

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

### Поперечный поток энергии в остром фокусе света с циркулярно-азимутальной поляризацией высокого порядка

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, С.С. Стафеев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

#### Аннотация

Рассмотрена острая фокусировка света с циркулярно-азимутальной поляризацией  $m$ -го порядка. Это новый тип неоднородной гибридной поляризации, объединяющий свойства цилиндрической поляризации  $m$ -го порядка и круговой поляризации. С помощью формализма Ричардса–Вольфа получены аналитические выражения в фокусе для проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей, распределения интенсивности, проекций вектора Пойнтинга и спинового углового момента. Теоретически и численно показано, что интенсивность в фокусе имеет  $2(m+1)$  локальных максимумов, расположенных вдоль замкнутого контура с нулевой интенсивностью в центре (на оптической оси). Показано, что в фокусе имеется  $4m$  вихрей поперечного потока энергии, центры которых расположены между локальными максимумами интенсивности. Также показано, что поперечный поток энергии меняет направление вращения  $2(2m+1)$  раза при обходе в плоскости фокуса вокруг оптической оси. Интересно, что продольная проекция спинового углового момента в фокусе меняет знак  $4m$  раза. В тех областях плоскости фокуса, где поперечный поток энергии вращается против часовой стрелки, продольная проекция спинового углового момента положительная, а вектор поляризации вращается в плоскости фокуса против часовой стрелки. И наоборот, где поток энергии вращается по часовой стрелке, там и вектор поляризации вращается по часовой стрелке, а продольная проекция спинового углового момента отрицательная. Моделирование подтверждает выводы теории.

**Ключевые слова:** острая фокусировка, гибридная поляризация, вектор Пойнтинга, спиновый угловой момент.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Поперечный поток энергии в остром фокусе света с циркулярно-азимутальной поляризацией высокого порядка / В.В. Котляр, С.С. Стафеев // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 3. – С. 311-318. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-839.

**Citation:** Kotlyar VV, Stafeev SS. A transverse energy flow at the tight focus of light with higher-order circular-azimuthal polarization. Computer Optics 2021; 45(3): 311-318. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-839.

#### Введение

Строгое описание электромагнитного поля с линейной поляризацией в остром фокусе было получено в классической работе Ричардса–Вольфа [1]. После этой работы появилось множество других работ, в которых на основе формализма Ричардса–Вольфа [1] изучалось световое поле с более общим состоянием поляризации в фокусе. В [2] изучалась острая фокусировка света с радиальной поляризацией. В [3, 4] рассматривалась спин-орбитальная конверсия при фокусировке света с круговой поляризацией. В [5, 6] исследовалась фокусировка оптического вихря с эллиптической поляризацией. В [7] приведена концепция цилиндрических векторных пучков, которые включают в себя пучки с радиальной и азимутальной поляризацией. В [8–10] рассмотрена фокусировка

света с гибридной поляризацией. Транспонированный вектор Джонса для такой поляризации имеет вид  $\mathbf{E} = (\exp(i\delta), \exp(-i\delta))$ , где  $\delta = \alpha r + \beta$ ,  $r$  – радиальная переменная,  $\alpha$ ,  $\beta$  – постоянные,  $\mathbf{E}$  – начальное световое поле. Такая гибридная поляризация на некоторых радиусах линейная, а на других радиусах круговая. Но данная поляризация не зависит от полярного угла  $\phi$ . Более общий тип гибридной поляризации рассмотрен в [11]. В этой работе рассматривается острая фокусировка с начальным полем, транспонированный вектор Джонса которого уже зависит от полярного угла  $\mathbf{E} = (\cos\phi \cos\gamma - i\cos(2\psi - \phi) \sin\gamma, \sin\phi \cos\gamma - i\sin(2\psi - \phi) \sin\gamma)$ , где  $\phi$  – полярный угол,  $\gamma$ ,  $\psi$  – постоянные. У такого поля при разном значении полярного угла поляризация либо линейная, либо круговая. Но аналитических выражений для поля и проекций вектора Пойнтинга для такого типа гибри-

ных полей не получено в [11]. В [12] рассмотрена гибридная поляризация вида  $\mathbf{E} = (\exp(i\delta) \sin\varphi, \cos\varphi)$ , где также  $\varphi$  – полярный угол, а  $\delta$  – постоянная. Такой тип поляризации является частным случаем (при  $m=1$ ) поляризации, рассмотренной в нашей работе. И кроме того, в [12] не приведено аналитических выражений для проекций вектора Пойнтинга. В [13, 14] исследуются пучки с произвольной поляризацией на сфере Пуанкаре. Для таких пучков начальный (до фокусировки) вектор поляризации можно представить в виде  $\mathbf{E} = (\exp(-i\varphi + i\alpha) \cos\beta + \exp(i\varphi + i\alpha) \sin\beta, i\exp(-i\varphi + i\alpha) \cos\beta + i\exp(i\varphi + i\alpha) \sin\beta)$ , где  $l$  – топологический заряд,  $\varphi$  – полярный угол,  $(\alpha, \beta)$  – углы на сфере Пуанкаре (постоянные). Заметим, что в [13, 14] есть эксперимент по исследованию таких пучков, но нет теории и не получены выражения для поля, интенсивности и проекций вектора Пойнтинга в фокусе. В [15, 16] рассматривается острая фокусировка света с цилиндрической поляризацией высшего порядка, когда начальное поле можно представить в виде  $\mathbf{E} = (\cos(p\varphi + \alpha), \sin(p\varphi + \alpha))$ , где  $p$  – порядок цилиндрической поляризации,  $\alpha$  – постоянная. В [17] теоретически исследуются вихревые пучки с произвольным топологическим зарядом  $m$  и цилиндрической поляризацией целого порядка  $n$ . В этом случае начальное поле имеет вид:  $\mathbf{E} = \exp(im\varphi)(\cos(n\varphi), \sin(n\varphi))$ .

