

Расчет квантовых характеристик на основе классического решения задачи дифракции в резонаторе с диэлектрической пластиной

С.И. Харитонов^{1,2}, Н.Л. Казанский^{1,2}, С.Г. Волотовский¹, С.Н. Хонина^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

Работа посвящена разработке квантовой теории дифракционных оптических элементов. На примере дифракции света на диэлектрической пластине в резонаторе рассмотрены аспекты квантовой оптики. В работе показана связь между классическим и квантовым решением задачи дифракции на диэлектрической пластине. Получены выражения для собственных мод такого резонатора, а также для операторов векторного магнитного потенциала и напряжённости электрического поля. Метод, предложенный в данной работе, легко распространить на диэлектрические пластины с дифракционным микрорельефом, то есть на дифракционные оптические элементы.

Ключевые слова: моды резонатора с диэлектрической пластиной, квантование поля, квантовые характеристики поля.

Цитирование: Харитонов, С.И. Расчет квантовых характеристик на основе классического решения задачи дифракции в резонаторе с диэлектрической пластиной / С.И. Харитонов, Н.Л. Казанский, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 5. – С. 741-751. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1174.

Citation: Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Volotovskiy SG, Khonina SN. Calculation of quantum characteristics based on the classical solution of the diffraction problem in a resonator with a dielectric plate. Computer Optics 2022; 46(5): 741-751. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1174.

Введение

Актуальность создания квантовой теории дифракционных оптических элементов основывается на том, что в настоящее время квантовые телекоммуникации приобретают первостепенное значение [1]. Квантовые телекоммуникации – это совокупность методов для передачи информации, закодированной в квантовых состояниях из одной точки в другую. Квантовая связь даёт возможность передавать информацию в зашифрованном виде [2–4].

Если квантов в импульсе 1000, есть вероятность, что 100 квантов по пути будет отведено злоумышленником на свой приёмник. В последующем, анализируя открытые переговоры между передающей и принимающей стороной, он может получить нужную ему информацию.

Поэтому в идеале число квантов в импульсе должно быть равно одному. В этом случае любая попытка отвода части квантов злоумышленником приведёт к существенному изменению всей системы в целом и, как следствие, росту числа ошибок у принимающей стороны. В подобной ситуации принятые данные должны быть отброшены, а попытка передачи повторена.

Сигналы передаются с помощью потока одиночных фотонов. Фотон невозможно разделить, измерить, скопировать или незаметно убрать [5–8]. Из-за подобных действий фотон просто разрушается и не может дойти до своего получателя [9–12]. Это делает

невозможным несанкционированный перехват сообщений третьими лицами.

На рис. 1 представлена оптическая схема установки, используемой в современной квантовой криптографии. Передающая сторона находится слева, а принимающая – справа. Ячейки Погекельса необходимы для импульсной вариации поляризации потока квантов передатчиком и для анализа импульсов поляризации приёмником. Передатчик может формировать одно из четырёх состояний поляризации. Передаваемые данные поступают в виде управляющих сигналов на эти ячейки. В качестве канала передачи данных может быть использовано оптоволокно. В качестве первичного источника света можно использовать и лазер. На принимающей стороне после ячейки Погекельса установлена кальцитовая призма, которая расщепляет пучок на два фотодетектора (ФЭУ), измеряющих две ортогональные составляющие поляризации. Представляет интерес, как одиночные фотоны проходят через обычные оптические элементы.

Другой пример, где проявляется квантовая природа света, – это оптические системы формирования изображения с малым числом фотонов. Примером могут служить системы дистанционного зондирования Земли, особенно космические изображающие гиперспектрометры, в которых ослабленный поступлением через узкую щель входящий световой поток ещё и распределяется по длинам волн [13–15]. Даже на освещённой стороне Земли количество света недостаточно. Это приво-

дит к тому, что в этих системах используются зеркала огромных размеров (конечно, зеркало с большой апертурой необходимо не только для того, чтобы интенсивность изображения была достаточна для регистрации датчиками, но и для повышения разрешения). В качестве главного собирающего оптического элемента такого телескопа можно использовать очень тонкую и лёгкую мембрану диаметром 20–30 метров [16]. Дифракционный муаровый узор мембраны сфокусирует свет на объективе камеры. Сам спутник предполагается запустить на геостационарную орбиту (36 тысяч километров). На этой орбите Земля является неподвижной. Это

позволит исключить эффекты, связанные с явлением смаза на изображении. Только в этом случае камеры спутника могут уловить на поверхности Земли что-то полезное для различных применений. Изучая взаимодействие пучков с малым числом фотонов с датчиками, можно построить оптические системы с высоким разрешением. На основе строгой теории возможно построение приборов, которые фиксируют не только интенсивность, но и корреляции фотонов. Возможно также создание квантовых изображающих гиперспектрометров, которые используют информацию о корреляции фотонов в различных точках изображения.

