

# Оптическое дифференцирование второго порядка трехмерного светового пучка с использованием слоистой металлодиэлектрической структуры при наклонном падении

А.И. Кашапов<sup>1,2</sup>, Л.Л. Досколович<sup>1,2</sup>, Е.А. Безус<sup>1,2</sup>, Н.В. Головастиков<sup>1,2</sup>, Д.А. Быков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

## Аннотация

Исследуется оптическая реализация операции дифференцирования второго порядка с помощью слоистой металлодиэлектрической структуры в геометрии наклонного падения. Показано, что преобразование профиля трехмерного светового пучка, происходящее при его отражении от слоистой структуры, может быть описано в рамках теории линейных систем. Получена передаточная функция соответствующей линейной системы, и показано, что если слоистая структура обладает нулем отражения второго порядка по пространственной частоте для одной из поляризаций, то реализуемое ей преобразование соответствует взвешенной сумме вторых производных по пространственным координатам от профиля падающего пучка. С использованием представленного теоретического описания рассчитаны слоистые металлодиэлектрические структуры для вычисления второй производной по одной из пространственных координат и для вычисления оператора Лапласа от профиля трехмерного линейно-поляризованного светового пучка. Представленные результаты численного моделирования демонстрируют вычисление указанных операторов с высоким качеством.

**Ключевые слова:** оптическое дифференцирование, вторая производная, оператор Лапласа, слоистая структура, передаточная функция.

**Цитирование:** Кашапов, А.И. Оптическое дифференцирование второго порядка трехмерного светового пучка с использованием слоистой металлодиэлектрической структуры при наклонном падении / А.И. Кашапов, Л.Л. Досколович, Е.А. Безус, Н.В. Головастиков, Д.А. Быков // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 6. – С. 845-855. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1311.

**Citation:** Kashapov AI, Doskolovich LL, Bezus EA, Golovastikov NV, Bykov DA. Second-order optical differentiation of a 3D light beam at oblique incidence using a multilayer metal-dielectric structure. Computer Optics 2023; 47(6): 845-855. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1311.

## Введение

В последние годы наблюдается большой интерес к разработке структур нанопотоники для оптической обработки информации и аналоговых оптических вычислений. Указанные структуры рассматриваются в качестве перспективной элементной базы, призванной обеспечить дальнейшее развитие вычислительных систем за счет создания альтернативы электронным компонентам или дополнения к ним [1–3]. Одними из наиболее важных операций аналоговых оптических вычислений являются операции дифференцирования оптического сигнала во времени и по пространственной координате. Для оптической реализации данных операций были предложены различные резонансные структуры фотоники, в частности, резонансные дифракционные решетки [2, 4–9], слоистые структуры [10–17], микрорезонаторы [18–20]. Использование для дифференцирования именно резонансных структур связано с тем, что получение тре-

буемого для дифференцирования нуля в спектре отражения или пропускания дифракционной структуры обусловлено, как правило, резонансными эффектами возбуждения её собственных мод. Важно отметить, что оптические дифференциаторы на основе резонансных структур фотоники являются значительно более компактными по сравнению с традиционными системами на основе фурье-коррелятора и дифферирующего фильтра [1, 21, 22].

Несмотря на большое количество работ по оптическому дифференцированию, существует всего несколько работ, посвященных оптическому дифференцированию второго порядка [2, 23–26]. В настоящей работе под дифференцированием второго порядка мы будем понимать дифференциальный оператор, соответствующий взвешенной сумме вторых производных по пространственным координатам. Важными частными случаями данного оператора являются «одиночная» вторая производная (вторая производная по одной из пространственных координат) и опе-

ратор Лапласа. Данные операторы входят во многие уравнения математической физики, и их оптическая реализация в перспективе может быть использована для аналогового решения данных уравнений. Кроме того, их оптическая реализация представляет большой интерес для различных задач обработки изображений.

Для оптической реализации оператора дифференцирования второго порядка требуются дифракционные структуры, имеющие нуль второго порядка по пространственным частотам (тангенциальным компонентам волнового вектора) в спектре отражения или пропускания. Наиболее просто выполнение данного условия достигается в геометрии нормального падения, для которой нули второго порядка по пространственным частотам обеспечиваются симметрией задачи дифракции [23]. В частности, такой подход использовался в работах [2, 23–26] для оптической реализации операции дифференцирования второго порядка с помощью слоистых дифракционных структур (в отражении) [23, 24] и с помощью дифракционных решеток (ДР) с двумерной периодичностью (в пропускании) [2, 25, 26]. С одной стороны, слоистые структуры существенно проще ДР с точки зрения их технологической реализации. С другой стороны, недостатком таких структур является тот факт, что они работают в режиме отражения при нормальном падении. Это усложняет применение таких слоистых структур в практических задачах и требует использования в оптической схеме дополнительного элемента для разделения падающего и отраженного пучков.

В настоящей работе для оптической реализации операции дифференцирования второго порядка предлагается слоистая металлодиэлектрическая структура, состоящая из двух трехслойных структур «металл-диэлектрик-металл». Предлагаемая структура реализует данную операцию в отражении, но в отличие от ранее рассмотренных слоистых структур [23, 24] работает в геометрии *наклонного* падения и, таким образом, не требует дополнительных оптических элементов при практической реализации. В работе получена передаточная функция (ПФ), описывающая преобразование профиля трехмерного светового пучка, происходящее при его отражении от слоистой структуры при наклонном падении. Следует отметить, что данная ПФ имеет существенно более сложный вид по сравнению со случаем нормального падения (а также со случаем, когда рассматривается преобразование двумерного пучка). На основе рассмотренного теоретического описания рассчитаны слоистые структуры для вычисления второй производной по одной из пространственных координат и для вычисления оператора Лапласа от профиля трехмерного линейно-поляризованного светового пучка. Представленные результаты численного моделирования рассчитанных структур подтверждают корректность предложенного

теоретического описания и демонстрируют вычисление указанных операторов с высоким качеством.

## 1. Описание дифракции трехмерного пучка на слоистой структуре при наклонном падении

### 1.1. Базис ТЕ- и ТМ-поляризованных плоских волн в наклонной системе координат

Для описания дифракции светового пучка, наклонно падающего на слоистую структуру (рис. 1), мы будем представлять падающий пучок в виде суперпозиции плоских волн с ТМ- и ТЕ-поляризацией (от англ. transverse magnetic и transverse electric) [23]. Для получения данного представления нам понадобятся векторные представления данных волн в наклонной системе координат  $(x_{inc}, y_{inc}, z_{inc})$ , связанной с падающим пучком (рис. 1). Для этого сначала рассмотрим уравнения ТМ- и ТЕ-волн в глобальной системе координат  $(x, y, z)$ , а затем выполним преобразование поворота.

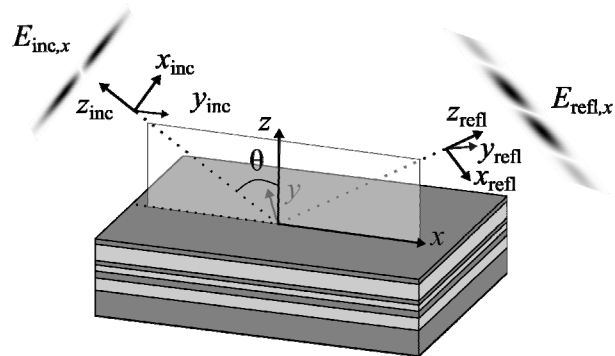


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции трехмерного пучка на слоистой структуре

Уравнение плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  в глобальной системе координат имеет вид

$$\Psi \exp(i(k_x x + k_y y + k_z z)) = \Psi \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $\Psi = [E_x E_y E_z H_x H_y H_z]^T$  – вектор-столбец из компонент электрического и магнитного полей,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Отметим, что компоненты волнового вектора удовлетворяют уравнению  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \epsilon_{sup}$ , где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны,  $\epsilon_{sup}$  – диэлектрическая проницаемость среды.

