе мы обобщаем [12] на случай произвольного оптического вихря с топологическим зарядом  $m = 2$ . Известны также статьи про «оптический трактор» [13–21], в которых исследуется взаимодействие светового поля с микрочастицами, приводящее к тому, что сила, действующая со стороны поля на частицу, заставляет её дви-

гаться против направления распространения освещающего её пучка. Такую силу называют негативной оптической силой [13]. Если говорить просто, то такая ситуация возникает, когда частица рассеивает больше света вперёд, чем отражает назад, если нет градиентных сил. Поэтому надо различать две эти ситуации: когда поток световой энергии локально направлен против общего потока энергии в пучке и когда сила светового давления заставляет микрочастицу двигаться против освещающего её света и по направлению к источнику света.

В данной работе рассматривается только первая ситуация. С помощью формализма Ричардса–Вольфа для идеальной сферической линзы доказано, что при острой фокусировке оптического вихря с топологическим зарядом 2 и круговой поляризацией с противоположенным направлением вращения (левой) в плоскости фокуса на оптической оси (и вблизи неё) осевая проекция вектора Пойнтинга принимает отрицательное значение. Из всего этого следует, что в данной области локально поток световой энергии направлен против общего потока энергии в сходящемся вихревом пучке. Ранее наличие обратного потока энергии на оптической оси в фокусе было обнаружено только для пучков Лагерра–Гаусса [12]. Здесь мы обобщили этот результат на произвольный оптический вихрь. Заметим, что недавно авторы численно показали наличие обратного потока на оптической оси в фокусе вихревой металлинзы [22].

### 1. Теоретическое основание

Рассмотрим в формализме Ричардса–Вольфа [1] фокусировку оптического вихря с топологическим зарядом  $m = 2$  и левой круговой поляризацией с помощью апланатической системы. Для электрического поля с круговой поляризацией  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + i\sigma E_y \mathbf{e}_y$ , где  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  – единичные вектора вдоль декартовых координат, будем считать, что при  $\sigma = 1$  – правая поляризация, а при  $\sigma = -1$  – левая поляризация, следуя [6]. Хотя, например, в [12] наоборот: при  $\sigma = 1$  – левая поляризация, а при  $\sigma = -1$  – правая поляризация. Для оптического вихря с топологическим зарядом  $m$  и произвольной функцией аподизации зрачка (действительная функция  $A_m(\theta)$ )

$$A_m(\theta, \varphi) = A_m(\theta) \exp(im\varphi), \tag{1}$$

где  $(\theta, \varphi)$  – углы, задающие точку на сфере, запишем проекции электрического вектора  $\mathbf{E}$  вблизи фокуса в апланатической системе в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ , следуя [6]:

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi, z) &= -i^{m+1} \left( I_{0,m} e^{im\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_+ I_{2,m+2} e^{i(m+2)\varphi} + \gamma_- I_{2,m-2} e^{i(m-2)\varphi} \right), \\ E_y(r, \varphi, z) &= i^m \left( \sigma I_{0,m} e^{im\varphi} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_+ I_{2,m+2} e^{i(m+2)\varphi} + \gamma_- I_{2,m-2} e^{i(m-2)\varphi} \right), \\ E_z(r, \varphi, z) &= -2i^m \left( \gamma_+ I_{1,m+1} e^{i(m+1)\varphi} - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_- I_{1,m-1} e^{i(m-1)\varphi} \right), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{где } I_{0,m} &= B \int_0^a \sin \theta \cos^{1/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} \times \\ &\quad \times (1 + \cos \theta) J_m(x) d\theta, \\ I_{1,m\pm 1} &= B \int_0^a \sin^2 \theta \cos^{1/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_{m\pm 1}(x) d\theta, \\ I_{2,m\pm 2} &= B \int_0^a \sin \theta \cos^{1/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} \times \\ &\quad \times (1 - \cos \theta) J_{m\pm 2}(x) d\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $B = kf/2$ ,  $\alpha = \arcsin(NA)$ ,  $x = kr \sin \theta$ ,  $\gamma_{\pm} = (1 \pm \sigma)/2$ ,  $J_\nu(x)$  – функция Бесселя,  $k$  – волновое число света,  $f$  – фокусное расстояние апланатической системы с числовой апертурой  $NA$ . Для оптического вихря с топологическим зарядом  $m = 2$  вместо (2) получим:

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi, z) &= i \left( I_{0,2} e^{i2\varphi} + \gamma_+ I_{2,4} e^{i4\varphi} + \gamma_- I_{2,0} \right), \\ E_y(r, \varphi, z) &= - \left( \sigma I_{0,2} e^{i2\varphi} - \gamma_+ I_{2,4} e^{i4\varphi} + \gamma_- I_{2,0} \right), \\ E_z(r, \varphi, z) &= 2 \left( \gamma_+ I_{1,3} e^{i3\varphi} - \gamma_- I_{1,1} e^{i\varphi} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) при  $m = 0$  (нет вихря) и  $\sigma = 0$  (линейная поляризация) следуют выражения для компонент электрического вектора в области фокуса, полученных в [1]. Из (4) получим выражение для интенсивности электрического поля (плотность мощности) в плоскости фокуса ( $z = 0$ ):

$$I = 2 \left( I_{0,2}^2 + \gamma_+ I_{2,4}^2 + \gamma_- I_{2,0}^2 + 2\gamma_+ I_{1,3}^2 + 2\gamma_- I_{1,1}^2 \right). \tag{5}$$

Заметим, что все интегралы в (3) при  $z = 0$  являются действительными функциями. Из (5) следует, что распределение интенсивности в фокусе не зависит от полярного угла  $\varphi$ , то есть является центрально симметричным (в виде кольца). В центре фокусного пятна ( $r = 0$ ) на оптической оси интенсивность вихревого пучка с правой поляризацией будет равна нулю  $I_+ = 2(I_{0,2}^2 + I_{2,4}^2 + 2I_{1,3}^2) = 0$ , а интенсивность на оси для пучка с левой поляризацией будет отлична от нуля  $I_- = 2(I_{0,2}^2 + I_{2,0}^2 + 2I_{1,1}^2) \neq 0$  (локальный минимум). Это следует из того, что только у интенсивности  $I_-$  есть слагаемое  $I_{2,0}$ , у которого под интегралом в (3) стоит функция Бесселя нулевого порядка, которая отлична от нуля на оптической оси:  $J_0(x=0) = 1$ . Все другие слагаемые в (5) на оптической оси равны нулю.