В данной работе теоретически рассматривается острая фокусировка нового типа гибридной поляризации, отличной от рассмотренных выше. В работе исследуется световое поле с начальной поляризацией вида  $\mathbf{E} = (-i \sin(m\varphi), \cos(m\varphi))$ . В этом случае в начальном поле при изменении полярного угла поляризация меняется от круговой, эллиптической до линейной, и так повторяется  $m$  раз за полный оборот полярного угла. В работе получены аналитические выражения для проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей в фокусе, а также для распределения интенсивности, проекций вектора Пойнтинга и вектора спинового углового момента.

### 1. Интенсивность света с гибридной поляризацией в фокусе

Рассмотрим амплитуды начальных векторов напряженности электрического и магнитного полей с гибридной поляризацией  $m$ -го порядка в следующем виде:

$$\mathbf{E} = A(\theta) \begin{pmatrix} -i \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = A(\theta) \begin{pmatrix} -\cos m\varphi \\ -i \sin m\varphi \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – вектора напряженности электрического и магнитного полей,  $m$  – целое положительное число, определяющее порядок цилиндрической поляризации,  $A(\theta)$  – амплитуда начального светового поля, в зависимости от угла наклона к оптической оси. Поляризация поля (1) называется гибридной, так как она объединяет свойства цилиндрической поляризации  $m$ -го порядка и круговой поляризации. На разных

азимутальных углах  $\varphi$  поляризация в (1) будет либо круговой (при  $\varphi = \pi n / (4m), n = 1, 3, 5, \dots$ ), либо эллиптической, либо линейной (при  $\varphi = \pi n / (2m), n = 0, 1, 2, \dots$ ). Из (1) также следует, что при  $m=0$  у поля будет однородная линейная поляризация. С помощью формализма Ричардса–Вольфа [1] можно найти проекции вектора напряженности электрического поля в остром фокусе апланатической системы для начального поля вида (1):

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-i^m}{2} \left[ I_{0,m} \sin(m\varphi) + \frac{(1+i)}{2} I_{2,m+2} \sin((m+2)\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-i)}{2} I_{2,m-2} \sin((m-2)\varphi) \right], \\ E_y &= \frac{-i^m}{2} \left[ i I_{0,m} \cos(m\varphi) - \frac{(1+i)}{2} I_{2,m+2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos((m+2)\varphi) + \frac{(1-i)}{2} I_{2,m-2} \cos((m-2)\varphi) \right], \\ E_z &= \frac{i^m}{2} \left[ (1+i) I_{1,m+1} \sin((m+1)\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + (1-i) I_{1,m-1} \sin((m-1)\varphi) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

и магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{i^m}{2} \left[ i I_{0,m} \cos(m\varphi) + \frac{(1+i)}{2} I_{2,m+2} \cos((m+2)\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-i)}{2} I_{2,m-2} \cos((m-2)\varphi) \right], \\ H_y &= \frac{i^m}{2} \left[ -I_{0,m} \sin(m\varphi) + \frac{(1+i)}{2} I_{2,m+2} \sin((m+2)\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-i)}{2} I_{2,m-2} \sin((m-2)\varphi) \right], \\ H_z &= \frac{i^m}{2} \left[ (1-i) I_{1,m+1} \cos((m+1)\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - (1+i) I_{1,m-1} \cos((m-1)\varphi) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} I_{\nu,\mu} &= \left( \frac{\pi f}{\lambda} \right) \int_0^{\theta_0} \sin^{\nu+1} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos^{3-\nu} \left( \frac{\theta}{2} \right) \times \\ &\quad \times \cos^{1/2}(\theta) A(\theta) e^{ikz \cos\theta} J_\mu(x) d\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda$  – длина волны света,  $f$  – фокусное расстояние апланатической системы,  $x = krs \sin\theta$ ,  $J_\mu(x)$  – функция Бесселя первого рода и  $NA = \sin\theta_0$  – числовая апертура. Начальная функция амплитуды  $A(\theta)$  (предположим, что это действительная функция) может быть константой (плоская волна) или в виде Гауссова пучка

$$A(\theta) = \exp \left( \frac{-\gamma^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_0} \right), \quad (5)$$

где  $\gamma$  – постоянная. Для проверки уравнений (2) получим из них известные выражения [1, 4] для светового поля с линейной поляризацией:

$$\begin{aligned}
 E_{x0} &= \frac{-i}{2} I_{2,2} \sin(2\varphi), \\
 E_y &= \frac{-i}{2} [I_{0,0} - I_{2,2} \cos(2\varphi)], \\
 E_z &= I_{1,1} \sin(\varphi).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Отличие в том, что вектор линейной поляризации в (1) направлен вдоль  $y$ , а в [1, 4] – вдоль  $x$ . Из (2) можно найти распределение интенсивности электрического поля в плоскости фокуса ( $z=0$ ):

$$\begin{aligned}
 I_m &= \frac{1}{4} [I_{0,m}^2 + I_{2,m+2}^2 + I_{2,m-2}^2 - I_{0,m} (I_{2,m+2} + I_{2,m-2})] + \\
 &+ \frac{1}{2} (I_{1,m+1}^2 + I_{0,m} I_{2,m+2}) \sin^2((m+1)\varphi) + \\
 &+ \frac{1}{2} (I_{1,m-1}^2 + I_{0,m} I_{2,m-2}) \sin^2((m-1)\varphi).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Из (7) при  $m=0$  следует известное выражение для распределения интенсивности в остром фокусе для начального светового поля с линейной поляризацией [1, 18]:

$$I_0 = \frac{1}{4} (I_{0,0}^2 + 2I_{1,1}^2 + 2I_{2,2}^2) - \frac{1}{4} (I_{1,1}^2 + I_{0,0} I_{2,2}) \cos(2\varphi). \tag{8}$$

Из (8) видно, что интенсивность имеет два локальных максимума, лежащих на вертикальной оси (при  $\varphi = \pm \pi/2$ ), так как начальная поляризация линейная и направлена вдоль оси  $y$ . При  $m=1$  из (7) следует, что интенсивность в фокусе для гибридного поля (1) первого порядка имеет вид:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{4} (I_{0,1}^2 + I_{1,2}^2 + I_{2,1}^2 + I_{2,3}^2 + I_{0,1} I_{2,1}) - \\
 &- \frac{1}{4} (I_{1,2}^2 + I_{0,1} I_{2,3}) \cos(4\varphi).
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Из (9) следует, что распределение интенсивности в фокусе для гибридного поля (1) первого порядка (азимутальная круговая поляризация) имеет 4 локальных максимума (при  $\varphi = \pm \pi/4, \pm 3\pi/4$ ). И в общем случае при произвольном  $m$  распределение интенсивности (7) будет иметь  $2(m+1)$  максимумов, лежащих на лучах, образованных углами  $\varphi = (\pi + 2\pi n) / 2(m+1), n = 0, 1, 2, \dots, 2m+1$ . Моделирование подтверждает эти выводы.