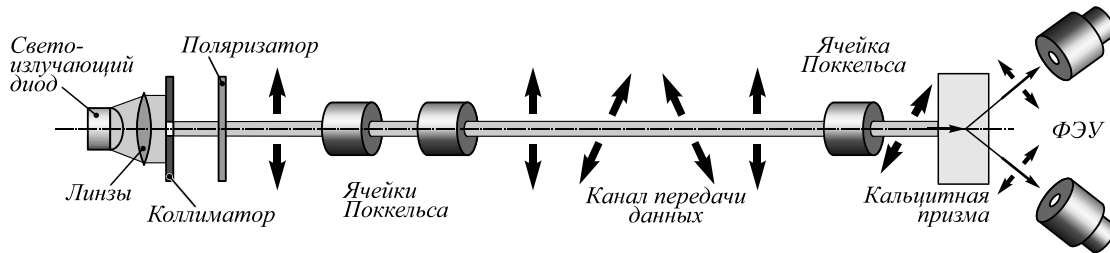


Рис. 1. Оптическая схема установки, используемой в современной квантовой криптографии

В данной работе описана процедура квантования электромагнитного поля в резонаторе с идеально отражающими стенками при наличии диэлектрической пластины. С этой целью получены выражения для собственных мод резонатора с диэлектрической пластиной. Также получены выражения для операторов векторного магнитного потенциала и напряжённости электрического поля. Кроме того, получены выражения для (средне-) наблюдаемого значения распределения напряжённости электрического поля и квадрата напряжённости электрического поля в многофотонном состоянии.

1. Моды 1D-резонатора с диэлектрической пластиной

В случае когерентного состояния выражение для среднего значения представляет собой просто выражение для разложения векторного потенциала по модам резонатора. Рассмотрим область $-l_1 < x < l_2$. При $x=0$ находится граница раздела диэлектрика (см. рис. 2).

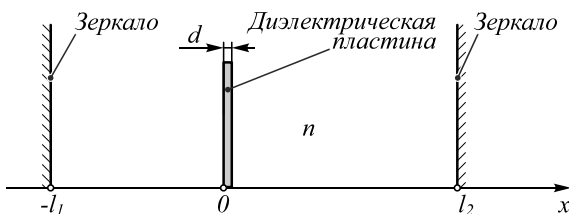


Рис. 2. Схема 1D-резонатора с диэлектрической пластиной

Решение волнового уравнения для потенциала

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - \frac{n^2(x)}{c^2} \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

имеет вид

$$A(x,t) = \sum_m \Phi_m(x) [F^m \cos(\omega_m t) + G^m \sin(\omega_m t)], \tag{2}$$

где $\Phi_m(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Phi_m''(x) + k_m^2 n^2(x) \Phi_m(x) = 0, \tag{3}$$

$k_m = \omega_m/c$ и c – скорость света.

Слева от диэлектрика

$$\Phi^1(x) = P_1 \sin(k(x+l_1)). \tag{4}$$

Внутри диэлектрика с показателем преломления n :

$$\Phi^2(x) = P_2 \sin(knx) + R_2 \cos(knx). \tag{5}$$

Справа от диэлектрика

$$\Phi^3(x) = P_3 \sin(k(x-l_2)). \tag{6}$$

Соответствующие производные имеют вид

$$\frac{\partial \Phi^1(x)}{\partial x} = P_1 k \cos(k(x+l_1)),$$

$$\frac{\partial \Phi^2(x)}{\partial x} = P_2 kn \cos(knx) - R_2 kn \sin(knx), \tag{7}$$

$$\frac{\partial \Phi^3(x)}{\partial x} = P_3 k \cos(k(x-l_2)).$$

Условие сшивки при $x=0$:

$$\begin{cases} P_1 \sin(kl_1) = R_2, \\ P_1 \cos(kl_1) = P_2 n. \end{cases} \tag{8}$$