Плоская волна с произвольным вектором поляризации может быть представлена в виде суперпозиции ТМ- и ТЕ-волн [23]. У ТМ-волны  $E_z \neq 0, H_z \equiv 0$ , при этом вектор магнитного поля перпендикулярен плоскости падения, содержащей волновой вектор  $\mathbf{k}$  и ось  $z$ , а вектор электрического поля лежит в данной плоскости. У ТЕ-волны  $H_z \neq 0, E_z \equiv 0$ , при этом вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения, а вектор магнитного поля лежит в этой плоскости. Векторы из компонент полей для данных волн могут быть получены из уравнений Максвелла в виде [23]:

$$\Psi_{TM}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{bmatrix} -k_x k_z \\ -k_y k_z \\ k_x^2 + k_y^2 \\ k_0 k_y \varepsilon_{sup} \\ -k_0 k_x \varepsilon_{sup} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\Psi_{TE}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{bmatrix} -k_0 k_y \\ -k_0 k_x \\ 0 \\ -k_x k_z \\ -k_y k_z \\ k_x^2 + k_y^2 \end{bmatrix}.$$

Запишем ТМ- и ТЕ-волны в системе координат падающего пучка  $(x_{inc}, y_{inc}, z_{inc})$ , которая повернута на угол  $\theta$  относительно оси  $y$  (рис. 1). При этом для дальнейших выкладок нам будет удобно представить компоненты векторов  $\Psi_{TM}(\mathbf{k})$ ,  $\Psi_{TE}(\mathbf{k})$  через компоненты волнового вектора в системе координат падающего пучка  $\mathbf{k}_{inc} = (k_{x,inc}, k_{y,inc}, k_{z,inc}) = \mathbf{R}_y \mathbf{k}$ , где

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} - \quad (3)$$

матрица поворота. Несложно получить, что закон преобразования компонент векторов  $\Psi_{TM}(\mathbf{k})$  и  $\Psi_{TE}(\mathbf{k})$  в этом случае будет иметь вид

$$\Phi_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_y \end{bmatrix} \Psi_{TM}(\mathbf{R}_y^T \mathbf{k}_{inc}), \quad (4)$$

$$\Phi_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_y & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_y \end{bmatrix} \Psi_{TE}(\mathbf{R}_y^T \mathbf{k}_{inc}),$$

где  $\Phi_{TE}$ ,  $\Phi_{TM}$  – векторы компонент полей в системе координат падающего пучка  $(x_{inc}, y_{inc}, z_{inc})$ . В (4) мы рассматриваем компоненты векторов  $\Phi_{TE}$ ,  $\Phi_{TM}$  как функции только от поперечных (тангенциальных) компонент волнового вектора  $\mathbf{k}_{\perp,inc} = (k_{x,inc}, k_{y,inc})$ , так как оставшаяся  $z$ -компонента выражается через них:  $k_{z,inc} = \pm \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{sup} - k_{\perp,inc}^2}$ . При этом знаки  $\pm$  в выражении для  $k_{z,inc}$  соответствуют волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях оси  $z_{inc}$  в системе координат падающего пучка.

Согласно (4), векторы  $\Phi_{TE}$ ,  $\Phi_{TM}$  имеют вид

$$\Phi_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) = \frac{1}{|\mathbf{k}_{\perp}|} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \varepsilon_{sup} \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\Phi_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) = \frac{1}{|\mathbf{k}_{\perp}|} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix},$$

где  $|\mathbf{k}_{\perp}| = \sqrt{k_{y,inc}^2 + (k_{x,inc} \cos \theta - k_{z,inc} \sin \theta)^2}$ ,

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} -k_{x,inc} k_{z,inc} \cos \theta + (k_{y,inc}^2 + k_{z,inc}^2) \sin \theta \\ -k_{y,inc} (k_{z,inc} \cos \theta + k_{x,inc} \sin \theta) \\ (k_{y,inc}^2 + k_{z,inc}^2) \cos \theta - k_{x,inc} k_{z,inc} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} k_0 k_{y,inc} \cos \theta \\ k_0 (-k_{x,inc} \cos \theta + k_{z,inc} \sin \theta) \\ k_0 k_{y,inc} \sin \theta \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в системе координат  $(x_{inc}, y_{inc}, z_{inc})$  ТМ- и ТЕ-волны уже не имеют нулевых  $z$ -компонент у магнитного и электрического поля.

### 1.2. Представление падающего пучка

Представим падающий световой пучок, распространяющийся против оси  $z_{inc}$  в системе координат  $\mathbf{r}_{inc} = (x_{inc}, y_{inc}, z_{inc})$ , в виде суперпозиции ТМ- и ТЕ-волн (5):

$$\mathbf{P}_{inc}(\mathbf{r}_{inc}) = \mathbf{P}_{inc,TE}(\mathbf{r}_{inc}) + \mathbf{P}_{inc,TM}(\mathbf{r}_{inc}) =$$

$$= \iint G_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) \Phi_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) \times$$

$$\times \exp(i\mathbf{k}_{\perp,inc} \mathbf{r}_{\perp,inc} - iz_{inc} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{sup} - k_{\perp,inc}^2}) d\mathbf{k}_{\perp,inc} + \quad (7)$$

$$+ \iint G_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}, \omega) \Phi_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}, \omega) \times$$

$$\times \exp(i\mathbf{k}_{\perp,inc} \mathbf{r}_{\perp,inc} - iz_{inc} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{sup} - k_{\perp,inc}^2}) d\mathbf{k}_{\perp,inc},$$

где  $\mathbf{r}_{\perp,inc} = (x_{inc}, y_{inc})$ ,  $G_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc})$  и  $G_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc})$  – спектры ТЕ- и ТМ-компонент падающего пучка, представляющие амплитуды ТЕ- и ТМ-поляризованных волн, образующих пучок. Отметим, что поскольку падающий пучок распространяется против оси  $z_{inc}$ , то компонента  $k_{z,inc}$  в компонентах векторов  $\Phi_{TE}$ ,  $\Phi_{TM}$  берется со знаком минус, т.е.  $k_{z,inc} = -\sqrt{k_0^2 \varepsilon_{sup} - k_{\perp,inc}^2}$ .

В общем случае за счет выбора спектров  $G_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc})$  и  $G_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc})$  можно задать две требуемые компоненты электромагнитного поля. Предположим, что в плоскости  $z_{inc} = 0$  падающий пучок является линейно поляризованным по оси  $x_{inc}$ , так что  $E_{inc,y} = (x_{inc}, y_{inc}, 0) = 0$ . При этом будем считать, что  $x$ -компонента электрического поля в плоскости  $z_{inc} = 0$  является заданной и имеет вид

$$E_{inc,x}(x_{inc}, y_{inc}, 0) = \iint G_x(\mathbf{k}_{\perp,inc}) \times$$

$$\times \exp(i\mathbf{k}_{\perp,inc} \mathbf{r}_{\perp,inc}) d\mathbf{k}_{\perp,inc}, \quad (8)$$

где  $G_x(\mathbf{k}_{\perp,inc})$  – спектр  $x$ -компоненты электрического поля. Тогда для определения спектров  $G_{TE}(\mathbf{k}_{\perp})$ ,  $G_{TM}(\mathbf{k}_{\perp})$  получим следующие уравнения:

$$\Phi_{TM,1}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) G_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) +$$

$$+ \Phi_{TE,1}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) G_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) = G_x(\mathbf{k}_{\perp,inc}), \quad (9)$$

$$\Phi_{TM,2}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) G_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) +$$

$$+ \Phi_{TE,2}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) G_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) = 0,$$

где  $\Phi_{TM,j}$ ,  $\Phi_{TE,j}$ ,  $j = 1, 2$  – первые и вторые компоненты векторов  $\Phi_{TE}$ ,  $\Phi_{TM}$  в (5), представляющие  $x$ - и  $y$ -

компоненты электрического поля в системе координат падающего пучка. Из последних уравнений получим

$$\begin{aligned} G_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) &= g_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc})G_x(\mathbf{k}_{\perp,inc}), \\ G_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) &= g_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc})G_x(\mathbf{k}_{\perp,inc}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} g_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) &= \frac{k_{x,inc} \cos \theta - k_{z,inc} \sin \theta}{k_{z,inc} \sqrt{k_{y,inc}^2 + (k_{x,inc} \cos \theta - k_{z,inc} \sin \theta)^2}}, \\ g_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) &= \frac{k_{y,inc} (k_{z,inc} \cos \theta + k_{x,inc} \sin \theta)}{k_0 k_{z,inc} \sqrt{k_{y,inc}^2 + (k_{x,inc} \cos \theta - k_{z,inc} \sin \theta)^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, выражения (10) позволяют задать спектры TE- и TM-компонент падающего пучка при заданном спектре  $G_x(\mathbf{k}_{\perp,inc}, \omega)$   $x$ -компоненты электрического поля падающего пучка и условии  $E_{inc,y} = (x_{inc}, y_{inc}, 0) \equiv 0$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать преобразование  $x$ -компоненты электрического поля падающего пучка, происходящее при его отражении от слоистой структуры. При выбранных спектрах (10) именно эта компонента является основной компонентой электрического поля падающего пучка и задается формулой (8).