### 2. Поток энергии в фокусе для света с гибридной поляризацией

В начальном поле (1) имеется только продольная проекция потока энергии, так как нет продольной составляющей электрического и магнитного полей и нет поперечных компонент вектора Пойнтинга. Но зато есть продольная составляющая спинового углового момента (СУМ). Поэтому из-за эффекта спин-орбитальной конверсии следует ожидать, что в фокусе сформируется поперечный поток энергии. Пока-

жем, что это действительно так. Найдем проекции вектора Пойнтинга (потока энергии)

$$\mathbf{P} = \text{Re}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}), \tag{10}$$

где  $\text{Re}$  – реальная часть числа,  $\times$  – знак векторного произведения двух векторов,  $\mathbf{E}^*$  – комплексное сопряжение, в плоскости фокуса ( $z=0$ ) для начального поля с гибридной поляризацией (1). Для этого подставим проекции электрического (2) и магнитного (3) полей в (10), получим:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{4} [I_{0,m} (I_{1,m+1} + I_{1,m-1}) \cos \varphi + \\
 &+ I_{1,m+1} I_{2,m-2} \cos((m+1)\varphi) \cos((m-2)\varphi) + \\
 &+ I_{1,m-1} I_{2,m+2} \cos((m-1)\varphi) \cos((m+2)\varphi) + \\
 &+ I_{1,m+1} I_{2,m+2} \sin((m+1)\varphi) \sin((m+2)\varphi) + \\
 &+ I_{1,m-1} I_{2,m-2} \sin((m-1)\varphi) \sin((m-2)\varphi)], \\
 P_y &= \frac{1}{4} [I_{0,m} I_{1,m+1} \sin((2m+1)\varphi) + \\
 &+ I_{0,m} I_{1,m-1} \sin((2m-1)\varphi) + \\
 &+ I_{1,m+1} I_{2,m-2} \cos((m+1)\varphi) \sin((m-2)\varphi) - \\
 &- I_{1,m-1} I_{2,m+2} \cos((m-1)\varphi) \sin((m+2)\varphi) + \\
 &+ I_{1,m+1} I_{2,m+2} \sin((m+1)\varphi) \cos((m+2)\varphi) - \\
 &- I_{1,m-1} I_{2,m-2} \sin((m-1)\varphi) \cos((m-2)\varphi)], \\
 P_z &= \frac{1}{4} \left( I_{0,m}^2 - \frac{1}{2} I_{2,m+2}^2 - \frac{1}{2} I_{2,m-2}^2 \right).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Хотя выражения для проекций вектора Пойнтинга (11) громоздки, некоторые общие выводы можно сделать. Из (11) следует, что продольный поток энергии при любом  $m$  имеет радиальную симметрию (не зависит от угла  $\varphi$ ). На оптической оси продольный поток энергии будет положительный и отличен от нуля только при  $m=0$  (линейная поляризация):  $P_z(r=z=0) = I_{0,0}^2 / 4$ . Также на оптической оси в фокусе продольная проекция вектора Пойнтинга из (11) будет отличной от нуля и отрицательной только при  $m=-2$  или  $m=2$ :  $P_z(r=z=0) = -I_{2,0}^2 / 4$ . То есть на оптической оси в фокусе для гибридной поляризации также имеет место обратный поток энергии при  $m = \pm 2$ , как и для обычной азимутальной поляризации второго порядка [18, 19]. Из (11) при  $\varphi=0$  можно получить выражение:

$$\begin{aligned}
 P_x(\varphi=0) &= \frac{1}{4} [I_{0,m} (I_{1,m+1} + I_{1,m-1}) + I_{1,m+1} I_{2,m-2} + \\
 &+ I_{1,m-1} I_{2,m+2}] > 0.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Из (11) также можно получить, что  $P_y(y=0)=0$ ,  $P_x(\varphi=0) = -P_x(\varphi=\pi) > 0$ . То есть при любом  $m$  на горизонтальной оси поперечный поток энергии всегда направлен вдоль этой оси, и в разные стороны от центра. Также из (11) следует, что поперечный поток энер-

гии на вертикальной оси  $y$  направлен вдоль этой оси, так как  $P_x(\varphi = \pi/2) = P_x(\varphi = 3\pi/4) = 0$ . Из (11) также следует, что поток вдоль оси  $y$  меняет знак при переходе через центр:  $P_y(\varphi = \pi/2) = -P_y(\varphi = 3\pi/4) \neq 0$ . Знак поперечного потока вдоль оси  $y$  будет чередоваться. Если, например, при  $m=1$  поток энергии вдоль оси  $y$  направлен к центру, то при  $m=2$  он будет направлен от центра. Итак, при  $m=1$  поперечный поток энергии на горизонтальной оси направлен от центра, а на вертикальной оси к центру. Это возможно, если в первом и третьем квадрантах поперечный поток энергии вращается против часовой стрелки, а во втором и четвертом квадрантах – по часовой. Далее, при  $m=2$  поперечный поток энергии на вертикальной оси  $y$  сменит направление и будет направлен от центра, и поток по горизонтальной оси  $x$  будет по-прежнему направлен от центра. Это возможно, если в четырех квадрантах будут четыре линии (под углом 45 градусов), на которых поток энергии будет направлен к центру. То есть при  $m=2$  сформируются 8 вихревых поперечных потоков энергии (по 2 в каждом квадранте), в которых направление вращения энергии будет чередоваться (по часовой и против часовой стрелки). Эти рассуждения можно продолжить и можно показать, что при произвольном  $m$  в фокусе сформируются  $4m$  вихревых потоков энергии. Причем направление вращения меняется на противоположенное при переходе от вихря к вихрю.