После деления одного уравнения в (8) на другое получаем:

$$\frac{n \sin(kl_1)}{\cos(kl_1)} = \frac{R_2}{P_2}. \tag{9}$$

Условие сшивки при $x=d$:

$$\begin{cases} P_2 \sin(knd) + R_2 \cos(knd) = P_3 \sin(k(d-l_2)), \\ P_2 n \cos(knd) - R_2 n \sin(knd) = P_3 \cos(k(d-l_2)). \end{cases} \quad (10)$$

Аналогично после деления одного уравнения в (10) на другое получаем:

$$\frac{P_2 \sin(knd) + R_2 \cos(knd)}{P_2 n \cos(knd) - R_2 n \sin(knd)} = \frac{\sin(k(d-l_2))}{\cos(k(d-l_2))}. \quad (11)$$

Преобразовываем (11) к виду

$$\begin{aligned} & \left(\sin(knd) + \frac{R_2}{P_2} \cos(knd) \right) \cos(k(d-l_2)) = \\ & = \left(n \cos(knd) - \frac{R_2}{P_2} n \sin(knd) \right) \sin(k(d-l_2)). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (9) в (12), получаем дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[\sin(knd) \cos(kl_1) + n \sin(kl_1) \cos(knd) \right] \times \\ & \times \cos(k(d-l_2)) = \\ & = \left[n \cos(knd) \cos(kl_1) - n^2 \sin(kl_1) \sin(knd) \right] \times \\ & \times \sin(k(d-l_2)). \end{aligned} \quad (13)$$

Решением дисперсионного уравнения (13) является набор волновых чисел k_m . Далее для каждого найденного k_m , используя систему уравнений (8) и (10):

$$\begin{cases} P_1 \sin(kl_1) = R_2, \\ P_1 \cos(kl_1) = P_2 n, \\ P_2 \sin(knd) + R_2 \cos(knd) = P_3 \sin(k(d-l_2)), \\ P_2 n \cos(knd) - R_2 n \sin(knd) = \\ = P_3 \cos(k(d-l_2)), \end{cases} \quad (14)$$

нужно найти неизвестные коэффициенты P_1, P_2, R_2, P_3 .

Так как три коэффициента можно выразить через первый, то выбросим в (14) второе уравнение, тогда:

$$\begin{cases} R_2 = P_1 \sin(kl_1), \\ P_2 \sin(knd) + R_2 \cos(knd) - P_3 \sin(k(d-l_2)) = 0, \\ P_2 n \cos(knd) - R_2 n \sin(knd) - P_3 \cos(k(d-l_2)) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Учитывая первое уравнение, перепишем систему (15):

$$\begin{cases} P_2 \sin(knd) + P_1 \sin(kl_1) \cos(knd) - \\ - P_3 \sin(k(d-l_2)) = 0, \\ P_2 n \cos(knd) - P_1 \sin(kl_1) n \sin(knd) - \\ - P_3 \cos(k(d-l_2)) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

После преобразований решаем систему (16) и получаем:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 \cos(kl_1)/n, \\ P_3 &= P_1 \cos(kl_1)/C, \\ R_2 &= P_1 \sin(kl_1), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} C &= n \sin(knd) \sin(k(d-l_2)) + \\ & + \cos(knd) \cos(k(d-l_2)). \end{aligned} \quad (18)$$

Решая дисперсионное уравнение (13) относительно k , находим множество его решений k_m . Поиск решений k_m осуществляется в некотором заданном диапазоне $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$. В результате получаем, что моды резонатора с диэлектрической пластинкой имеют следующий вид:

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} \Phi_m^1(x) = P_m \cdot \sin(k_m(x+l_1)), & -l_1 < x < 0, \\ \Phi_m^2(x) = P_m \left[\frac{\cos(k_m l_1)}{n} \sin(k_m n x) + \right. \\ \left. + \sin(k_m l_1) \cos(k_m n x) \right], & 0 < x < d, \\ \Phi_m^3(x) = P_m \cos(k_m l_1) \frac{\sin(k_m(x-l_2))}{C_m}, & d < x < l_2, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} C_m &= n \sin(k_m n d) \sin(k_m(d-l_2)) + \\ & + \cos(k_m n d) \cos(k_m(d-l_2)), \end{aligned}$$