### 1.3. Преобразование $x$ -компоненты электрического поля при отражении

При отражении падающего пучка от слоистой структуры амплитуды TM- и TE-волн, составляющих пучок, умножаются на коэффициенты отражения  $R_{TM}(\mathbf{k}_{\perp}), R_{TE}(\mathbf{k}_{\perp})$  для падающих TM- и TE-волн, где  $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$  – тангенциальные компоненты волнового вектора в глобальной системе координат, рассчитываемые из формулы  $\mathbf{k} = \mathbf{R}_{\perp}^T \mathbf{k}_{inc}$ . Из данной формулы, с учетом отрицательности  $k_{z,inc}$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\perp} &= \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) = \\ &= (k_{x,inc} \cos \theta + \sin \theta \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{sup} - k_{z,inc}^2 - k_{y,inc}^2}, k_{y,inc}). \end{aligned} \quad (12)$$

В системе координат отраженного пучка  $\mathbf{r}_{refl} = (\mathbf{r}_{\perp,refl}, z_{refl})$ , где  $\mathbf{r}_{\perp,refl} = (x_{refl}, y_{refl})$ , тангенциальные компоненты  $\mathbf{k}_{\perp,inc}$  волновых векторов падающих волн при отражении не изменяются, а компонента  $k_{z,inc}$  меняет знак, поскольку отраженный пучок распространяется по оси  $z_{refl}$ . Таким образом, с учетом (7), (10)  $x$ -компонента электрического поля отраженного пучка (в системе координат  $\mathbf{r}_{refl} = (\mathbf{r}_{\perp,refl}, z_{refl})$ ) будет иметь вид

$$\begin{aligned} E_{refl,x}(\mathbf{r}_{refl}) &= \iint G_x(\mathbf{k}_{\perp,inc}) H(\mathbf{k}_{\perp,inc}) \times \\ &\times \exp(i\mathbf{k}_{\perp,inc} \mathbf{r}_{\perp,refl} + iz_{refl} \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{sup} - k_{\perp,inc}^2}) d\mathbf{k}_{\perp,inc}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} H(\mathbf{k}_{\perp,inc}) &= g_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) \Phi_{TM,1}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) R_{TM}(\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp,inc})) + \\ &+ g_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) \Phi_{TE,1}(\mathbf{k}_{\perp,inc}) R_{TE}(\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{k}_{\perp,inc})). \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь функции  $g_{TM}(\mathbf{k}_{\perp,inc}), g_{TE}(\mathbf{k}_{\perp,inc})$  заданы уравнением (11), а  $\Phi_{TM,1}, \Phi_{TE,1}$  являются первыми компонентами векторов  $\Phi_{TE}, \Phi_{TM}$  в (5) при  $k_{z,inc} = +\sqrt{k_0^2 \varepsilon_{sup} - k_{\perp,inc}^2}$  в (6).

Из формул (8), (13), (14) следует, что преобразование  $x$ -компоненты электрического поля падающего пучка  $E_{inc,x}(\mathbf{r}_{\perp,inc}, 0) \rightarrow E_{refl,x}(\mathbf{r}_{\perp,refl}, 0)$ , происходящее при его отражении, соответствует преобразованию «сигнала»  $E_{inc,x}(\mathbf{r}_{\perp,inc}, 0)$  линейной системой с передаточной функцией (ПФ)  $H(\mathbf{k}_{\perp,inc})$ , заданной формулой (14).

## 2. Исследуемая металлодиэлектрическая слоистая структура с нулем отражения второго порядка

Рассмотренная выше модель дифракции будет далее использована для описания преобразования светового пучка ( $x$ -компоненты электрического поля), происходящего при отражении от слоистой металлодиэлектрической структуры, имеющей нуль отражения второго порядка и состоящей из двух последовательно расположенных трехслойных структур «металл-диэлектрик-металл» (МДМ).

Рассмотрим сначала одиночную МДМ-структуру (рис. 2а), состоящую из верхнего металлического слоя (толщина  $h_{m,1}$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_{m,1}$ ), диэлектрического слоя (толщина  $h_d$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_d$ ) и нижнего металлического слоя (толщина  $h_{m,2}$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_{m,2}$ ). Диэлектрические проницаемости материалов над и под структурой равны  $\varepsilon_{sup}$  и  $\varepsilon_{sub}$  соответственно.

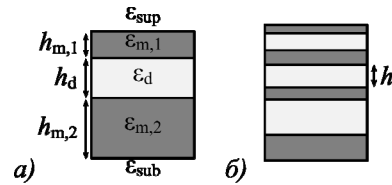


Рис. 2. Геометрия МДМ-структур: а) одиночной структуры и б) двойной структуры, состоящей из двух одиночных МДМ-структур, разделенных диэлектрическим слоем с толщиной  $h$

Пусть на структуру наклонно падает плоская волна с некоторой фиксированной поляризацией (TM- или TE-) и тангенциальными компонентами волнового вектора  $k_{x,0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{sup}} \sin \theta, k_y = 0$ , где  $\theta$  – угол падения. Отметим, что рассматриваемая МДМ-структура является резонансной, поскольку в ней могут существовать вытекающие моды, локализованные в диэлектрическом слое [12, 13]. Благодаря формированию резонанса Фабри–Перо коэффициент отражения структуры может обращаться в нуль. В [12, 13] показано, что коэффициент отражения МДМ-структуры обращается в нуль при выполнении следующего соотношения:

$$r_1 / (r_1 r_2 - t^2) = e^{2ik_z \cdot h_d} \rho, \quad (15)$$

где  $r_1, r_2$  – комплексные коэффициенты отражения верхнего металлического слоя для плоских волн, па-

дающих на данный слой сверху из области над структурой и снизу со стороны диэлектрического слоя,  $t$  – коэффициент пропускания верхнего металлического слоя,  $\rho$  – коэффициент отражения нижнего металлического слоя,  $k_{z,0} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_d - k_{x,0}^2}$  –  $z$ -компонента волнового вектора отраженной от нижнего слоя плоской волны в диэлектрическом слое. Коэффициенты отражения и пропускания металлических слоев в (15) зависят от параметров падающей волны (угла падения, длины волны, поляризации) и рассчитываются по известным формулам [27], описывающим отражение и прохождение плоской волны через плоскопараллельный слой однородного материала.

В работах [12, 13] было показано, что при заданных материалах (значениях  $\varepsilon_{m,1}$ ,  $\varepsilon_{m,2}$ ,  $\varepsilon_d$ ), длине волны и угле падения (или тангенциальной компоненте волнового вектора  $k_{x,0}$ ) в МДМ-структуре всегда можно обеспечить выполнение соотношения (15) за счет выбора толщин  $h_{m,1}$ ,  $h_{m,2}$ ,  $h_d$  образующих её слоев и, таким образом, получить нулевое отражение.

Далее рассмотрим двойную МДМ-структуру (рис. 2б), состоящую из двух различных одиночных МДМ-структур, имеющих нули отражения при  $k_x = k_{x,0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{\text{sup}}} \sin \theta$  (при угле падения  $\theta$ ). В этом случае коэффициенты отражения одиночных МДМ-структур, рассматриваемые как функции от  $k_x$ , имеют вид

$$R_i(k_x) = c_{i,1}(k_x - k_{x,0}) + O[(k_x - k_{x,0})^2], \quad (16)$$

где  $c_{i,1}$  – коэффициент разложения в ряд Тейлора при линейном члене, индекс  $i = 1, 2$ , обозначает номер структуры. В работе [13] с использованием формализма матрицы рассеяния показано, что в двойной МДМ-структуре можно получить нуль отражения второго порядка по  $k_x$  при  $k_x = k_{x,0}$ . При этом условие для нуля отражения второго порядка имеет вид:

$$-c_{1,1}/t_{1,0}^2 = e^{2ik_z,0h} c_{2,1}, \quad (17)$$

где  $t_{1,0}$  – комплексный коэффициент пропускания верхней МДМ-структуры при  $k_x = k_{x,0}$ ,  $h$  – толщина диэлектрического слоя, разделяющего одиночные МДМ-структуры (рис. 2б). При выполнении соотношения (17) коэффициент отражения двойной МДМ-структуры принимает вид

$$R_{\text{dbl}}(k_x) = c_2(k_x - k_{x,0})^2 + O[(k_x - k_{x,0})^3], \quad (18)$$

где  $c_2$  – коэффициент разложения в ряд Тейлора при квадратичном члене.