Рассмотрим для простоты частные случаи выражения (11). Из (11) также следует, что при  $m=0$  (линейная поляризация) в фокусе поперечные составляющие потока энергии равны нулю:  $P_x = P_y = 0$ . Это можно проверить непосредственной подстановкой  $m=0$  в (11), и с учетом свойств интегралов (4):  $I_{p,-q} = (-1)^q I_{p,+q}$ . При  $m > 0$  поперечный поток энергии (11) отличен от нуля. Напомним, что для цилиндрической поляризации  $m$ -го порядка поперечный поток энергии в фокусе всегда равен нулю [18]. При  $m=1$  (круговая азимутальная поляризация) из (11) следуют выражения для проекции потока энергии:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \frac{1}{4} \left[ I_{0,1} (I_{1,2} + I_{1,0}) \cos \varphi + I_{1,2} I_{2,3} \sin 2\varphi \sin 3\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + I_{1,0} I_{2,3} \cos 3\varphi - I_{1,2} I_{2,1} \cos 2\varphi \cos \varphi \right], \\
 P_y &= \frac{1}{4} \left[ I_{0,1} (I_{1,2} \sin 3\varphi - I_{1,0} \sin \varphi) + \right. \\
 &\quad \left. + I_{1,2} I_{2,3} \cos 2\varphi \cos 3\varphi - I_{1,0} I_{2,3} \sin 3\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + I_{1,2} I_{2,1} \cos 2\varphi \sin \varphi \right], \\
 P_z &= \frac{1}{4} \left( I_{0,1}^2 - \frac{1}{2} I_{2,3}^2 - \frac{1}{2} I_{2,1}^2 \right).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Из (13) видно, что продольная составляющая потока энергии имеет вид кольца с нулем на оптической оси. И поперечные составляющие потока энергии отличны от нуля и не имеют радиальной симметрии.

Поперечные составляющие вектора Пойнтинга в фокусе, как видно из (13), имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
 \varphi = 0: & \quad P_x = A + B > 0, P_y = 0, \\
 \varphi = \pi/2: & \quad P_x = 0, P_y = -A + B < 0, \\
 \varphi = \pi: & \quad P_x = -(A + B) < 0, P_y = 0, \\
 \varphi = 3\pi/2: & \quad P_x = 0, P_y = A - B > 0, \\
 A &= I_{0,1} (I_{1,2} + I_{1,0}) / 4, B = I_{1,0} I_{2,3} - I_{1,2} I_{2,1}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Из (14) видно, что на горизонтальной оси в плоскости фокуса поперечный поток энергии направлен вдоль горизонтальной оси от центра, а на вертикальной оси поперечный поток энергии направлен вдоль вертикальной оси к центру. Это может быть, если поперечный поток энергии вращается в первом и третьем квадрантах против часовой стрелки, а во втором и четвертом квадрантах – по часовой стрелке.

Из (11) можно сделать еще один общий вывод, не прибегая к моделированию. В выражении для проекции вектора Пойнтинга в (11)  $P_y$  функция синуса с максимальной пространственной частотой колебаний есть  $\sin(2m+1)\varphi$ . Это означает, что при заданном  $r$  интегралы из (4), входящие в (11), будут постоянными величинами, а все выражение  $P_y$  будет зависеть только от угла  $\varphi$ , и при обходе вокруг центра в плоскости фокуса по окружности радиуса  $r$  величина  $P_y$  сменит знак  $2(2m+1)$  раз.

### 3. Спиновый угловой момент в фокусе поля с гибридной поляризацией

Напомним, что продольная проекция вектора плотности спина или спинового углового момента (СУМ) для цилиндрической поляризации любого порядка равна нулю [18]. Покажем, что для гибридной поляризации (1) в фокусе продольная проекция СУМ будет отлична от нуля. Действительно, воспользуемся выражением для СУМ в виде [4]:

$$\mathbf{S} = \text{Im}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{E}),
 \tag{15}$$

где  $\text{Im}$  – мнимая часть числа. Подставим проекции электрического поля из (2) в (15), получим для продольной проекции СУМ:

$$\begin{aligned}
 S_z &= \frac{1}{4} \left[ I_{0,m} (I_{2,m+2} - I_{2,m-2}) \sin 2\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + (I_{0,m}^2 - I_{2,m-2} I_{2,m+2}) \sin(2m\varphi) \right].
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Из (16) при  $m=0$  (линейная поляризация) следует, что  $S_z=0$ . А при  $m=1$  вместо (16) получим:

$$S_z = \frac{1}{4} \left[ I_{0,1} (I_{2,3} + I_{2,1}) + (I_{0,1}^2 + I_{2,1} I_{2,3}) \right] \sin 2\varphi.
 \tag{17}$$

Из (16) следует, что число смены знака осевой проекции вектора СУМ в плоскости фокуса будет равно  $4m$ , так как в (16) входит функция  $\sin(2m\varphi)$ . Получается, что в фокусе сформируются  $4m$  локаль-

ных вихрей поперечного потока энергии и  $4m$  локальных областей с положительной или отрицательной продольной проекцией вектора СУМ. Причем в тех областях, где поперечный поток энергии вращается против часовой стрелки и вектор поляризации будет вращаться против часовой стрелки, а значит, проекция вектора СУМ будет положительной ( $S_z > 0$ ). И наоборот, в тех локальных областях плоскости фокуса, в которых поперечный поток энергии вращается по часовой стрелке и вектор поляризации будет вращаться по часовой стрелке, а значит, продольная проекция вектора СУМ будет отрицательная ( $S_z < 0$ ). Если в плоскости фокуса расположить диэлектрические микрочастицы, размер которых немного меньше локальной области вращения потока энергии, то они будут вращаться вокруг своей оси. Причем соседние частицы будут вращаться в разные стороны.