Далее с помощью уравнения Максвелла для монохроматического поля с циклической частотой  $\omega$ :  $i\omega \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{E}$  и с помощью формул (2), (3) можно найти поперечные компоненты вектора магнитного поля (продольная компонента пока не нужна для дальнейшего):

$$\begin{aligned} H_x &= \gamma_+ e^{i4\varphi} \left( \frac{6}{kr} I_{1,3} - \bar{I}_{2,4} \right) + e^{i2\varphi} \left[ \sigma \bar{I}_{0,2} - \right. \\ &\quad \left. - 2i \sin \varphi (\cos \varphi + i\sigma \sin \varphi) \bar{I}_{1,2} \right] + \gamma_- \left( \bar{I}_{2,0} - \frac{2}{kr} I_{1,1} \right), \\ H_y &= i\gamma_+ e^{i4\varphi} \left( -\frac{6}{kr} I_{1,3} + \bar{I}_{2,4} \right) + ie^{i2\varphi} \left[ \bar{I}_{0,2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos \varphi (\cos \varphi + i\sigma \sin \varphi) \bar{I}_{1,2} \right] + i\gamma_- \left( \bar{I}_{2,0} - \frac{2}{kr} I_{1,1} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0,2} &= B \int_0^a \sin \theta \cos^{3/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} (1 + \cos \theta) J_2(x) d\theta, \\ \bar{I}_{1,2} &= B \int_0^a \sin^3 \theta \cos^{1/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} J_2(x) d\theta, \\ \bar{I}_{2,4} &= B \int_0^a \sin \theta \cos^{3/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} (1 - \cos \theta) J_4(x) d\theta, \\ \bar{I}_{2,0} &= B \int_0^a \sin \theta \cos^{3/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} (1 - \cos \theta) J_0(x) d\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

С помощью (2), (3), (6) и (7) найдем осевую проекцию вектора Пойнтинга [1]  $\mathbf{S} = c \operatorname{Re}([\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]) / 8\pi$ :

$$S_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) \tag{8}$$

с точностью до константы  $c/8\pi$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\operatorname{Re}(\dots)$  – действительная часть числа, и в плоскости фокуса ( $z=0$ ):

$$\begin{aligned} S_z &= 2I_{0,2}(\bar{I}_{0,2} + \bar{I}_{1,2}) + 2\gamma_+ I_{2,4} \left( \bar{I}_{2,4} + \bar{I}_{1,2} - \frac{6}{kr} I_{1,3} \right) + \\ &+ 2\gamma_- I_{2,0} \left( \bar{I}_{2,0} + \bar{I}_{1,2} - \frac{2}{kr} I_{1,1} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует выражение для левой поляризации при  $\sigma = -1$ :

$$\begin{aligned} S_z^- &= 2I_{0,2}(\bar{I}_{0,2} + \bar{I}_{1,2}) + 2I_{2,0} \bar{I}_{1,2} + \\ &+ 2I_{2,0} \left( \bar{I}_{2,0} - \frac{2}{kr} I_{1,1} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что поток энергии  $S_z(r, z=0)$  в плоскости фокуса обладает центральной симметрией (так как не зависит от полярного угла  $\varphi$ ). Из (10) можно найти поток энергии в плоскости фокуса только вдоль оптической оси ( $r=0$ ). При этом в (10) отличными от нуля будет только третье слагаемое  $2I_{2,0}(\bar{I}_{2,0} - 2I_{1,1}/kr) \neq 0$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} S_z^-(r=0, z=0) &= \\ &= -2B^2 \left( \int_0^a \sin \theta \cos^{1/2} \theta A_2(\theta) (1 - \cos \theta) d\theta \right)^2 \leq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение (11) является основным результатом работы и показывает, что при любой действительной функции аподизации зрачка  $A_2(\theta)$  и при любой числовой апертуре ( $\alpha = \arcsin(NA)$ ) при идеальной фокусировке сферической линзой оптического вихря с топологическим зарядом 2 и левой круговой поляризацией в плоскости фокуса в центре светового кольца на оптической оси поток энергии будет распространяться в обратном направлении по отношению к направлению распространения освещающего пучка. Для простого случая  $A_2(\theta) = 1$  – постоянная засветка зрачка, и при максимальной апертуре  $a = \pi/2$  ( $NA = 1$ ) интеграл в (11) можно вычислить. Тогда вместо (11) получим:

$$S_z^-(r=0, z=0) = -2B^2 \left( \frac{4}{15} \right)^2 = -1,4 \left( \frac{f}{\lambda} \right)^2. \tag{12}$$

Можно показать, что при любом другом положительном топологическом заряде  $m \neq 2$  и при любой однородной поляризации  $\sigma = 0, \pm 1$  на оптической оси в плоскости фокуса не возникает обратного потока энергии. Он локально возникает в других местах фокальной плоскости, и его величина по модулю меньше, чем прямой поток энергии. Например, в [1] показано, что обратный поток энергии возникает при фокусировке плоской волны с линейной поляризацией в плоскости фокуса вблизи первого темного кольца и составляет по модулю всего 1% от максимальной величины прямого потока энергии. Можно показать, что резульат, аналогичный (10), получится при  $m = -2$  и  $\sigma = 1$ .