Выражение (18) описывает коэффициент отражения двойной МДМ-структуры в геометрии плоского падения (при  $k_y = 0$ ). В общем случае  $k_y \neq 0$  коэффициент отражения  $R_{\text{dbl}}(k_x, k_y)$  можно определить через коэффициент отражения при  $k_y = 0$  в виде

$$R_{\text{dbl}}(k_x, k_y) = R_{\text{dbl}}(\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, 0). \quad (19)$$

Отметим, что коэффициент отражения является четной функцией от  $k_y$ :  $R_{\text{dbl}}(k_x, k_y) = R_{\text{dbl}}(k_x, -k_y)$ . Используя соотношения (18) и (19), несложно показать, что при  $k_x = k_{x,0}$  коэффициент отражения  $R_{\text{dbl}}(k_{x,0}, k_y) = R_{\text{dbl}}(\sqrt{k_{x,0}^2 + k_y^2}, 0)$ , рассматриваемый как функция от  $k_y$ , будет иметь нуль 4-го порядка при  $k_y = 0$ . Таким образом, для коэффициента отражения двойной МДМ-структуры справедливо следующее представление:

$$R_{\text{dbl}}(k_x, k_y) = c_2(k_x - k_{x,0})^2 + c_4 k_y^4 + O[(k_x - k_{x,0})^3 + k_y^6]. \quad (20)$$

Как отмечено выше, двойная МДМ-структура рассматривается для конкретной поляризации. При этом для «кросс-поляризованной» падающей волны (например, ТЕ-поляризованной в случае МДМ-структуры, рассчитанной для ТМ-поляризации) коэффициент отражения не обращается в нуль при  $\mathbf{k}_\perp = (k_{x,0}, 0)$  и имеет вид

$$R_{\text{dbl}}^{\text{cr}}(k_x, k_y) = R_{\text{dbl}}^{\text{cr}}(k_{x,0}, 0) + c_1^{\text{cr}}(k_x - k_{x,0}) + c_2^{\text{cr}} k_y^2 + O[(k_x - k_{x,0})^2 + k_y^4]. \quad (21)$$

### 3. Передаточная функция двойной МДМ-структуры

ПФ, описывающая преобразование  $x$ -компоненты электрического поля падающего трехмерного пучка при отражении от слоистой структуры, имеет вид (14). Предположим, что в качестве слоистой структуры используется двойная МДМ-структура, имеющая нуль второго порядка по  $k_x$  при  $k_x = k_{x,0} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{\text{sup}}} \sin \theta$  для ТМ-поляризации. В этом случае коэффициенты отражения  $R_{\text{TM}}(\mathbf{k}_\perp)$ ,  $R_{\text{TE}}(\mathbf{k}_\perp)$  в (14) будут иметь вид (20) и (21) соответственно. Раскладывая ПФ (14) в ряд Тейлора до квадратичных членов в окрестности точки  $\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}} = (0, 0)$  ( $\mathbf{k}_\perp = (k_{x,0}, 0)$ ) и учитывая вид коэффициентов отражения (20), (21) для двойной МДМ-структуры, получим

$$H(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}) \approx c_{x,2} k_{x, \text{inc}}^2 + c_{y,2} k_{y, \text{inc}}^2, \quad (22)$$

где

$$c_{x,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial k_{x, \text{inc}}^2} [R_{\text{TM}}(\mathbf{k}_\perp(\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}))] \Big|_{\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}}=(0,0)}, \quad (23)$$

$$c_{y,2} = \frac{2R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0)}{\text{tg}^2 \theta k_0^2 \varepsilon_{\text{sup}}}.$$

Таким образом, в окрестности точки  $\mathbf{k}_{\perp, \text{inc}} = (0, 0)$  ПФ содержит только квадратичные члены. В этом случае, как легко видеть из формулы (13), ПФ (22), (23) реализует следующую операцию дифференцирования второго порядка поперечного профиля  $x$ -компоненты электрического поля падающего пучка:

$$E_{\text{refl},x}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}}, 0) = -c_{x,2} \frac{\partial^2 E_{\text{inc},x}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}}, 0)}{\partial x_{\text{inc}}^2} - c_{y,2} \frac{\partial^2 E_{\text{inc},x}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}}, 0)}{\partial y_{\text{inc}}^2} \quad (24)$$

В работе [13] показано, что двойная МДМ-структура в случае двумерного падающего пучка осуществляет вычисление второй производной выбранной компоненты электромагнитного поля по пространственной переменной  $x_{\text{inc}}$ . Для случая трехмерного пучка, как показывает формула (24), это не так. Из-за того, что для кросс-поляризованной падающей волны коэффициент отражения (в рассматриваемом случае  $-R_{\text{TE}}(\mathbf{k}_{\perp})$ ) в общем случае не обращается в нуль при  $\mathbf{k}_{\perp} = (k_{x,0}, 0)$ , в отраженном пучке дополнительно появляется вторая производная по переменной  $y_{\text{inc}}$ . В то же время при расчете двойных МДМ-структур имеется определенная «свобода», обусловленная выбором толщины нижнего металлического слоя [13], а также параметров падающей волны и материалов структуры. Это дает возможности по контролю величины коэффициента отражения  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0)$ . В этой связи интересно исследовать вопрос возможности расчета двойной МДМ-структуры, для которой  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0) = 0$  и которая будет в этом случае оптически вычислять «чистую» вторую производную  $\partial^2 E_{\text{inc},x} / \partial x_{\text{inc}}^2$ . С другой стороны, ненулевое значение коэффициента отражения  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0)$  дает возможность использовать двойную МДМ-структуру для оптического вычисления оператора Лапласа. Данный оператор (с точностью до постоянного множителя) будет вычисляться при  $c_{x,2} = c_{y,2}$  в (24). В следующих параграфах мы исследуем возможность реализации этих двух операций.

#### 4. Расчет двойной МДМ-структуры для вычисления второй производной

##### 4.1. Расчет двойной МДМ-структуры

Рассмотрим расчет двойной МДМ-структуры для оптического вычисления второй производной  $\partial^2 E_{\text{inc},x} / \partial x_{\text{inc}}^2$ . Согласно (22), (23), для этого необходимо выполнение условия  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0) = 0$ . Отметим, что коэффициент  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0)$  имеет нерезонансную природу и поэтому строгое равенство нулю данного коэффициента вряд ли возможно. Для практического применения структуры коэффициент отражения  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0)$  должен быть «достаточно малым», так чтобы коэффициент  $c_{x,2}$  при требуемой второй производной по переменной  $x_{\text{inc}}$  в (24) оказывался на несколько порядков больше коэффициента  $c_{y,2}$  при второй производной по переменной  $y_{\text{inc}}$ .

Для исследования были выбраны двойные МДМ-структуры типа “Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu”. В качестве материалов металлических и диэлектрических слоев в таких структурах используются медь (Cu) и диоксид кремния (SiO<sub>2</sub>) соответственно. В качестве материалов над и под структурой используют-

ся воздух и диоксид кремния. Отметим, что для каждого фиксированного угла падения волны  $\theta$  существует целый класс двойных МДМ-структур, имеющих нуль отражения второго порядка. Структуры данного класса параметризованы толщиной нижнего металлического слоя  $h_m$  [13]. Это означает, что для различных толщин нижнего слоя  $h_m$  получаются различные двойные МДМ-структуры с нулями отражения второго порядка. Таким образом, можно попытаться выполнить условие  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0) \approx 0$  за счет выбора параметров  $\theta$  и  $h_m$ .