**4. Результаты моделирования фокусировки света с гибридной поляризацией**

Расчеты производились с помощью формализма Ричардса–Вольфа [1]. Моделировалась фокусировка плоской волны с гибридной поляризацией (1) в воздухе  $n=1$ . Длина волны – 532 нм. Апланатический объектив с числовой апертурой  $NA=0,95$ . Множители перед интегралами (4) в формулах Ричардса–Вольфа считались единичными. На рис. 1 показаны распределения интенсивности (а) и компонент вектора Пойнтинга  $P_x(\delta)$   $P_y(\epsilon)$  и  $P_z(\zeta)$  в плоскости фокуса при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=1$ . Из рис. 1 видно, что интенсивность имеет  $2(m+1)=2(1+1)=4$  локальных макси-

мум, расположенных в углах контура квадрата. В центре фокуса имеет место ноль интенсивности. На рис. 1б, в показаны распределения поперечного потока энергии или поперечные проекции вектора Пойнтинга  $P_x(\delta)$   $P_y(\epsilon)$ . Из рис. 1б, в видно, что поток энергии меняет знак при обходе по замкнутому контуру вокруг центра  $2(2m+1)=6$  раз. На рис. 1г показана продольная проекция вектора Пойнтинга  $P_z$ , которая имеет вид кольца с нулевым значением в центре. Распределения на рис. 1 подтверждают выводы, сделанные из полученных выражений для интенсивности (9) и потока энергии (11).

На рис. 2 показаны распределения интенсивности (а) и компонент вектора Пойнтинга  $P_x(\delta)$   $P_y(\epsilon)$  и  $P_z(\zeta)$  в плоскости фокуса при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=2$ . Вид картин на рис. 2 также подтверждает выводы теории, следующие из выражений (9) и (11). Действительно, на рис. 2а у распределения интенсивности видны  $2(m+1)=6$  локальных максимумов, лежащих на замкнутой кривой вокруг центра. На рис. 2б, в показаны распределения поперечного потока энергии или поперечные проекции вектора Пойнтинга  $P_x(\delta)$   $P_y(\epsilon)$ . Из рис. 2б, в видно, что поток энергии меняет знак при обходе по замкнутому контуру вокруг центра  $2(2m+1)=10$  раз. На рис. 2г показана продольная проекция вектора Пойнтинга  $P_z$ , которая имеет вид кольца. Величина потока энергии в центре отрицательная и равна  $P_z(r=z=0)=-I_{2,0}^2/4$ , как следует из (11). Из рис. 1 и 2 видно, что максимум продольного потока энергии примерно в два раза превышает максимум поперечных потоков энергии.

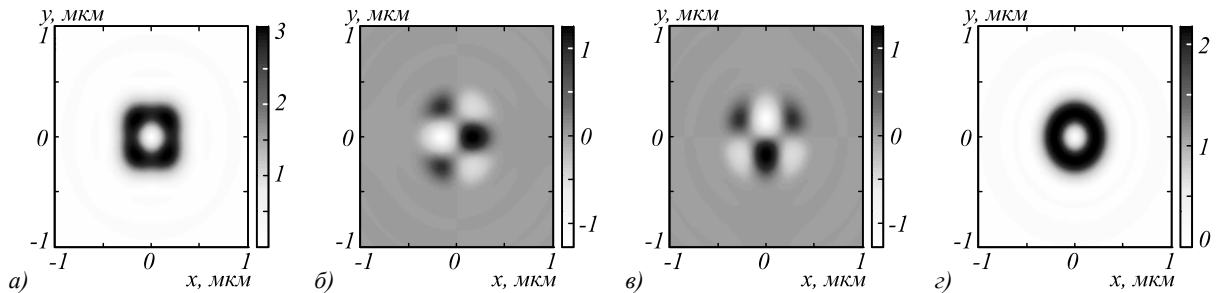


Рис. 1. Распределения интенсивности (негатив) (а) и компонент вектора Пойнтинга  $P_x$  (б)  $P_y$  (в) и  $P_z$  (г) в плоскости фокуса при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=1$

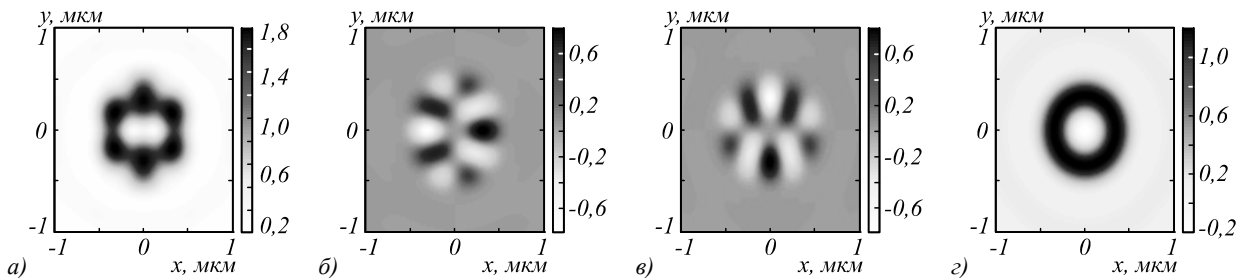


Рис. 2. Распределения интенсивности (негатив) (а) и компонент вектора Пойнтинга  $P_x$  (б)  $P_y$  (в) и  $P_z$  (г) в плоскости фокуса при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=2$

На рис. 3 показаны распределения компонент спинового углового момента  $S_x$  (а)  $S_y$  (б) и  $S_z$  (в) при

фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=1$ . Из рис. 3в видно, что число смен

знака продольной проекции вектора СУМ равно  $4m=4$ . Для продольной проекции СУМ это следует из выражения (17).

На рис. 4 показаны распределения компонент спинового углового момента  $S_x$  (а)  $S_y$  (б) и  $S_z$  (в) при

фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=2$ . Из рис. 4в видно, что число смен знака продольной проекции СУМ равно  $4m=8$ . Для продольной проекции СУМ это следует из выражения (17).