Покажем далее, что обратный поток (как и прямой) в плоскости фокуса вращается вокруг оптической оси. Для этого запишем продольную проекцию вектора напряжённости магнитного поля ( $m = 2, \sigma = \pm 1$ ):

$$\begin{aligned} H_z &= -i \left[ \gamma_+ \left( \bar{I}_{2,3} + \frac{4}{kr} I_{0,2} \right) e^{i3\varphi} - \right. \\ &\left. - \bar{I}_{0,1} (\sigma \cos \varphi + i \sin \varphi) e^{i2\varphi} + \gamma_- \bar{I}_{2,1} e^{i\varphi} \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

В (13) обозначены следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0,1} &= B \int_0^a \sin^2 \theta \cos^{1/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} \times \\ &\times (1 + \cos \theta) J_1(x) d\theta, \\ \bar{I}_{2,3} &= B \int_0^a \sin^2 \theta \cos^{1/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} \times \\ &\times (1 - \cos \theta) J_3(x) d\theta, \\ \bar{I}_{2,1} &= B \int_0^a \sin^2 \theta \cos^{1/2} \theta A_m(\theta) e^{ikz \cos \theta} \times \\ &\times (1 - \cos \theta) J_1(x) d\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

Из (13) следует выражение для продольной проекции магнитного поля с левой круговой поляризацией:

$$H_{z-} = -i(\bar{I}_{2,1} + \bar{I}_{0,1}) e^{i\varphi}. \tag{15}$$

С помощью (15), а также (4) и (6) можно найти поперечные составляющие вектора Пойнтинга  $\mathbf{S} = c \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] / 8\pi$  в плоскости фокуса:

$$\begin{aligned} S_x &= -Q(r) \sin \varphi, \quad S_y = Q(r) \cos \varphi, \\ Q(r) &= (I_{0,2} + I_{2,0})(\bar{I}_{2,1} + \bar{I}_{0,1}) + \\ &+ 2I_{1,1} \left( \bar{I}_{0,2} - \bar{I}_{2,0} + \frac{2}{kr} I_{1,1} \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Из (16) следует, что поток энергии в плоскости фокуса вращается либо против, либо по часовой стрелке, в зависимости от знака функции  $Q(r)$ . Это не противоречит тому, что на самой оптической оси ( $r=0$ ) обратный поток отличен от нуля (11), так как поперечные составляющие обратного потока (16) на оптической оси равны нулю.

**2. Моделирование острой фокусировки с помощью формул Ричардса–Вольфа**

В этом параграфе на конкретных численных примерах показано наличие обратного потока в фокусе дифракционной линзы не только на оптической оси, но и вблизи неё. А также показано, что величина обратного потока сравнима с величиной прямого потока энергии. В отличие от теоретического распределения в параграфе 1, здесь выбраны  $m = -2$  и  $\sigma = 1$ .

На рис. 1 показаны распределение интенсивности (а) и осевая проекция вектора Пойнтинга (б) в плоскости фокуса дифракционной линзы ( $NA = 0,95$ ) при фокусировке оптического вихря с  $m = -2$  и  $\sigma = 1$ . Функция аподизации дифракционной линзы имеет вид  $A_m(\theta) = \cos^{-3/2}(\theta)$  [23]. Расчёт производился с помощью формул Ричардса–Вольфа [1].

На рис. 1 видно, что обратный поток в плоскости фокуса возникает не только на оптической оси (в центре картины), но в некотором круге, радиус которого можно оценить из рис. 2.

На рис. 2 показаны радиальные сечения двумерных распределений интенсивности (а) и осевой проекции

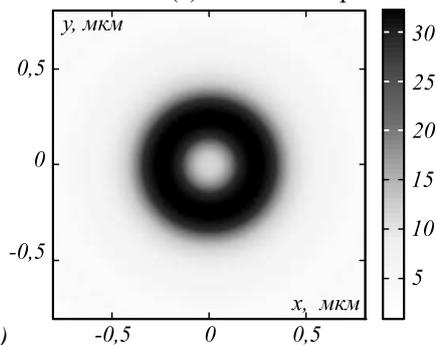


Рис. 1. Интенсивность (негатив) в фокальной плоскости (а) и проекция вектора Пойнтинга (негатив) на ось z в фокальной плоскости (б)

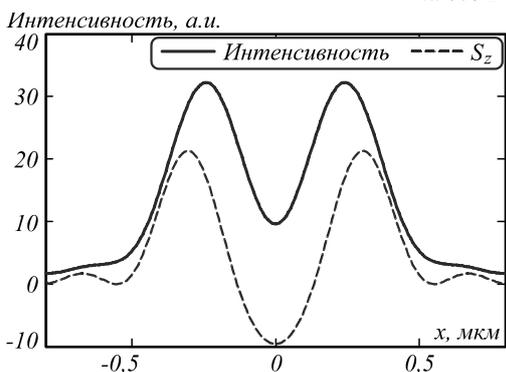


Рис. 2. Сечения вдоль оси x распределений интенсивности (сплошная кривая) и осевой проекции вектора Пойнтинга (пунктирная кривая) в плоскости фокуса (рис. 1)

Из рис. 4а видно, что обратный поток на оптической оси возникает только при  $m = -2$  ( $\sigma = 1$ ). А из рис. 4б видно, что значение обратного потока на оптической оси становится сравнимо с прямым потоком (то есть становится заметным) при  $NA > 0,9$ .

В дополнение к продольному распределению вектора Пойнтинга (рис. 3) на рис. 5 показано распределение интенсивности и направление вектора Пойнтинга

вектора Пойнтинга (б), показанных на рис. 1. Из рис. 2 видно, что обратный поток имеет место в центральном «светлом» круге распределения интенсивности на рис. 1, и радиус круга обратного потока примерно равен расстоянию от центра до первого радиуса, на котором интенсивность спадает в 2 раза. Этот кружок, в котором поток энергии обратный, примерно равен диску Эйри. Из рис. 2 также видно, что максимальное значение обратного потока всего в 2 раза меньше, чем максимальное значение прямого потока (в относительных единицах). На рис. 3 показано распределение интенсивности и направление вектора Пойнтинга (стрелками) в области фокуса (в плоскости YZ) при фокусировке оптического вихря с топологическим зарядом  $m = -2$  и правой круговой поляризацией  $\sigma = 1$  дифракционной линзой с числовой апертурой  $NA = 0,95$ .