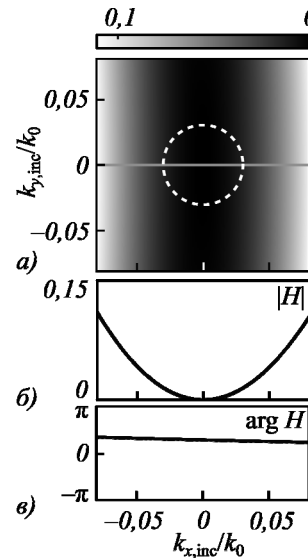


Рис. 3. а) Модуль ПФ двойной МДМ-структуры (25) (белая пунктирная окружность показывает «внешнюю границу» спектров падающих пучков по уровню  $1/e^2$ ); б) модуль и в) фаза ПФ при  $k_{y,\text{inc}} = 0$

Для исследования возможности выполнения условия  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0) \approx 0$  при различных значениях  $(\theta, h_m)$ , заданных на некоторой двумерной сетке, были рассчитаны различные двойные МДМ-структуры “Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu”, имеющие нуль второго порядка для ТМ-поляризации при длине волны  $\lambda = 630$  нм. Расчет структур был основан на решении уравнений (15), (17) с использованием ранее разработанного численного метода [13]. В качестве показателей преломления материалов слоев использовались значения  $n_m = 0,23 + 3,39i$  для меди (Cu) и  $n_d = 1,46$  для диоксида кремния (SiO<sub>2</sub>) при длине волны 630 нм [28]. Также отметим, что дисперсия материалов учитывалась в численных расчетах. В результате расчетов, основанных на переборе значений  $(\theta, h_m)$ , была найдена двойная МДМ-структура, которая при  $\theta = 60^\circ$  и  $h_m = 39$  нм имеет достаточно маленький коэффициент отражения  $R_{\text{TE}}(k_{x,0}, 0)$ , так что модуль коэффициента  $c_{x,2}$  при требуемой второй производной по переменной  $x_{\text{inc}}$  в (24) оказывается на 2 порядка больше модуля коэффициента  $c_{y,2}$  при второй производной по переменной  $y_{\text{inc}}$  ( $|c_{x,2}|/|c_{y,2}| \approx 168$ ). Толщины слоев рассчитанной структуры (начиная с верхнего) составляют

$$h_{\text{МДМ},2} = (10,7; 157,7; 11,5; 35,1; 26,6; 172,7; 39,0) \text{ нм.} \quad (25)$$

На рис. 3а показан модуль ПФ-структуры (25), рассчитанный по формуле (14). Отметим, что для расчета коэффициентов отражения, входящих в ПФ (14), использовался численно устойчивый метод [29]. Дополнительно на рис. 3б, в показаны сечения модуля и аргумента ПФ при  $k_{y,\text{inc}} = 0$ . В рассматриваемой области  $|k_{x,\text{inc}}| \leq 0,08k_0$ ,  $|k_{y,\text{inc}}| \leq 0,08k_0$  модуль рассчитанной ПФ с высокой точностью аппроксимируется квадратичной функцией  $0,1681 \cdot k_{x,\text{inc}}^2$  (среднеквадратичное отклонение модуля рассчитанной ПФ от квадратичной функции не превышает 1%). При этом сечение фазы на рис. 3в имеет вид линейной функции, что, однако, не влияет на качество дифференцирования, а приводит лишь к смещению профиля отраженного пучка [13].

#### 4.2. Результаты численного моделирования

Исследуем вычисление второй производной на примере падающих линейно-поляризованных пучков с поперечными профилями  $x$ -компонент электрического поля, соответствующими модам Эрмита-Гаусса:

$$E_{\text{inc},x}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}}, 0) = U_{m,n}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}}) = H_m\left(\sqrt{2} \frac{x_{\text{inc}}}{\sigma}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{y_{\text{inc}}}{\sigma}\right) \exp\left(-\frac{x_{\text{inc}}^2 + y_{\text{inc}}^2}{\sigma^2}\right), \quad (26)$$

где  $H_m(x)$  – многочлен Эрмита. Далее будем рассматривать моды Эрмита-Гаусса  $U_{1,0}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$  и  $U_{1,1}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$ . Спектры данных мод имеют вид

$$G_{1,0}(k_{x,\text{inc}}, k_{y,\text{inc}}) = -\frac{ik_{x,\text{inc}}\sigma^3}{\sqrt{8\pi^2}} \times \exp\left(-\frac{\sigma^2(k_{x,\text{inc}}^2 + k_{y,\text{inc}}^2)}{4}\right), \quad (27)$$

$$G_{1,1}(k_{x,\text{inc}}, k_{y,\text{inc}}) = -\frac{k_{x,\text{inc}}k_{y,\text{inc}}\sigma^4}{2\pi} \times \exp\left(-\frac{\sigma^2(k_{x,\text{inc}}^2 + k_{y,\text{inc}}^2)}{4}\right).$$

Пунктирная окружность на рис. 3а показывает «внешнюю границу» спектров (27) при  $\sigma = 20$  мкм. Вне данной окружности значения спектров не превышают  $1/e^2$  от своих максимальных значений. В связи с тем, что спектры (27) попадают в область, в которой ПФ хорошо аппроксимируется ПФ дифференциатора второго порядка (рис. 3), то в данном случае (при  $\sigma = 20$  мкм) можно ожидать хорошего качества вычисления второй производной  $\partial^2 E_{\text{inc},x} / \partial x_{\text{inc}}^2$ .

На рис. 4 показаны  $x$ -компоненты электрического поля падающих пучков (моды Эрмита-Гаусса  $U_{1,0}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$  и  $U_{1,1}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$ ), модули численно рассчитанных по формуле (13)  $x$ -компонент электриче-

ского поля отраженных пучков, а также модельные функции

$$E_{\text{model},x}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}}) = -c_{x,2} \frac{\partial^2}{\partial x_{\text{refl}}^2} U_{m,n}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}}) = -\frac{2c_{x,2}(\sigma^2 - 2x_{\text{refl}}^2)}{\sigma^4} U_{m,n}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}}), \quad (28)$$

где  $(m, n) = (1, 0)$  и  $(m, n) = (1, 1)$ . Данные модельные функции соответствуют «чистым» вторым производным по переменной  $x_{\text{refl}}$  от мод Эрмита-Гаусса  $U_{1,0}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}})$  и  $U_{1,1}(x_{\text{refl}}, y_{\text{refl}})$ , взятым с коэффициентом  $-c_{x,2}$ , что соответствует преобразованию (24) при  $c_{y,2} = 0$ .

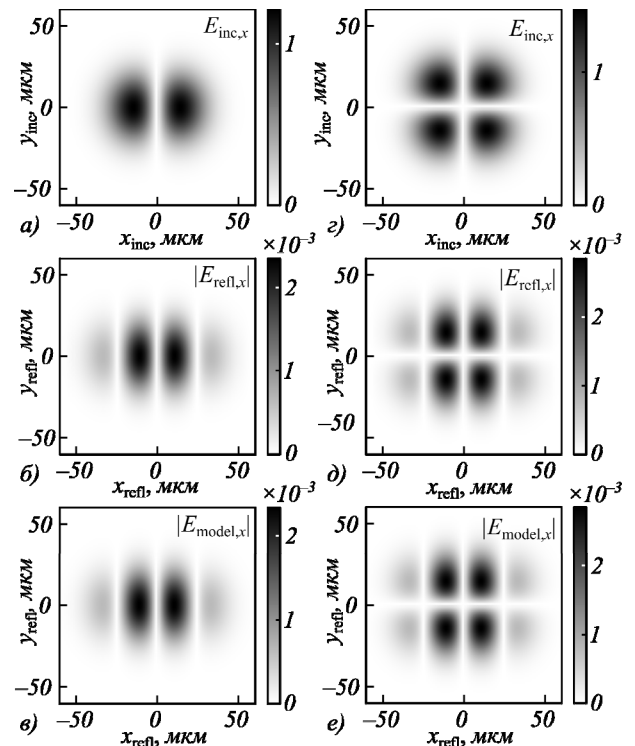


Рис. 4. Профили абсолютных величин  $x$ -компонент электрического поля падающего, отраженного и модельного пучков для моды  $U_{1,0}$  (а-в) и моды  $U_{1,1}$  (г-е)

Рис. 4 показывает высокое качество вычисления второй производной. Действительно, численно рассчитанные  $x$ -компоненты электрического поля отраженных пучков (рис. 4б, д) визуально неотличимы от модельных функций (рис. 4в, е). Нормированное среднеквадратичное отклонение (НСКО) численно рассчитанных компонент  $E_{\text{refl},x}$  от модельных функций  $E_{\text{model},x}$  составляет всего 0,61 % для моды Эрмита-Гаусса  $U_{1,0}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$  и 0,78 % для моды Эрмита-Гаусса  $U_{1,1}(x_{\text{inc}}, y_{\text{inc}})$ .