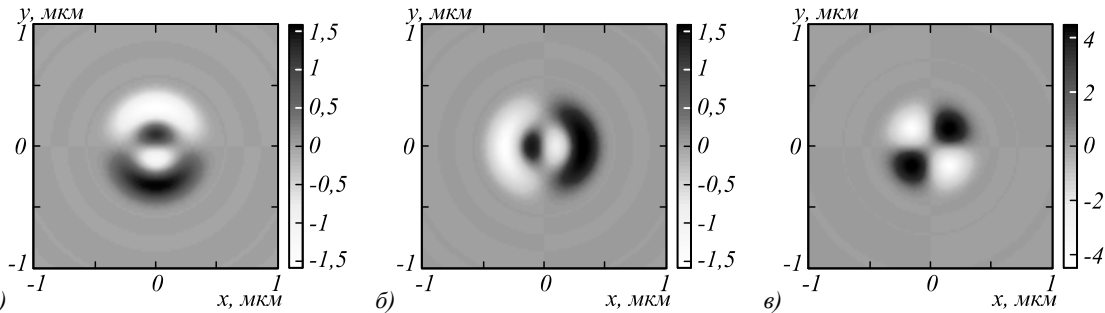


Рис. 3. Распределение компонент спинового углового момента  $S_x$  (а),  $S_y$  (б) и  $S_z$  (в) при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=1$

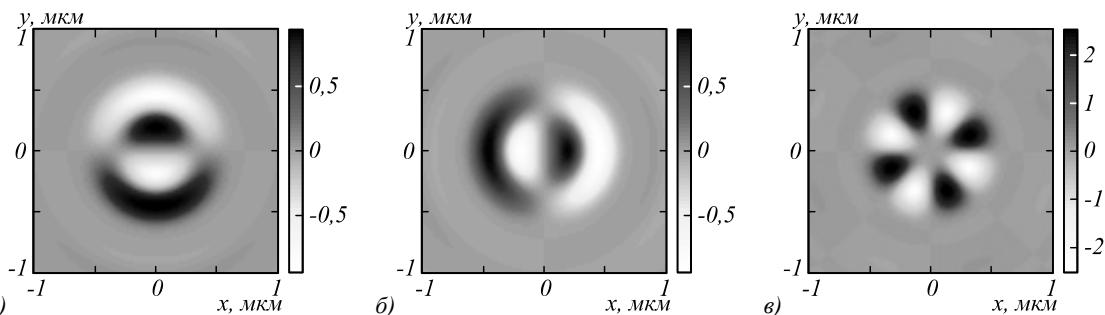


Рис. 4. Распределение компонент спинового углового момента  $S_x$  (а),  $S_y$  (б) и  $S_z$  (в) при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) при  $m=2$

На рис. 5 показаны распределения интенсивности и стрелками показано направление поперечного вектора Пойнтинга в фокальной плоскости при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) с  $m=2$  (а) и  $m=3$  (б). Из рис. 5 видно, что число вихрей поперечного потока равно  $4m=8$  (а) и  $4m=12$  (б). Это следует из выражений для поперечных проекций вектора Пойнтинга (11). Из рис. 5 также можно видеть,

что центры вихрей поперечного потока энергии в фокусе не совпадают с локальными максимумами интенсивности. Центры вихрей находятся в точках, в которых поперечный поток энергии равен нулю. Из сравнения рис. 4в и рис. 5а видно, что число областей с положительным и отрицательным значением продольной проекции СУМ ( $4m=8$ ) совпадает с числом вихрей поперечного потока энергии ( $4m=8$ ).

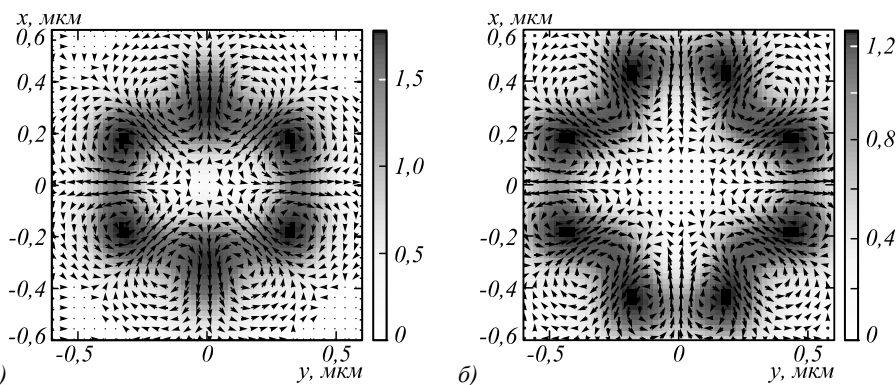


Рис. 5. Распределение интенсивности (полутона) и величина и направление вектора Пойнтинга (стрелки) в фокальной плоскости при фокусировке плоской волны с гибридной поляризацией (1) с  $m=2$  (а) и  $m=3$  (б)

Из сравнения рис. 4в и рис. 5а также видно, что в тех областях плоскости фокуса, где поперечный поток вращается против часовой стрелки, продольная проекция СУМ положительная ( $S_z > 0$ ). А в тех областях плоскости фокуса, где поперечный поток энергии вращается по

часовой стрелке, продольная проекция СУМ отрицательная ( $S_z < 0$ ). То есть вектор поляризации в плоскости фокуса вращается против часовой стрелки в тех областях, где и поперечный поток энергии вращается против часовой стрелки. И наоборот, вектор поляризации в

плоскости фокуса вращается по часовой стрелке в тех областях, где и поперечный поток энергии вращается по часовой стрелке. Это согласуется с эффектом спин-орбитальной конверсии.