Из рис. 3 видно, что вдоль оси z вектор Пойнтинга направлен в сторону, противоположную направлению распространения пучка. На рис. 4 показано поведение проекции  $S_z$  при варьировании параметров: топологического заряда (рис. 4а) и числовой апертуры апланатической линзы (рис. 4б).

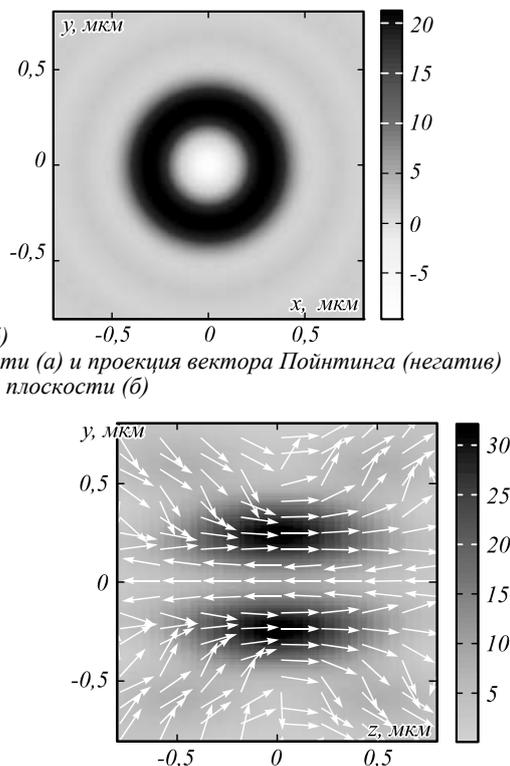


Рис. 3. Распределение интенсивности и направление вектора Пойнтинга (стрелки) в плоскости XY при фокусировке оптического вихря с  $m = -2$  и правой круговой поляризацией  $\sigma = 1$  дифракционной линзой с числовой апертурой  $NA = 0,95$

(стрелками) в области фокуса (в плоскости XY) при фокусировке оптического вихря с топологическим зарядом  $m = -2$  и правой круговой поляризацией  $\sigma = 1$  дифракционной линзой с числовой апертурой  $NA = 0,95$ .

Из рис. 5 видно, что вращение вектора Пойнтинга в плоскости фокуса меняет свое направление – в центре кольца интенсивности вращение происходит по часовой стрелке, а на периферии – против часовой стрелки.

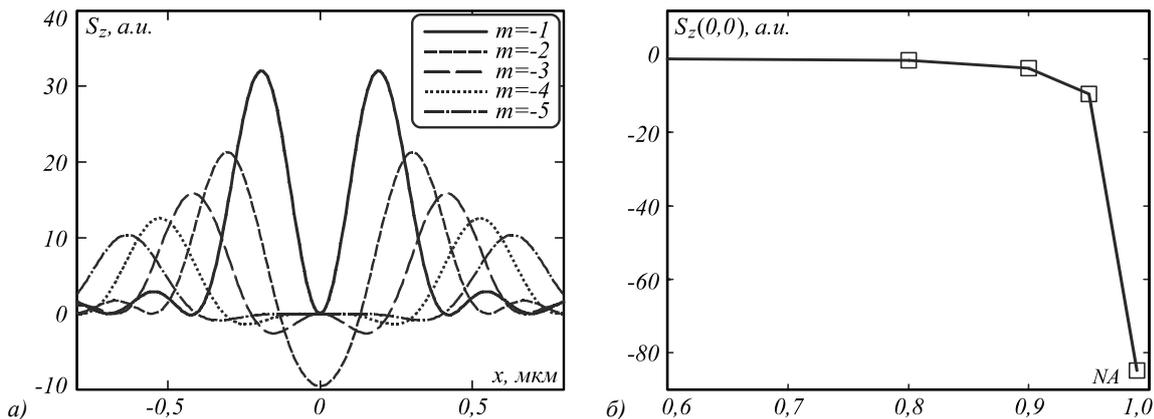


Рис. 4. Распределение продольной составляющей вектора Пойнтинга  $S_z$  в фокусе апланатической системы при фокусировке оптических вихрей с разными топологическими зарядами  $m = -1, -2, \dots, -5$  и круговой правой поляризацией  $\sigma = 1$  ( $NA = 0,95$ ) (а) и зависимость  $S_z$  только на оптической оси от величины числовой апертуры  $NA$  при  $m = -2$  и  $\sigma = 1$

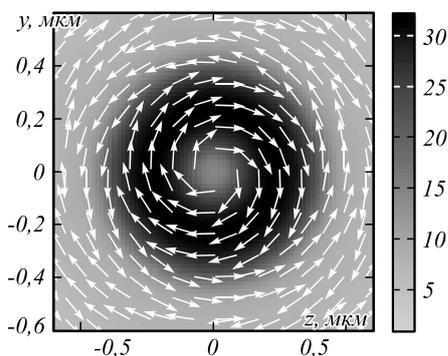


Рис. 5. Распределение интенсивности и направление вектора Пойнтинга (стрелки) в плоскости  $XY$  ( $z = 0$ ) при фокусировке оптического вихря с  $m = -2$  и правой круговой поляризацией  $\sigma = 1$  дифракционной линзой с числовой апертурой  $NA = 0,95$

### 3. Моделирование острой фокусировки с помощью FDTD-метода

Ниже приведены результаты моделирования прохождения плоской волны с левой круговой поляризацией ( $\sigma = -1$ ) через бинарную вихревую зонную пластинку (ВЗП) с топологическим зарядом  $m = 2$ . Падающее световое поле (длина волны  $\lambda = 532$  нм) ограничено круглой диафрагмой с диаметром 10 мкм. ВЗП рассчитывалась для фокусного расстояния, равного длине волны  $f = \lambda = 532$  нм, в материале с показателем преломления  $n = 1,5$  и высотой рельефа 0,532 мкм. Дифракция света на ВЗП рассчитывалась с помощью

численного решения уравнений Максвелла FDTD-методом, реализованным в программе Fullwave.