### 5. Расчет двойной МДМ-структуры для вычисления оператора Лапласа

#### 5.1. Расчет двойной МДМ-структуры

Исследуем теперь возможность вычисления оператора Лапласа с помощью двойной МДМ-

структуры. Согласно (22–24), для этого необходимо выполнение условия  $c_{x,2} = c_{y,2}$ . Первоначально было выполнено исследование достижимости указанного условия для двойных МДМ-структур “Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu–SiO<sub>2</sub>–Cu” при длине волны  $\lambda = 630$  нм, аналогичных структуре, рассмотренной выше. Проведенные расчеты показали, что для выбранных материалов слоев (медь и диоксид кремния) не удастся обеспечить выполнение требуемого условия  $c_{x,2} = c_{y,2}$  за счет выбора параметров  $(\theta, h_m)$ . Поэтому для дальнейших исследований были выбраны более сложные двойные МДМ-структуры “Au–SiO<sub>2</sub>–Ag–SiO<sub>2</sub>–Ag–TiO<sub>2</sub>–Au”, имеющие различные материалы металлических и диэлектрических слоев. Структуры данного типа рассчитывались при различных значениях  $(\theta, h_m)$  из условия получения нуля второго порядка для ТМ-поляризации при длине волны  $\lambda = 630$  нм. Для выбранной длины волны использовались следующие значения показателей преломления для указанных материалов:  $n_{Au} = 0,19 + 3,41i$  (Au),  $n_{Ag} = 0,19 + 3,41i$  (Ag),  $n_{TiO_2} = 2,59$  (TiO<sub>2</sub>). Для каждой из рассчитанных структур в окрестности точки  $\mathbf{k}_{\perp,inc} = (0, 0)$  вычислялась ПФ (14) и затем с использованием формул численного дифференцирования рассчитывались коэффициенты квадратичной аппроксимации  $c_{x,2}, c_{y,2}$ . Как и ранее, для расчета коэффициентов отражения, входящих в ПФ (14), использовался численно устойчивый метод [29].

В результате расчетов была найдена двойная МДМ-структура, для которой при параметрах  $\theta = 36^\circ$ ,  $h_m = 105$  нм условие  $c_{x,2} = c_{y,2}$  выполняется с высокой точностью. Для данной структуры  $c_{x,2} = 0,057 \times e^{0,940i}$  мкм<sup>2</sup>,  $c_{y,2} = 0,056 \times e^{0,940i}$  мкм<sup>2</sup>, так что относительная ошибка  $|c_{x,2} - c_{y,2}|/|c_{x,2}|$  выполнения условия  $c_{x,2} = c_{y,2}$  составляет всего 0,017. Толщины слоев (начиная с верхнего) рассчитанной структуры равны

$$h_{MDM,2} = (10,0; 132,3; 8,6; 52,2; 33,6; 74,4; 105,0) \text{ нм.} \quad (29)$$

На рис. 5 показан модуль ПФ (14), рассчитанный для структуры (29). В рассматриваемой области  $|k_{x,inc}| \leq 0,08k_0$ ,  $|k_{y,inc}| \leq 0,08k_0$  ПФ хорошо аппроксимируется квадратичной функцией (22) при приведенных выше значениях коэффициентов  $c_{x,2}$  и  $c_{y,2}$ . Действительно, на рис. 5б, в показаны сечения модуля и аргумента ПФ при  $k_{y,inc} = 0$  (непрерывная линия) и при  $k_{x,inc} = 0$  (штриховая линия). Сечения модуля близки между собой и с высокой точностью аппроксимируются квадратичной функцией  $0,0565 \cdot k_{x,inc}^2$  (среднеквадратичное отклонение расчетных профилей от квадратичной функции не превышает 1%). Сечения фазы (рис. 5в) также близки между собой и отличаются от расчетного значения  $\varphi = 0,940$  не более чем на 0,1.

### 5.2. Результаты численного моделирования

Исследуем применение двойной МДМ-структуры (29) для вычисления оператора Лапласа. Как и в

пункте 4,2, будем считать, что  $x$ -компоненты электрических полей падающих пучков соответствуют модам Эрмита–Гаусса  $U_{1,0}(x_{inc}, y_{inc})$  и  $U_{1,1}(x_{inc}, y_{inc})$  при  $\sigma = 20$  мкм. В рассматриваемом случае спектры пучков попадают в область квадратичности ПФ (внешняя граница спектров по уровню  $1/e^2$  показана пунктирной окружностью на рис. 5а) и поэтому можно ожидать хорошего качества вычисления оператора Лапласа.

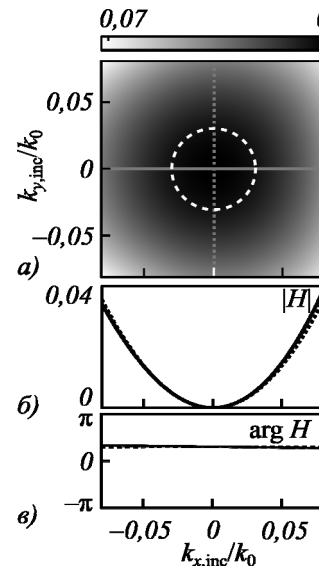


Рис. 5. а) Модуль ПФ двойной МДМ-структуры (29). Белой пунктирной окружностью показана внешняя граница спектров падающих пучков по уровню  $1/e^2$ . б), в) Сечения модуля и фазы ПФ при  $k_{y,inc} = 0$  (сплошные линии) и при  $k_{x,inc} = 0$  (штриховые линии)

На рис. 6 показаны  $x$ -компоненты электрического поля падающих пучков, модули численно рассчитанных по формуле (13)  $x$ -компонент электрического поля отраженных пучков, а также модельные функции

$$E_{model,x}(x_{refl}, y_{refl}) = \left[ -c_{x,2} \frac{\partial^2}{\partial x_{refl}^2} - c_{x,2} \frac{\partial^2}{\partial y_{refl}^2} \right] \times U_{m,n}(x_{refl}, y_{refl}) = -\frac{2c_{x,2}(\sigma^2 - 2x_{refl}^2) + 2c_{y,2}(\sigma^2 - 2y_{refl}^2)}{\sigma^4} \times U_{m,n}(x_{refl}, y_{refl}), \quad (30)$$

где  $(m, n) = (1, 0)$  и  $(m, n) = (1, 1)$ . В данном случае модельные функции являются результатом применения оператора Лапласа с множителем  $-c_{x,2}$  к функциям  $U_{1,0}(x_{refl}, y_{refl})$ ,  $U_{1,1}(x_{refl}, y_{refl})$ , что соответствует преобразованию (24) при  $c_{x,2} = c_{y,2}$ .

Рис. 6 показывает высокое качество вычисления оператора Лапласа. Действительно, численно рассчитанные  $x$ -компоненты электрического поля отраженных пучков (рис. 6б, д) визуально очень похожи на модельные функции (рис. 6в, е). НСКО численно рассчитанных компонент  $E_{refl,x}$  от модельных функций  $E_{model,x}$  составляет всего 0,62% для моды Эрмита–



Гаусса  $U_{1,0}(x_{inc}, y_{inc})$  и 0,99% для моды Эрмита–Гаусса  $U_{1,1}(x_{inc}, y_{inc})$ .