### Заклучение

В данной работе рассмотрена фокусировка света с неоднородной гибридной поляризацией, объединяющей свойства цилиндрической поляризации  $m$ -го порядка и круговой поляризации – циркулярно-азимутальной поляризацией  $m$ -го порядка. С помощью формализма Ричардса–Вольфа рассмотрена острая фокусировка света такой поляризации, получены аналитические выражения в фокусе для проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей, распределения интенсивности, проекций вектора Пойнтинга и спинового углового момента. Теоретически и численно показано, что интенсивность в фокусе гибридных пучков имеет  $2(m+1)$  локальных максимумов, расположенных вдоль окружности с нулевой интенсивностью на оптической оси. Показано, что в фокусе имеется  $4m$  вихрей поперечного потока энергии, центры которых расположены между локальными максимумами интенсивности. Также показано, что поперечный поток энергии меняет направление вращения  $2(2m+1)$  раза при обходе в плоскости фокуса вокруг оптической оси. При этом продольная проекция спинового углового момента в фокусе меняет знак  $4m$  раза. В тех областях плоскости фокуса, где поперечный поток энергии вращается против часовой стрелки, продольная проекция спинового углового момента положительная, а вектор поляризации вращается в плоскости фокуса против часовой стрелки. И наоборот, где поток энергии вращается по часовой стрелке, там и вектор поляризации вращается по часовой стрелке, а продольная проекция спинового углового момента отрицательная.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в частях «Введение» и «Заклучение», Российского научного фонда (грант № 18-19-00595) в части «Результаты моделирования фокусировки света с гибридной поляризацией», Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ (грант № 18-29-20003) в части «Интенсивность света с гибридной поляризацией в фокусе».

### Литература

1. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system / B. Richards, E. Wolf // Proceedings of the Royal Society A. – 1959. – Vol. 253, Issue 1274. – P. 358-379.
2. **Dorn, R.** Sharper focus for a radially polarized light beam / R. Dorn, S. Quabis, G. Leuchs // Physical Review Letters. – 2003. – Vol. 91, Issue 23. – 233901.

3. **Zhao, Y.Q.** Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam / Y.Q. Zhao, J.S. Edgar, G.D.M. Jeffries, D. McGloin, D.T. Chiu // Physical Review Letters. – 2007. – Vol. 99. – 073901.
4. **Kotlyar, V.V.** Exploiting the circular polarization of light to obtain a spiral energy flow at the subwavelength focus / V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, S.S. Stafeev // Journal of the Optical Society of America B. – 2019. – Vol. 36, Issue 10. – P. 2850-2855. – DOI: 10.1364/JOSAB.36.002850.
5. **Chen, B.** Tight focusing of elliptically polarized vortex beams / B. Chen, J. Pu // Applied Optics. – 2009. – Vol. 48, Issue 7. – P. 1288-1294.
6. **Kotlyar, V.V.** Energy density and energy flux in the focus of an optical vortex: reverse flux of light energy / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov // Optics Letters. – 2018. – Vol. 43, Issue 12. – P. 2921-2924. – DOI: 10.1364/OL.43.002921.
7. **Zhan, Q.** Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications / Q. Zhan // Advances in Optics and Photonics. – 2009. – Vol. 1, Issue 1. – P. 1-57.
8. **Wang, X.L.** Optical orbital angular momentum from the curl of polarization / X.L. Wang, J. Chen, Y.N. Li, J.P. Ding, C.S. Gou, H.T. Wang // Physical Review Letters. – 2010. – Vol. 105, Issue 25. – 253602.
9. **Wang, X.L.** A new type of vector fields with hybrid states of polarization / X.L. Wang, Y.N. Li, J. Chen, C.S. Guo, J.P. Ding, H.T. Wang // Optics Express. – 2010. – Vol. 18. – P. 10786-10795.
10. **Hu, K.** Tight focusing properties of hybridly polarized vector beams / K. Hu, Z. Chen, J. Pu // Journal of the Optical Society of America A. – 2012. – Vol. 29. – P. 1099-1104.
11. **Lerman, G.M.** Generation and tight focusing of hybridly polarized vector beams / G.M. Lerman, L. Stern, U. Levy // Optics Express. – 2010. – Vol. 18. – P. 27650-27657.
12. **Hu, H.** The tight focusing properties of spatial hybrid polarization vector beam / H. Hu, P. Xiao // Optik. – 2013. – Vol. 124. – P. 2406-2410.
13. **Chen, S.** Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere / S. Chen, X. Zhou, Y. Liu, X. Ling, H. Luo, S. Wen // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, Issue 18. – P. 5274-5276.
14. **D'Errico, A.** Topological features of vector vortex beams perturbed with uniformly polarized light / A. D'Errico, M. Maffei, B. Piccirillo, C. de Lisio, F. Cardano, L. Marrucci // Scientific Reports. – 2017. – Vol. 7, Issue 1. – 40195.
15. **Khonina, S.N.** Formation of hybrid higher-order cylindrical vector beams using binary multi-sector phase plates / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, S.A. Fomchenkov, A.P. Porfirev // Scientific Reports. – 2018. – Vol. 8, Issue 1. – 14320. – DOI: 10.1038/s41598-018-32469-0.
16. **Khonina, S.N.** Vortex beams with high-order cylindrical polarization: features of focal distributions / S.N. Khonina // Applied Physics B. – 2019. – Vol. 125. – 100. – DOI: 10.1007/s00340-019-7212-1.
17. **Котляр, В.В.** Острая фокусировка светового поля с поляризационной и фазовой сингулярностью произвольного порядка / В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 337-346. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.
18. **Kotlyar, V.V.** Reverse and toroidal flux of light fields with both phase and polarization higher-order singularities in the sharp focus area / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.A. Kovalev // Optics Express. – 2019. – Vol. 27, Issue 12. – P. 16689-16702. – DOI: 10.1364/OE.27.016689.
19. **Kotlyar, V.V.** Energy backflow in the focus of a light beam with phase or polarization singularity / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov // Physical Review A. – 2019. – Vol. 99, Issue 3. – 033840. – DOI: 10.1103/PhysRevA.99.033840.

---

**Сведения об авторах**

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru).