Из рис. 6 видно, что интенсивность и поток энергии не обладают круговой симметрией, так как сама ВЗП (рис. 6а) не обладает такой симметрией. Из рис. 6в видно, что вблизи оптической оси и вблизи поверхности вихревой микролинзы имеет место обратный поток световой энергии ( $S_z < 0$ ).

На рис. 7 показаны сечения интенсивности  $I$  и проекции вектора Пойнтинга  $S_z$  вдоль оси  $x$  на расстоянии  $z = 532$  нм (а) и вдоль оптической оси  $z$  при  $x = y = 0$  (б). Из рис. 7а видно, что максимальное значение обратного потока почти в 2 раза больше, чем максимальное значение прямого потока (в относительных единицах). А на рис. 7б видно, что максимальное значение обратного потока вдоль оптической оси имеет место в плоскости фокуса ( $z = 532$  нм) и быстро спадает при удалении от этой плоскости. Причём длина отрезка вдоль оптической оси, на котором обратный поток спадает в 2 раза, почти совпадает с глубиной фокуса, которая определяется по полупаданию интенсивности и равна  $DOF \approx 2\lambda$ .

Числовая апертура моделируемой методом FDTD ВЗП (рис. 6а) равна  $NA = 0,9944$ . Для сравнения на рис. 8 показаны результаты фокусировки оптического вихря с помощью зонной пластинки с такой же числовой апертурой, вычисленные с помощью формул Ричардса–Вольфа.

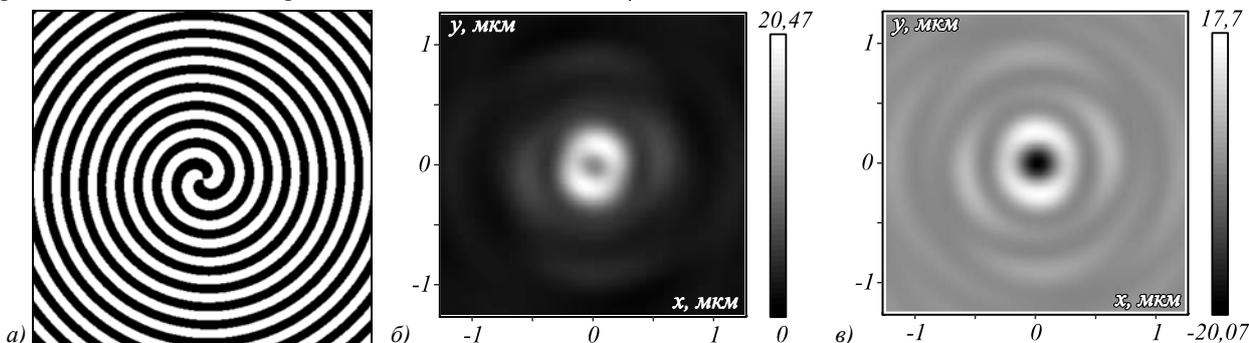


Рис. 6. Бинарная амплитудная маска ВЗП с  $m = 2$  размером  $10 \times 10$  мкм (а), распределение интенсивности на расстоянии  $z = 532$  нм (расчётный фокус) (б) и распределение  $S_z$  на том же расстоянии (в)

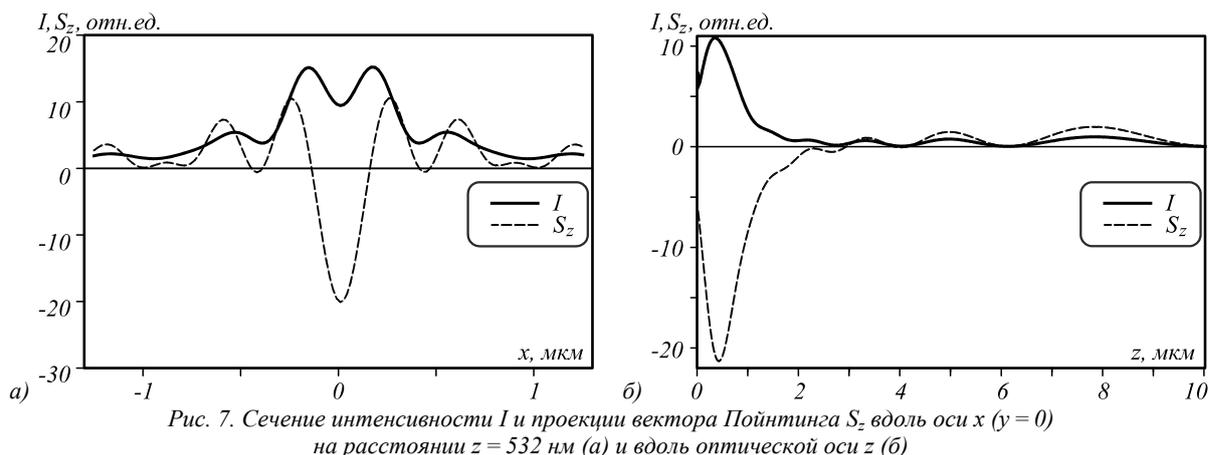


Рис. 7. Сечение интенсивности  $I$  и проекции вектора Пойнтинга  $S_z$  вдоль оси  $x$  ( $y = 0$ ) на расстоянии  $z = 532$  нм (а) и вдоль оптической оси  $z$  (б)