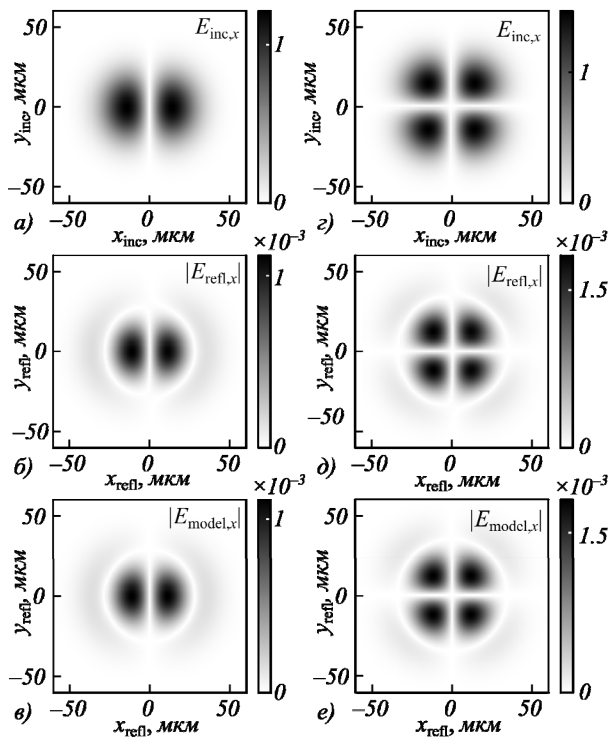


Рис. 6. Профили абсолютных величин  $x$ -компонент электрического поля падающего, отраженного и модельного пучков для моды  $U_{1,0}$  (а-в) и моды  $U_{1,1}$  (г-е)

Представляет интерес исследование точности вычисления оператора Лапласа при различных значениях  $\sigma$ , определяющих размеры падающих пучков. Отметим, что при уменьшении  $\sigma$  увеличивается спектральная ширина пучка. Поэтому с уменьшением  $\sigma$  следует ожидать увеличения ошибки вычисления оператора Лапласа (поскольку часть спектра оказывается за интервалом квадратичности ПФ) и увеличения амплитуды отраженного пучка. Данное поведение подтверждается рис. 7, где для мод Эрмита–Гаусса  $U_{1,0}(x_{refl}, y_{refl})$  и  $U_{1,1}(x_{refl}, y_{refl})$  для различных  $\sigma$  приведены рассчитанные значения ошибки вычисления оператора Лапласа (т.е. НСКО компонент  $E_{refl,x}$ , рассчитанных по формуле (13), от модельных функций  $E_{model,x}$  (30)), а также значения логарифма максимальных значений амплитуд компонент  $E_{x,refl}$  отраженного пучка, нормированных на максимальные амплитуды компонент  $E_{x,inc}$ . Согласно рис. 7, значение НСКО становится менее 5% для обеих мод уже при  $\sigma > 8$  мкм. При этом максимальные значения нормированных амплитуд компонент  $E_{x,refl}$  отраженных пучков становятся менее 0,017.

**Заключение**

Рассмотрено представление трехмерного линейно-поляризованного светового пучка, наклонно падающего на слоистую структуру, в базисе ТЕ- и ТМ-поляризованных плоских волн. Получена ПФ, описы-

вающая преобразование основной поперечной компоненты электрического поля падающего пучка, происходящее при отражении пучка от слоистой структуры. Показано, что при наклонном падении линейно-поляризованного пучка на слоистую металлодиэлектрическую структуру, состоящую из двух трехслойных структур «металл-диэлектрик-металл» и имеющую ноль второго порядка по пространственной частоте, возможно оптическое выполнение операции пространственного дифференцирования второго порядка, соответствующей взвешенной сумме вторых производных по пространственным координатам. Частными случаями данной операции являются операции вычисления «одиночной» второй производной по одной из пространственных координат и оператора Лапласа.

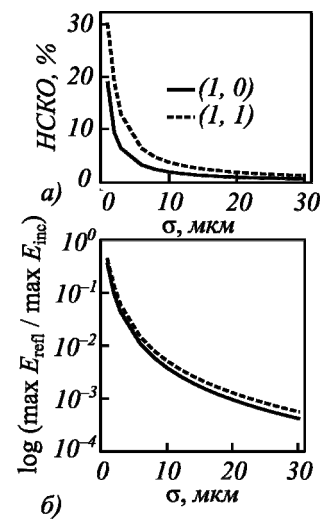


Рис. 7. Зависимости ошибки вычисления оператора Лапласа (а) и логарифма нормированной максимальной амплитуды отраженного сигнала (б) от параметра  $\sigma$  для моды  $U_{1,0}$  (сплошная линия) и моды  $U_{1,1}$  (точечная линия)

Рассчитаны слоистые металлодиэлектрические структуры для оптического вычисления одиночной второй производной и оператора Лапласа при отражении в геометрии наклонного падения. В рамках численного моделирования на примере мод Эрмита–Гаусса (1,0) и (1,1) показано, что указанные операции могут быть реализованы с высоким качеством (при нормированной среднеквадратичной ошибке менее 1%).

Полученные результаты могут найти применение при создании систем аналоговых оптических вычислений и оптической обработки информации.

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00514; в части расчета и исследования двойных МДМ-структур) и в рамках государственного задания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (в части разработки программных средств для численного моделирования дифракции трехмерных оптических пучков).

## References

- [1] Silva A, Monticone F, Castaldi G, Galdi V, Alù A, Engheta N. Performing mathematical operations with metamaterials. *Science* 2014; 343(6167): 160-163. DOI: 10.1126/science.1242818.
- [2] Zhou Y, Zheng H, Kravchenko II, Valentine J. Flat optics for image differentiation. *Nat Photonics* 2020; 14: 316-323. DOI: 10.1038/s41566-020-0591-3.
- [3] Estakhri NM, Edwards B, Engheta N. Inverse-designed metastructures that solve equations. *Science* 2019; 363(6433): 1333-1338. DOI: 10.1126/science.aaw2498.
- [4] Bykov DA, Doskolovich LL, Soifer VA. Temporal differentiation of optical signals using resonant gratings. *Opt Lett* 2011; 36(17): 3509-3511. DOI: 10.1364/OL.36.003509.
- [5] Bykov DA, Doskolovich LL, Soifer VA. Single-resonance diffraction gratings for time-domain pulse transformations: integration of optical signals. *J Opt Soc Am A* 2012; 29(8): 1734-1740. DOI: 10.1364/JOSAA.29.001734.
- [6] Dong Z, Si J, Yu X, Deng X. Optical spatial differentiator based on subwavelength high-contrast gratings. *Appl Phys Lett* 2018; 112(18): 181102. DOI: 10.1063/1.5026309.
- [7] Bykov DA, Doskolovich LL, Morozov AA, Podlipnov VV, Bezus EA, Verma P, Soifer VA. First-order optical spatial differentiator based on a guided-mode resonant grating. *Opt Express* 2018; 26(8): 10997-11006. DOI: 10.1364/OE.26.010997.
- [8] Yang W, Yu X, Zhang J, Deng X. Plasmonic transmitted optical differentiator based on the subwavelength gold gratings. *Opt Lett* 2020; 45(8): 2295-2298. DOI: 10.1364/OL.390566.
- [9] Huang J, Zhang J, Zhu T, Ruan Z. Spatiotemporal differentiators generating optical vortices with transverse orbital angular momentum and detecting sharp change of pulse envelope. *Laser Photonics Rev* 2022; 16(5): 2100357. DOI: 10.1002/lpor.202100357.
- [10] Doskolovich LL, Bykov DA, Bezus EA, Soifer VA. Spatial differentiation of optical beams using phase-shifted Bragg grating. *Opt Lett* 2014; 39(5): 1278-1281. DOI: 10.1364/OL.39.001278.
- [11] Golovastikov NV, Doskolovich LL, Bezus EA, Bykov DA, Soifer VA. An optical differentiator based on a three-layer structure with a W-shaped refractive index profile. *J Exp Theor Phys* 2018; 127(2): 202-209. DOI: 10.1134/S1063776118080174.
- [12] Kashapov AI, Doskolovich LL, Bezus EA, Bykov DA, Soifer VA. Spatial differentiation of optical beams using a resonant metal-dielectric-metal structure. *J Opt* 2021; 23(2): 023501. DOI: 10.1088/2040-8986/abe63b.
- [13] Doskolovich LL, Kashapov AI, Bezus EA, Bykov DA. Optical properties of cascaded metal-dielectric-metal structures and their application to the differentiation of optical signals. *Photonics Nanostruct* 2022; 52: 101069. DOI: 10.1016/j.photonics.2022.101069.
- [14] Zhu T, Zhou Y, Lou Y, Ye H, Qiu M, Ruan Z, Fan S. Plasmonic computing of spatial differentiation. *Nat Commun* 2017; 8: 15391. DOI: 10.1038/ncomms15391.
- [15] Zhou Y, Zhan J, Chen R, Chen W, Wang Y, Shao Y, Ma Y. Analogue optical spatiotemporal differentiator. *Adv Optical Mater* 2021; 9(10): 2002088. DOI: 10.1002/adom.202002088.
- [16] Berger NK, Levit B, Fischer B, Kulishov M, Plant DV, Azaña J. Temporal differentiation of optical signals using a phase-shifted fiber Bragg grating. *Opt Express* 2007; 15(2): 371-381. DOI: 10.1364/OE.15.000371.
- [17] Kulishov M, Azaña J. Design of high-order all-optical temporal differentiators based on multiple-phase-shifted fiber Bragg gratings. *Opt Express* 2007; 15(10): 6152-6166. DOI: 10.1364/oe.15.006152.
- [18] Dong J, Zheng A, Gao D, Liao S, Lei L, Huang D, Zhang X. High-order photonic differentiator employing on-chip cascaded microring resonators. *Opt Lett* 2013; 38(5): 628-630. DOI: 10.1364/OL.38.000628.
- [19] Kazanskiy NL, Serafimovich PG, Khonina SN. Use of photonic crystal cavities for temporal differentiation of optical signals. *Opt Lett* 2013; 38(7): 1149-1151. DOI: 10.1364/OL.38.001149.
- [20] Karimi A, Zarifkar A, Miri M. Subpicosecond flat-top pulse shaping using a hybrid plasmonic microring-based temporal differentiator. *J Opt Soc Am B* 2019; 36(7): 1738-1747. DOI: 10.1364/JOSAB.36.001738.
- [21] Pors A, Nielsen MG, Bozhevolnyi SI. Analog computing using reflective plasmonic metasurfaces. *Nano Lett* 2015; 15(1): 791-797. DOI: 10.1021/nl5047297.
- [22] Chizari A, Abdollahramezani S, Jamali MV, Salehi JA. Analog optical computing based on a dielectric meta-reflect array. *Opt Lett* 2016; 41(15), 3451-3454. DOI: 10.1364/OL.41.003451.
- [23] Bykov DA, Doskolovich LL, Bezus EA, Soifer VA. Optical computation of the Laplace operator using phase-shifted Bragg grating. *Opt Express* 2014; 22(21): 25084-25092. DOI: 10.1364/OE.22.025084.
- [24] Wesemann L, Panchenko E, Singh K, Gaspera ED, Gómez DE, Davis TJ, Roberts A. Selective near-perfect absorbing mirror as a spatial frequency filter for optical image processing. *APL Photonics* 2019; 4(10): 100801. DOI: 10.1063/1.5113650.
- [25] Guo C, Xiao M, Minkov M, Shi Y, Fan S. Photonic crystal slab Laplace operator for image differentiation. *Optica* 2018; 5(3): 251-256. DOI: 10.1364/OPTICA.5.000251.
- [26] Pan D, Wan L, Ouyang M, Zhang W, Potapov AA, Liu W, Liang Z, Feng T, Li Z. Laplace metasurfaces for optical analog computing based on quasi-bound states in the continuum. *Photon Res* 2021; 9(9): 1758-1766. DOI: 10.1364/PRJ.426827.
- [27] Born M, Wolf E. Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2013. ISBN: 0-521-64222-1.
- [28] Polyanskiy MN. Refractive index database. Source: <<https://refractiveindex.info>>.
- [29] Moharam MG, Pommet DA, Grann EB, Gaylord TK. Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach. *J Opt Soc Am A* 1995; 12(5): 1077-1086. DOI: 10.1364/JOSAA.12.001077.