а P_m – вычисляется из условия нормировки базисных функций:

$$\int_{-l_1}^{l_2} n^2(x) \Phi_m(x) \Phi_m^*(x) dx = 1. \quad (20)$$

В частном случае, когда резонатор пустой, дисперсионное уравнение (20) принимает следующий вид:

$$\sin(kl_1) \cos(kl_2) + \cos(kl_1) \sin(kl_2) = 0. \quad (21)$$

Корни уравнения (21) можно вычислить аналитически:

$$k_m = \frac{\pi m}{(l_1 + l_2)}. \quad (22)$$

Также моды пустого резонатора имеют простой аналитический вид:

$$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{(l_1 + l_2)}} \sin\left(\frac{\pi m}{(l_1 + l_2)} x\right). \quad (23)$$

Рассмотрим в качестве примера резонатор при следующих параметрах расчёта: длина резонатора

$l_2 = l_1 = 30$ мкм, диэлектрическая пластинка толщиной $d = 2$ мкм с показателем преломления $n = 1,5$, $k_{\min} = 5$ мкм⁻¹, $k_{\max} = 8,4$ мкм⁻¹. На рис. 3 показаны результаты расчёта k_m (соответствуют координатам пересечения графика для уравнения (20) нулевой линии) для пустого резонатора (рис. 3а) и резонатора с диэлектрической пластинкой (рис. 3б). Как видно, при наличии диэлектрической пластинки набор k_m ,

соответствующий решениям дисперсионного уравнения (20), не имеет линейной зависимости.

На рис. 4 показаны примеры мод резонатора с диэлектрической пластинкой толщиной $d = 2$ мкм и показателем преломления $n = 1,5$. Хорошо видно, что с увеличением индекса моды частота её растёт. Также видно, что в области пластинки ($0 < x < d$) происходит «сбой» гармонического характера моды.

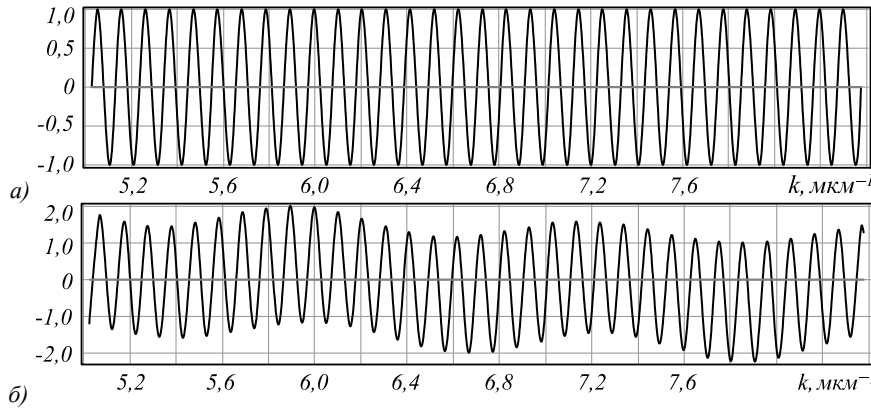


Рис. 3. Результаты расчёта k_m для пустого резонатора (а) и резонатора с диэлектрической пластинкой (б)

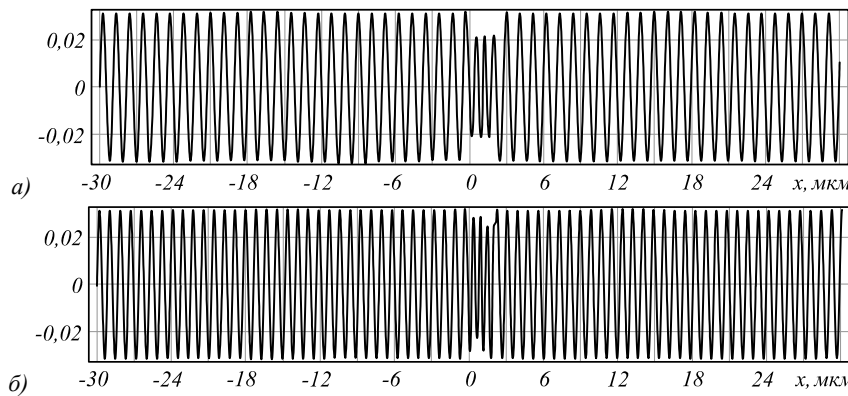


Рис. 4. Графики мод резонатора с диэлектрической пластинкой толщиной $d = 2$ мкм и показателем преломления $n = 1,5$: $m = 14$ (а), $m = 47$ (б)

2. Прохождение импульса в резонаторе

Использование коротких импульсов в системах телекоммуникаций становится всё актуальнее. При этом наблюдаются различные пространственно-временные эффекты [17–20], особенно для ультракоротких импульсов [21–24].