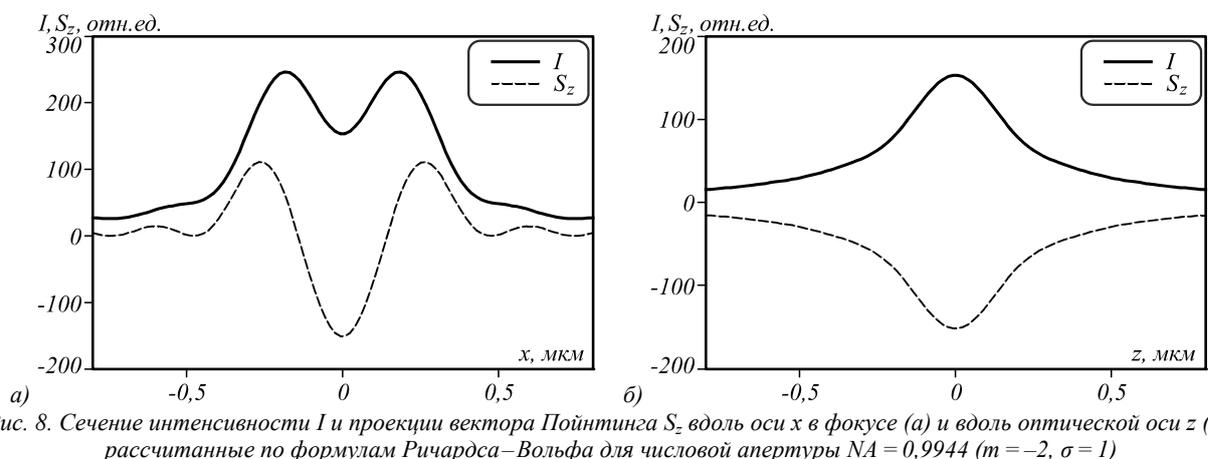


Рис. 8. Сечение интенсивности  $I$  и проекции вектора Пойнтинга  $S_z$  вдоль оси  $x$  в фокусе (а) и вдоль оптической оси  $z$  (б), рассчитанные по формулам Ричардса–Вольфа для числовой апертуры  $NA = 0,9944$  ( $m = -2$ ,  $\sigma = 1$ )

### Заключение

В работе получены следующие результаты. Впервые, по мнению авторов, в рамках формализма Ричардса–Вольфа доказано, что при острой фокусировке апланатической системой оптического вихря с топологическим зарядом 2, левой круговой поляризацией и произвольной действительной функцией аподизации зрачка в плоскости фокуса на оптической оси имеет место обратный поток световой энергии (осевая проекция вектора Пойнтинга отрицательна). Аналогичный результат получается при фокусировке оптического вихря с топологическим зарядом  $-2$  и правой круговой поляризацией. Численно на основе моделирования с помощью формул Ричардса–Вольфа показано, что максимальная величина обратного потока вдоль оптической оси может быть сравнима с максимальной величиной прямого потока энергии. Также показано, что отрицательные значения вектора Пойнтинга в плоскости фокуса лежат внутри круга с центром на оптической оси и радиусом, равным расстоянию от центра фокусного кольца интенсивности до точки, в которой интенсивность падает почти в 2 раза. Можно сказать, что диаметр круга в плоскости фокуса, в котором поток энергии обратный, примерно равен диаметру диска Эйри. При моделировании FDTD-методом дифракции плоской волны с левой круговой поляризацией на вихревой зонной микропластинке с числовой апертурой почти 1 на расстоянии, равном длине волны света (плоскость фокуса), также имеет место обратный поток энергии вдоль оп-

тической оси. Максимальное значение обратного потока почти в 2 раза больше, чем максимальное значение прямого потока. Отрезок на оптической оси, на котором величина обратного потока падает в 2 раза, совпадает с глубиной фокуса и в рассматриваемом примере равен 2 длинам волны. Показано также, что прямой и обратный потоки энергии в плоскости фокуса вращаются вокруг оптической оси, хотя на самой оптической оси поперечные составляющие вектора Пойнтинга равны нулю.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 18-19-00595) в параграфе «Теоретическое основание», Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в параграфе «Моделирование острой фокусировки с помощью формул Ричардса–Вольфа», Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-47-630483, 17-47-630417, 17-47-630420, 17-42-630008, 18-07-01122, 18-07-01124, 18-07-01380) в параграфе «Моделирование острой фокусировки с помощью FDTD-метода».

### Литература

1. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards, E. Wolf // Proceedings of the Royal Society A. – 1959. – Vol. 253, Issue 1274. – P. 358-379. – DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.