**Стафеев Сергей Сергеевич**, 1985 года рождения. В 2009 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика и физика». Кандидат физико-математических наук с 2012 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, разностное решение уравнений Максвелла, оптика ближнего поля. E-mail: [sergey.stafeev@gmail.com](mailto:sergey.stafeev@gmail.com). ORCID: 0000-0002-7008-8007

---

*ГРНТИ: 29.31.15*

*Поступила в редакцию 19 ноября 2020 г. Окончательный вариант – 14 января 2021 г.*

---



---

# A transverse energy flow at the tight focus of light with higher-order circular-azimuthal polarization

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, S.S. Stafeev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup> Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

Tight focusing of light with  $m^{\text{th}}$ -order circular-azimuthal polarization was investigated. This is a new type of inhomogeneous hybrid polarization that combines the properties of  $m^{\text{th}}$  order cylindrical polarization and circular polarization. Using the Richards-Wolf formalism, we obtained analytical expressions in the focal spot for the projections of the electric and magnetic field, the intensity distribution, the projections of the Poynting vector, and the spin angular momentum. It was shown theoretically and numerically that at the focus, the intensity has  $2(m + 1)$  local maxima located on a circle centered on an on-axis intensity null. It was shown that  $4m$  vortices of a transverse energy flow were produced at the focus, with their centers located between the local intensity maxima. It was also shown that in the focal plane, the transverse energy flow changes the direction of rotation  $2(2m + 1)$  times around the optical axis. It is interesting that the longitudinal projection of the spin angular momentum at the focus changes sign  $4m$  times. In those areas of the focal plane where the transverse energy flow rotates counterclockwise, the longitudinal projection of the spin angular momentum is positive, and the polarization vector rotates counterclockwise in the focal plane. Conversely, if the energy flow rotates clockwise, the polarization vector rotates clockwise, and the longitudinal projection of the spin angular momentum is negative. Numerical simulations are in agreement with the theoretical investigation.

**Keywords:** tight focusing, hybrid polarization, Poynting vector, spin angular momentum.

**Citation:** Kotlyar VV, Stafeev SS. A transverse energy flow at the tight focus of light with higher-order circular-azimuthal polarization. *Computer Optics* 2021; 45(3): 311-318. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-839.

**Acknowledgements:** This work was supported by the RF Ministry of Science and Higher Education within the State assignment FSRC «Crystallography and Photonics» RAS (Sections "Introduction" and "Conclusions"), the Russian Science Foundation under project No. 18-19-00595 (Section "Numerical simulation of focusing light with hybrid polarization state"), and the Russian Foundation for Basic Research under project No. 18-29-20003 (Section "Intensity of light with hybrid polarization state").

## References

- [1] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc Math Phys Eng Sci* 1959; 253(1274): 358-379.
  - [2] Dorn R, Quabis S, Leuchs G. Sharper focus for a radially polarized light beam. *Phys Rev Lett* 2003; 91(23): 233901.
  - [3] Zhao YQ, Edgar JS, Jeffries GDM, McGloin D, Chiu DT. Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam. *Phys Rev Lett* 2007; 99: 073901.
  - [4] Kotlyar VV, Nalimov AG, Stafeev SS. Exploiting the circular polarization of light to obtain a spiral energy flow at the subwavelength focus. *J Opt Soc Am B* 2019; 36(10): 2850-2855. DOI: 10.1364/JOSAB.36.002850.
  - [5] Chen B, Pu J. Tight focusing of elliptically polarized vortex beams. *Appl Opt* 2009; 48(7): 1288-1294.
  - [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Energy density and energy flux in the focus of an optical vortex: reverse flux of light energy. *Opt Lett* 2018; 43(12): 2921-2924. DOI: 10.1364/OL.43.002921.
  - [7] Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications. *Adv Opt Photonics* 2009; 1(1): 1-57.
  - [8] Wang XL, Chen J, Li YN, Ding JP, Gou CS, Wang HT. Optical orbital angular momentum from the curl of polarization. *Phys Rev Lett* 2010; 105(25): 253602.
  - [9] Wang XL, Li YN, Chen J, Guo CS, Ding JP, Wang HT. A new type of vector fields with hybrid states of polarization. *Opt Express* 2010; 18: 10786-10795.
  - [10] Hu K, Chen Z, Pu J. Tight focusing properties of hybridly polarized vector beams. *J Opt Soc Am A* 2012; 29: 1099-1104.
  - [11] Lerman GM, Stern L, Levy U. Generation and tight focusing of hybridly polarized vector beams. *Opt Express* 2010; 18: 27650-27657.
  - [12] Hu H, Xiao P. The tight focusing properties of spatial hybrid polarization vector beam. *Optik* 2013; 124: 2406-2410.
  - [13] Chen S, Zhou X, Liu Y, Ling X, Luo H, Wen S. Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere. *Opt Lett* 2014; 39(18): 5274-5276.
  - [14] D’Errico A, Maffei M, Piccirillo B, de Lisio C, Cardano F, Marrucci L. Topological features of vector vortex beams perturbed with uniformly polarized light. *Sci Rep* 2017; 7: 40195.
  - [15] Khonina SN, Ustinov AV, Fomchenkov SA, Porfirev AP. Formation of hybrid higher-order cylindrical vector beams using binary multi-sector phase plates. *Sci Rep* 2018; 8: 14320. DOI: 10.1038/s41598-018-32469-0.
  - [16] Khonina SN. Vortex beams with high-order cylindrical polarization: features of focal distributions. *Appl Phys B* 2019; 125: 100. DOI: 10.1007/s00340-019-7212-1.
-

---

[17] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA. Sharp focusing of a light field with polarization and phase singularities of an arbitrary order. *Computer Optics* 2019; 43(3): 337-346. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-337-346.

[18] Kotlyar VV, Stafeev SS, Kovalev AA. Reverse and toroidal flux of light fields with both phase and polarization higher-

order singularities in the sharp focus area. *Opt Express* 2019; 27(12): 16689-16702. DOI: 10.1364/OE.27.016689.

[19] Kotlyar VV, Stafeev SS, Nalimov AG. Energy backflow in the focus of a light beam with phase or polarization singularity. *Phys Rev A* 2019; 99(3): 033840. DOI: 10.1103/PhysRevA.99.033840.

---

#### *Authors' information*

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coauthor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru).

**Sergey S. Stafeev** (b. 1985) received Master's degree in Applied Mathematics and Physics in Samara State Aerospace University (2009). He received his PhD in 2012. He is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics. E-mail: [sergey.stafeev@gmail.com](mailto:sergey.stafeev@gmail.com). ORCID: 0000-0002-7008-8007.

---

*Received November 19, 2020. The final version – January 14, 2021.*

---