Выражение для потенциала (2) можно записать в виде:

$$A(x, t) = \sum \Phi_m(x) \{ b_m \exp(-i\omega_m t) + b_m^* \exp(i\omega_m t) \}, \quad (24)$$

где $b_m = (F_m + iG_m)/2$.

Коэффициенты поля (2) вычисляются на основе начального распределения потенциала:

$$F_m = \int_a^b A(x, 0) \Phi_m(x) dx, \quad (25)$$

$$G_m = \frac{1}{\omega_m} \int_a^b A_1(x, 0) \Phi_m(x) dx,$$

где $a = -l_1$, $b = l_2$,

$$A_1(x, t) = \frac{\partial A(x, t)}{\partial t}.$$

В случае однонаправленного пучка

$$\frac{\partial A(x, 0)}{\partial t} = -c \frac{\partial A(x, 0)}{\partial x}, \quad (26)$$

тогда

$$G_m = -\frac{c}{\omega_m} \int_a^b \frac{\partial A(x, 0)}{\partial x} \Phi_m(x) dx. \quad (27)$$

Вычисляя интеграл (27) по частям, получаем:

$$G_m = -\frac{c}{\omega_m} \left(A(b, 0) \Phi_m(b) - A(a, 0) \Phi_m(a) - \int_a^b A(x, 0) \frac{\partial \Phi_m(x)}{\partial x} dx \right). \quad (28)$$

Для поля (2), которое в начальный момент времени сосредоточено между диэлектрической пластиной и левым зеркалом резонатора (т.е. $A(a, 0) = A(b, 0) = 0$), выражение (28) упрощается:

$$G^m = \frac{c}{\omega_m} \left(\int_a^b A(x, 0) \frac{\partial \Phi_m(x)}{\partial x} dx \right). \quad (29)$$

В случае, если входное поле сосредоточено в первой области вдали от зеркал, базисные функции имеют вид, аналогичный (23):

$$\Phi_m(x) = P_m \sin(k_m(x + l_1)). \quad (30)$$

С учётом узости входного поля пределы интегрирования можно расширить на всю числовую ось, тогда коэффициенты вычисляются по формулам:

$$F^m = P_m \int_{-\infty}^{\infty} A(x, 0) \sin(k_m(x + l_1)) dx, \quad (31)$$

$$G^m = P_m \int_{-\infty}^{\infty} A(x, 0) \cos(k_m(x + l_1)) dx,$$

$$b_m = \frac{iP_m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, 0) \exp(-ik_m(x + l_1)) dx. \quad (32)$$

Рассмотрим распространение в резонаторе с диэлектрической пластинкой импульса следующего вида:

$$F(x) = F_0 \cos(k_0(x - x_0)) \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (33)$$

На рис. 5 показано распространение импульса (33) при $x_0 = -15$ мкм, $\sigma = 3$ мкм.

По результатам, представленным на рис. 5, хорошо видно, что при прохождении импульса через диэлектрическую пластинку частота осцилляций в области пластинки повышается в соответствии с относительным показателем преломления пластинки к окружающей среде. Также хорошо видно, что отражённый от пластинки сигнал фактически соответствует производной исходного импульса по времени. Отметим, что дифференцирование импульсов возможно также с использованием волноводных периодических структур и решёток [25–27], резонаторов [28], фотонных кристаллов [29], метаповерхностей [30, 31].