2. **Ignatovsky, V.S.** Diffraction by a lens having arbitrary opening / V.S. Ignatovsky // Transactions of the Optical Institute in Petrograd. – 1920. – Vol. 1. – P. 4.
3. **Ganic, D.** Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space / D. Ganic, X. Gan, M. Gu // Optics Express. – 2003. – Vol. 11, Issue 21. – P. 2747-2752. – DOI: 10.1364/OE.11.002747.
4. **Bokor, N.** Investigation of polarization effects for high-numerical-aperture first-order Laguerre-Gaussian beams by 2D scanning with a single fluorescent microbead / N. Bokor, Y. Iketaki, T. Watanabe, M. Fujii // Optics Express. – 2005. – Vol. 13, Issue 26. – P. 10440-10447.
5. **Maluenda, D.** Synthesis of highly focused fields with circular polarization at any transverse plane / D. Maluenda, R. Martinez-Herrero, I. Juvells, A. Carnicer // Optics Express. – 2014. – Vol. 22, Issue 6. – P. 6859-6867. – DOI: 10.1364/OE.22.006859.
6. **Chen, B.** Tight focusing of elliptically polarized vortex beams / B. Chen, J. Pu // Applied Optics. – 2009. – Vol. 48, Issue 7. – P. 1288-1294. – DOI: 10.1364/AO.48.001288.
7. **Zang, M.** Tight focusing properties of anomalous vortex beams / M. Zang, Y. Yang // Optik. – 2018. – Vol. 154. – P. 133-138. – DOI: 10.1016/j.ijleo.2017.10.013.
8. **Nie, Z.** Tight focusing of a radially polarized Laguerre-Bessel-Gaussian beam and its application to manipulation of two type of particles / Z. Nie, G. Shi, D. Li, X. Zhang, Y. Wang, Y. Song // Physics Letters A. – 2015. – Vol. 379, Issue 9. – P. 857-863. – DOI: 10.1016/j.physleta.2014.11.029.
9. **Zhang, X.** Focusing properties of cylindrical vector vortex beams / X. Zhang, R. Chen, A. Wang // Optics Communication. – 2018. – Vol. 414. – P. 10-15. – DOI: 10.1016/j.optcom.2017.12.076.
10. **Zhao, X.** Transverse focal shift in vortex beams / X. Zhao, X. Pang, J. Zhang, G. Wan // IEEE Photonics Journal. – 2018. – Vol. 10, Issue 1. – P. 6500417. – DOI: 10.1109/JPHOT.2018.2795597.
11. **Novitsky, A.V.** Negative propagation of vector Bessel beams / A.V. Novitsky, D.V. Novitsky // Journal of the Optical Society of America A. – 2007. – Vol. 24, Issue 9. – P. 2844-2849. – DOI: 10.1364/JOSAA.24.002844.
12. **Monteiro, P.B.** Angular momentum of focused beams: Beyond the paraxial approximation / P.B. Monteiro, P.A.M. Neto, H.M. Nussenzeig // Physical Review A. – 2009. – Vol. 79, Issue 3. – P. 033830. – DOI: 10.1103/PhysRevA.79.033830.
13. **Sukhov, S.** On the concept of "tractor beams" / S. Sukhov, A. Dogariu // Optics Letters. – 2010. – Vol. 35, Issue 22. – P. 3847-3849. – DOI: 10.1364/OL.35.003847.
14. **Novitsky, A.** Single gradientless light beam drags particles as tractor beams / A. Novitsky, C. Qiu, H. Wang // Physics Review Letters. – 2011. – Vol. 107, Issue 20. – P. 203601. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.203601.
15. **Sukhov, S.** Negative nonconservative forces: Optical "tractor beams" for arbitrary objects / S. Sukhov, A. Dogariu // Physics Review Letters. – 2011. – Vol. 107, Issue 20. – P. 203602. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.203602.
16. **Sáenz, J.J.** Laser tractor beams / J.J. Sáenz // Nature Photonics. – 2011. – Vol. 5. – P. 514-515. – DOI: 10.1038/nphoton.2011.201.
17. **Dogariu, A.** Optically induced 'negative forces' / A. Dogariu, S. Sukhov, J.J. Saenz // Nature Photonics. – 2012. – Vol. 7. – P. 24-27. – DOI: 10.1038/nphoton.2012.315.
18. **Kajorndejnukul, V.** Linear momentum increase and negative optical forces at dielectric interface / V. Kajorndejnukul, W. Ding, S. Sukhov, C. Qiu, A. Dogariu // Nature Photonics. – 2013. – Vol. 7. – P. 787-790. – DOI: 10.1038/nphoton.2013.192.
19. **Shvedov, V.** A long-range polarization-controlled optical tractor beam / V. Shvedov, A.R. Davoyan, C. Hnatovsky, N. Engheta, W. Krolikowski // Nature Photonics. – 2014. – Vol. 8. – P. 846-850. – DOI: 10.1038/nphoton.2014.242.
20. **Carretero, L.** Periodic trajectories obtained with an active tractor beam using azimuthal polarization: design of particle exchanger / L. Carretero, P. Acebal, C. Garcia, S. Blaya // IEEE Photonics Journal. – 2015. – Vol. 7, Issue 1. – P. 3400112. – DOI: 10.1109/JPHOT.2015.2402123.
21. **Mitri, F.G.** Optical Bessel tractor beam on active dielectric Rayleigh prolate and oblate spheroids / F.G. Mitri // Journal of the Optical Society of America B. – 2017. – Vol. 34, Issue 5. – P. 899-908. – DOI: 10.1364/JOSAB.34.000899.
22. **Котляр, В.В.** Формирование и фокусировка векторного оптического вихря с помощью металинзы / В.В. Котляр, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 645-653. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-645-654.
23. **Davidson, N.** High-numerical-aperture focusing of radially polarized doughnut beams with a parabolic mirror and a flat diffractive lens / N. Davidson, N. Bokor // Optics Letters. – 2004. – Vol. 29, Issue 12. – P. 1318-1320. – DOI: 10.1364/OL.29.001318.

#### Сведения об авторах

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: [kotlyar@smr.ru](mailto:kotlyar@smr.ru).

**Налимов Антон Геннадьевич**, 1980 года рождения, окончил Самарский государственный аэрокосмический университет в феврале 2003 года по специальности «Физика». Поступил в очную аспирантуру СГАУ по специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в 2003 году, окончил её по специальности 01.04.05 «Оптика» в 2006 году. Работает на кафедре технической кибернетики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва в должности доцента, в Институте систем обработки изображений РАН в должности научного сотрудника. Кандидат физико-математических наук, соавтор 78 работ и 3 патентов. E-mail: [anton@smr.ru](mailto:anton@smr.ru).

Сведения об авторе **Стафеев Сергей Сергеевич** см. стр. 390 этого выпуска.

ГРПТИ: 29.31.01

Поступила в редакцию 26 февраля 2018 г. Окончательный вариант – 8 мая 2018 г.

**THE NEAR-AXIS BACKFLOW OF ENERGY IN A TIGHTLY FOCUSED OPTICAL VORTEX WITH CIRCULAR POLARIZATION**V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.G. Nalimov<sup>1,2</sup>, S.S. Stafeev<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,<sup>2</sup>Samara National Research University, Samara, Russia**Abstract**

Using the Richards-Wolf formulae for a diffractive lens, we show that in the focal plane of a sharply focused left-hand circularly polarized optical vortex with the topological charge 2 there is an on-axis backflow of energy (as testified by the negative axial projection of the Poynting vector). The result is corroborated by the FDTD-aided rigorous calculation of the diffraction of a left-hand circularly polarized plane wave by a vortex zone plate with the topological charge 2 and the  $NA \approx 1$ . Moreover, the back- and direct flows of energy are comparable in magnitude. We have also shown that while the backflow of energy takes place on the entire optical axis, it has a maximum value in the focal plane, rapidly decreasing with distance from the focus. The length of a segment along the optical axis at which the modulus of the backflow drops by half (the depth of backflow) almost coincides with the depth of focus, and the transverse circle in which the energy flow is reversed roughly coincides with the Airy disk.