## Сведения об авторах

**Кашапов Артем Ильясович**, в 2022 году с отличием окончил бакалавриат Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королёва по специальности «Прикладные математика и физика». E-mail: [ar.kashapov@outlook.com](mailto:ar.kashapov@outlook.com)

**Досколович Леонид Леонидович**, в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, главный научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета и ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли Самарского университета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники. E-mail: [leonid@ipsiras.ru](mailto:leonid@ipsiras.ru)

**Безус Евгений Анатольевич**, в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладная математика и информатика». Кандидат физико-математических наук (2012 г.), научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Области научных интересов: нанофотоника, плазмоника, электромагнитная теория дифракции. E-mail: [evgeni.bezus@gmail.com](mailto:evgeni.bezus@gmail.com)

**Головастикова Никита Владимирович**, в 2014 году с отличием окончил магистратуру Самарского государственного аэрокосмического университета по специальности 0501 «Прикладная математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2018 г.), в настоящее время работает заведующим НИЛ-602 и доцентом Самарского университета и научным сотрудником в лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, нанофотоника. E-mail: [nikita.golovastikov@gmail.com](mailto:nikita.golovastikov@gmail.com)

**Быков Дмитрий Александрович**, в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика и информатика». Доктор физико-математических наук (2017 г.), старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и доцент Самарского университета. Области научных интересов: оптика резонансных дифракционных структур, магнитооптика, электромагнитная теория дифракции. E-mail: [bykovd@gmail.com](mailto:bykovd@gmail.com)

---

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 30 марта 2023 г. Окончательный вариант – 5 июля 2023 г.

---

---

# Second-order optical differentiation of a 3D light beam at oblique incidence using a multilayer metal-dielectric structure

A.I. Kashapov<sup>1,2</sup>, L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>, E.A. Bezus<sup>1,2</sup>, N.V. Golovastikov<sup>1,2</sup>, D.A. Bykov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

<sup>2</sup> Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

We investigate the optical implementation of a second-order differentiation operation using a metal-dielectric layered structure in the oblique incidence geometry. It is shown that the transformation of the profile of a three-dimensional light beam occurring upon its reflection from a layered structure can be described using the theory of linear systems. The transfer function of the corresponding linear system is obtained, and it is shown that if a layered structure has a reflection zero of the second order with respect to the spatial frequency for one of the polarizations, the transformation performed by the structure corresponds to the weighted sum of the second derivatives of the incident beam profile with respect to the spatial coordinates. Using the presented theoretical description, layered metal-dielectric structures for computing the second derivative with respect to one of the spatial coordinates and for computing the Laplace operator of the profile of a three-dimensional linearly polarized light beam are calculated. The presented numerical simulation results demonstrate high-quality computation of these operators.

**Keywords:** optical differentiation, second derivative, Laplace operator, layered structure, transfer function.

**Citation:** Kashapov AI, Doskolovich LL, Bezus EA, Golovastikov NV, Bykov DA. Second-order optical differentiation of a 3D light beam at oblique incidence using a multilayer metal-dielectric structure. *Computer Optics* 2023; 47(6): 845-855. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1311

**Acknowledgements:** This work was funded by the Russian Science Foundation under project No 19-19-00514 (design and investigation of double MDM structures) and the RF Ministry of Science and Higher Education under the government project of the Federal Research Center “Crystallography and Photonics” RAS under agreement 007-GZ/Ch3363/26 (development of a software tool for the numerical simulation of diffraction of three-dimensional optical beams).

---

## Authors' information

**Artem Ilyasovich Kashapov** graduated with honors (2022) from Samara National Research University with a major in Applied Mathematics and Physics. E-mail: [ar.kashapov@outlook.com](mailto:ar.kashapov@outlook.com)

**Leonid Leonidovich Doskolovich** graduated with honours (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara State Aerospace University. Main researcher of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, professor at Technical Cybernetics department of National Research University, senior researcher at the Breakthrough Technologies for Earth’s Remote Sensing laboratory at SSAU. His leading research interests include diffractive optics, laser information technologies, nanophotonics. E-mail: [leonid@ipsiras.ru](mailto:leonid@ipsiras.ru)

**Evgeni Anatolievich Bezus** graduated with honors (2009) from the Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Candidate in Physics and Mathematics (2012). Currently he is a researcher at the Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute (IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”) and an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara University. His current research interests include nanophotonics, plasmonics and electromagnetic diffraction theory. E-mail: [evgeni.bezus@gmail.com](mailto:evgeni.bezus@gmail.com)

**Nikita Vladimirovich Golovastikov** graduated with honors (2014) from Samara State Aerospace University, majoring in Applied Mathematics and Physics. Candidate in Physics and Mathematics (2018). Currently, he is a head of laboratory and an associate professor at Samara University and a researcher at the Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute (IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”). Current research interests include diffractive optics and nanophotonics. E-mail: [nikita.golovastikov@gmail.com](mailto:nikita.golovastikov@gmail.com)

---

---

**Dmitry Alexandrovich Bykov** graduated with honors (2009) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Doctor of Physics and Mathematics (2017). Senior researcher at Samara University and at the Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include optics of resonant diffractive structures, magneto-optics of nanostructured materials, and electromagnetic diffraction theory  
E-mail: [bykovd@gmail.com](mailto:bykovd@gmail.com).

---

*Received March 30, 2023. The final version – July 5, 2023.*

---