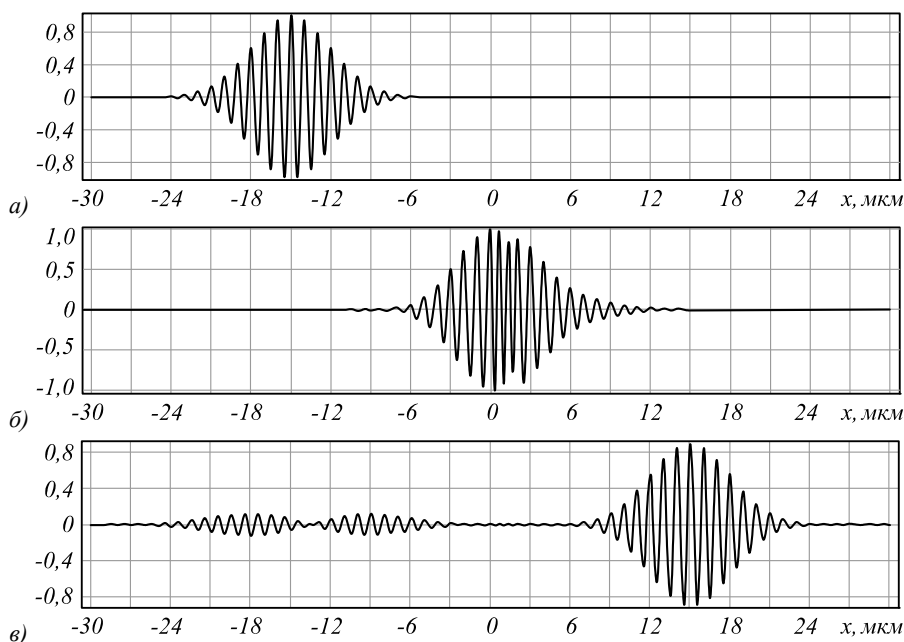


Рис. 5. Распространение импульса (33) при $x_0 = -15$ мкм, $\sigma = 3$ мкм в резонаторе с диэлектрической пластинкой толщиной $d = 2$ мкм и показателем преломления $n = 1,5$ в различные моменты времени: $t = 0$ (а), $t = 50$ фс (б), $t = 100$ фс (в)

3. Квантование поля в резонаторе с диэлектрической пластиной

Общая процедура квантования электромагнитного поля в резонаторе с диэлектриком описана во многих работах [5–9, 32].

Перепишем выражение для векторного потенциала в виде

$$A(x, y, z, t) = \sum_s c_s M_s \Phi_s(x, y, z) \exp(-i\omega_s t) + c_s^* M_s \Phi_s^*(x, y, z) \exp(i\omega_s t), \quad (34)$$

где c_s – произвольные постоянные, M_s – константы, которые определяются в процессе квантования поля.

Запишем выражение для энергии (гамильтониана электромагнитного поля):

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \left(\varepsilon(x, y, z) \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 + (\text{rot } A)^2 \right) dx dy dz, \quad (35)$$

где $\varepsilon(x, y, z)$ – распределение диэлектрической проницаемости.

Используя ортогональность модовых функций, получаем выражение для гамильтониана в виде:

$$W \sim \sum_s r_s (c_s c_s^* + c_s^* c_s), \tag{36}$$

где r_s – коэффициенты, зависящие от конкретной конфигурации оптической системы (некоторые примеры рассмотрены ниже).

Далее заменяем числовые константы на операторы, действующие в гильбертовом пространстве. В результате выражение для гамильтониана становится также оператором, действующим в том же пространстве:

$$W \sim \sum_s r_s (a_s a_s^+ + a_s^+ a_s). \tag{37}$$

Тогда выражение для оператора магнитного потенциала

$$A(x, y, z, t) = \sum_s a_s M_s \Phi_s(x, y, z) \exp(-i\omega_s t) + a_s^+ M_s \Phi_s^*(x, y, z) \exp(i\omega_s t). \tag{38}$$

Операторы электрического поля и магнитного поля имеют по аналогии с классической электродинамикой вид:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{39}$$

$$H = \text{rot } A. \tag{40}$$

Можно показать, что операторы как функции координат и времени удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Операторы a_s и a_s^+ , а также числа M_s выбираются таким образом, чтобы оператор векторного потенциала удовлетворял уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{h} [H, A], \tag{41}$$

а гамильтониан электромагнитного поля имел вид

$$W = \sum_s h\omega_s \left(a_s^+ a_s + \frac{1}{2} \right). \tag{42}$$

Для этого достаточно положить, что коммутаторы операторов имеют вид:

$$[a_s, a_p^+] = \delta_{sp}, \tag{43}$$

$$[a_s, a_p] = [a_s^+, a_p^+] = 0. \tag{44}$$

3.1. Пространство состояний электромагнитного поля

Пространство состояний электромагнитного поля описывается пространством функций бесконечного числа переменных:

$$\Phi(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j \dots). \tag{45}$$

Каждая переменная в (45) относится к отдельной моде, причём переменные не связаны с пространственными координатами.