**Keywords:** Poynting vector, Richards-Wolf formulae, FDTD-method, optical vortex, tractor beam.

**Citation:** Kotlyar VV, Nalimov AG, Stafeev SS. The near-axis backflow of energy in a tightly focused optical vortex with circular polarization. *Computer Optics* 2018; 42(3): 392-400. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-3-392-400.

**Acknowledgements:** This work was partly supported by the Russian Science Foundation under grant No. 18-19-00595 (theoretical investigation), the Federal Agency for Scientific Organizations under Agreement No. 007-Г3/Ч3363/26 (numerical simulation using Richards-Wolf formulae), and the Russian Foundation for Basic Research under grants Nos. 16-47-630483, 17-47-630417, 17-47-630420, 17-42-630008, 18-07-01122, 18-07-01124, 18-07-01380 (numerical simulation using an FDTD method).

**References**

- [1] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc R Soc A* 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [2] Ignatovsky VS. Diffraction by a lens having arbitrary opening. *Transactions of the Optical Institute in Petrograd* 1920; 1: 4.
- [3] Ganic D, Gan X, Gu M. Focusing of doughnut laser beams by a high numerical-aperture objective in free space. *Opt Express* 2003; 11(21): 2747-2752. DOI: 10.1364/OE.11.002747.
- [4] Bokor N, Iketaki Y, Watanabe T, Fujii M. Investigation of polarization effects for high-numerical-aperture first-order Laguerre-Gaussian beams by 2D scanning with a single fluorescent microbead. *Opt Express* 2005; 13(26): 10440-10447.
- [5] Maluenda D, Matinez-Herrero R, Juvells I, Carnicer A. Synthesis of highly focused fields with circular polarization at any transverse plane. *Opt Express* 2014; 22(6): 6859-6867. DOI: 10.1364/OE.22.006859.
- [6] Chen B, Pu J. Tight focusing of elliptically polarized vortex beams. *Appl Opt* 2009; 48(7): 1288-1294. DOI: 10.1364/AO.48.001288.
- [7] Zang M, Yang Y. Tight focusing properties of anomalous vortex beams. *Optik* 2018; 154: 133-138. DOI: 10.1016/j.ijleo.2017.10.013.
- [8] Nie Z, Shi G, Li D, Zhang X, Wang Y, Song Y. Tight focusing of a radially polarized Laguerre-Bessel-Gaussian beam and its application to manipulation of two type of particles. *Phys Lett A* 2015; 379(9): 857-863. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.11.029.
- [9] Zhang X, Chen R, Wang A. Focusing properties of cylindrical vector vortex beams. *Opt Commun* 2018; 414: 10-15. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.12.076.
- [10] Zhao X, Pang X, Zhang J, Wan G. Transverse focal shift in vortex beams. *IEEE Photon J* 2018; 10(1): 6500417. DOI: 10.1109/JPHOT.2018.2795597.
- [11] Novitsky AV, Novitsky DV. Negative propagation of vector Bessel beams. *JOSA A* 2007; 24(9): 2844-2849. DOI: 10.1364/JOSAA.24.002844.
- [12] Monteiro PB, Neto PAM, Nussenzeig HM. Angular momentum of focused beams: Beyond the paraxial approximation. *Phys Rev A* 2009; 79(3): 033830. DOI: 10.1103/PhysRevA.79.033830.
- [13] Sukhov S, Dogariu A. On the concept of "tractor beams". *Opt Lett* 2010; 35(22): 3847-3849. DOI: 10.1364/OL.35.003847.
- [14] Novitsky A, Qiu C, Wang H. Single gradientless light beam drags particles as tractor beams. *Phys Rev Lett* 2011; 107(20): 203601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.203601.
- [15] Sukhov S, Dogariu A. Negative nonconservative forces: optical "tractor beams" for arbitrary objects. *Phys Rev Lett* 2011; 107(20): 203602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.203602.
- [16] Saenz JJ. Laser tractor beams. *Nat Photon* 2011; 5: 514-515. DOI: 10.1038/nphoton.2011.201.
- [17] Dogariu A, Sukhov S, Saenz JJ. Optically induced 'negative forces'. *Nat Photon* 2012; 7: 24-27. DOI: 10.1038/nphoton.2012.315.

- [18] Kajorndejnukul V, Ding W, Sukhov S, Qiu C, Dogariu A. Linear momentum increase and negative optical forces at dielectric interface. *Nat Photon* 2013; 7: 787-790. DOI: 10.1038/nphoton.2013.192.
- [19] Shvedov V, Davoyan AR, Hnatovsky C, Engheta N, Krolikowski W. A long-range polarization-controlled optical tractor beam. *Nat Photon* 2014; 8: 846-850. DOI: 10.1038/nphoton.2014.242.
- [20] Carretero L, Acebal P, Garcia C, Blaya S. Periodic trajectories obtained with an active tractor beam using azimuthal polarization: design of particle exchanger. *IEEE Photon J* 2015; 7: 3400112. DOI: 10.1109/JPHOT.2015.2402123.
- [21] Mitri FG. Optical Bessel tractor beam on active dielectric Rayleigh prolate and oblate spheroids. *JOSA B* 2017; 34(5): 899-908. DOI: 10.1364/JOSAB.34.000899.
- [22] Kotlyar VV, Nalimov AG. A vector optical vortex generated and focused using a metalens [In Russian]. *Computer Optics* 2017; 41(5): 645-654. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-645-654.
- [23] Davidson N, Bokor N. High-numerical-aperture focusing of radially polarized doughnut beams with a parabolic mirror and a flat diffractive lens. *Opt Lett* 2004; 29(12): 1318-1320. DOI: 10.1364/OL.29.001318.

---

#### *Authors' information*

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@smr.ru](mailto:kotlyar@smr.ru).

**Anton Gennadyevich Nalimov** (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 "Mathematical Modeling and Program Complexes", finished it in 2006 with speciality 01.04.05 "Optics". A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 78 papers and 3 inventions. E-mail: [anton@smr.ru](mailto:anton@smr.ru).

The information about author **Sergey S. Stafeev** you can find on page 391 of this issue.

---

*Received February 26, 2018. The final version – May 8, 2018.*

---