Операторы рождения и уничтожения действуют в этом пространстве функций:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_n + \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right), \tag{46}$$

$$a_n^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\xi_n - \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right).$$

При таком выборе операторов выполняются коммутационные соотношения:

$$a_n^+ a_m - a_m a_n^+ = \delta_{nm}. \tag{47}$$

Очень полезным свойством операторов рождения и уничтожения является следующее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi^*(\xi) a^+ \chi(\xi)) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi(\xi) a \Phi^*(\xi)) d\xi, \tag{48}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Phi^*(\xi) a \chi(\xi)) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi(\xi) a^+ \Phi^*(\xi)) d\xi,$$

где $\chi(\xi)$ и $\Phi(\xi)$ – произвольные дифференцируемые функции.

3.2. Состояния с определённым числом фотонов

Рассмотрим базисные функции вида:

$$\Phi_{q_1 q_2 \dots q_j \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j \dots) = \prod \Phi_{q_n}(\xi_n), \tag{49}$$

$$\Phi_{q_n}(\xi_n) = N_n H_{q_n}(\xi_n) \exp\left(-\frac{\xi_n^2}{2}\right), \tag{50}$$

где $H_{q_n}(\xi_n)$ – полином Эрмита, N_n – нормировочный множитель, так что выполняется свойство ортонормированности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{q_n}(\xi_n) \Phi_{q_n}^*(\xi_n) d\xi_n = 1. \tag{51}$$

Операторы (46) действуют в этом пространстве следующим образом:

$$a_n \Phi_{q_n}(\xi_n) = \sqrt{q_n} \Phi_{q_n-1}(\xi_n), \tag{52}$$

$$a_n^+ \Phi_{q_n}(\xi_n) = \sqrt{(q_n+1)} \Phi_{q_n+1}(\xi_n),$$

$$a_n a_n^+ \Phi_{q_n}(\xi_n) = (q_n+1) \Phi_{q_n}(\xi_n), \tag{53}$$

$$a_n^+ a_n \Phi_{q_n}(\xi_n) = q_n \Phi_{q_n}(\xi_n).$$

Рассмотрим действие оператора Гамильтона на базисную функцию (49):

$$H \Phi_{q_1 q_2 \dots q_j \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j \dots) = \sum_n h\omega_n \left(a_n^+ a_n + \frac{1}{2} \right) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_j \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j \dots) = \left(\sum_n h\omega_n \left(q_n + \frac{1}{2} \right) \right) \Phi_{q_1 q_2 \dots q_j \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j \dots). \tag{54}$$

Получаем, что функция $\Phi_{q_1 q_2 \dots q_j \dots}(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_j \dots)$ является собственной для оператора Гамильтона (оператора энергии поля).

3.3. Когерентные состояния квантового поля в резонаторе

Когерентные поля описываются функциями состояния вида:

$$\Psi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_j\dots}(\xi_1\xi_2\dots\xi_j\dots) = \prod \Psi_{\alpha_n}(\xi_n), \quad (55)$$

$$\Psi_{\alpha_n}(\xi_n) = \exp(-\alpha_n^2/2) \sum \frac{\alpha_n^m}{\sqrt{m!}} \Phi_m(\xi_n). \quad (56)$$

Действие оператора:

$$a_n \Psi_{\alpha_n}(\xi_n) = \alpha_n \Psi_{\alpha_n}(\xi_n), \quad (57)$$

$$a_n \Psi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_j\dots}(\xi_1\xi_2\dots\xi_j\dots) = \alpha_n \Psi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_j\dots}(\xi_1\xi_2\dots\xi_j\dots). \quad (58)$$

3.4. Сжатые состояния

Сжатые состояния определяются следующим образом:

$$|\alpha, \xi\rangle = S(\xi)D(\alpha)|0\rangle, \quad (59)$$

где α и ξ – произвольные комплексные числа,

$$D(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a) = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(\alpha a^+) \exp(-\alpha^* a) = \exp\left(\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \exp(-\alpha^* a) \exp(\alpha a^+), \quad (60)$$

$$S(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* a^2 - \frac{1}{2}\xi (a^+)^2\right). \quad (61)$$

Для вычисления средних значений нам понадобятся следующие формулы

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \xi | a | \alpha, \xi \rangle &= \langle \alpha, \xi | D^+(\alpha) S^+(\xi) a S(\xi) D(\alpha) | 0 \rangle = \\ &= \langle \alpha | a \operatorname{ch}(r) - a^+ \exp(i\theta) \operatorname{sh}(r) | \alpha \rangle = \\ &= \alpha \operatorname{ch}(r) - \alpha^* \exp(i\theta) \operatorname{sh}(r), \end{aligned} \quad (62)$$

где было использовано представление $\xi = r \exp(i\theta)$.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \xi | a^2 | \alpha, \xi \rangle &= \langle \alpha, \xi | D^+(\alpha) S^+(\xi) a^2 S(\xi) D(\alpha) | 0 \rangle = \\ &= \langle \alpha, \xi | D^+(\alpha) S^+(\xi) a S(\xi) S^+(\xi) a S(\xi) D(\alpha) | 0 \rangle = \\ &= \alpha^2 \operatorname{ch}^2(r) + (\alpha^*)^2 \exp(2i\theta) \operatorname{sh}^2(r) - \\ &- 2|\alpha|^2 \exp(i\theta) \operatorname{sh}(r) \operatorname{ch}(r) - \exp(i\theta) \operatorname{sh}(r) \operatorname{ch}(r). \\ \langle \alpha, \xi | a^+ a | \alpha, \xi \rangle &= |\alpha|^2 (\operatorname{ch}^2(r) + \operatorname{sh}^2(r)) - \\ &- (\alpha^*)^2 \exp(i\theta) \operatorname{sh}(r) \operatorname{ch}(r) - \\ &- (\alpha)^2 \exp(-i\theta) \operatorname{sh}(r) \operatorname{ch}(r) + \operatorname{sh}^2(r). \end{aligned} \quad (64)$$

3.5. Перепутанные состояния

Рассмотрим две моды резонатора с номерами n и m . Пусть в моде n содержится n_n фотонов, а в моде m содержится n_m фотонов.

Состояние описывается следующей функцией:

$$\Phi(\xi_n \xi_m) = \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m), \quad (65)$$

где $\Phi_{q_n}(\xi_n)$ описывается выражением (50).

Рассмотрим ещё две моды резонатора с номерами p и s , содержащие n_p и n_s фотонов соответственно:

$$\Phi(\xi_p \xi_s) = \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p). \quad (66)$$

Далее рассмотрим состояние:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_n \xi_m \xi_p \xi_s) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) + \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p)). \end{aligned} \quad (67)$$

Состояние вида (67) нельзя представить с помощью функции с разделяющимися переменными. Такие состояния называются несепарабельными (неразделимыми) или перепутанными состояниями.

Другим примером перепутанного состояния может служить вариант, когда перепутываются две моды:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi_n \xi_m) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) + \Phi_{n_m}(\xi_n) \Phi_{n_n}(\xi_m)). \end{aligned} \quad (68)$$

4. Вычисление наблюдаемых величин

Наблюдаемое значение любой физической величины в квантовой механике определяется средним значением оператора этой величины и вычисляется по формуле

$$p = \int (\phi^*(x) P(x) \phi(x)) dx. \quad (69)$$

Для описания распространения поля в квантовой трактовке необходимо вычислить средние значения оператора электрического поля. Оператор электрического поля выражается через оператор векторного потенциала

$$E(r, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A(r, t)}{\partial t}. \quad (70)$$

Наблюдаемое значение электрического поля – это среднее значение оператора электрического поля

$$E_0(r, t) = \langle \Psi | E(r, t) | \Psi \rangle. \quad (71)$$

где $|\Psi\rangle$ описывает состояние квантового электромагнитного поля.

Среднеквадратичные отклонения электрического поля

$$(\Delta E_0(r,t))^2 = \langle \Psi | (E(r,t) - E_0(r,t))^2 | \Psi \rangle. \quad (72)$$

В дальнейшем нас будут интересовать также операторы положительно-частотной части электрического поля $E^{(+)}(r,t)$ и оператор отрицательно-частотной части электрического поля $E^{(-)}(r,t)$ и их матричные элементы

$$E_0^{(+)}(r,t) = \langle \Psi | E^{(+)}(r,t) | \Psi \rangle, \quad (73)$$

$$E_0^{(-)}(r,t) = \langle \Psi | E^{(-)}(r,t) | \Psi \rangle. \quad (74)$$

Для расчёта наблюдаемых величин нам будет необходимо найти квадраты электрического поля

$$\begin{aligned} \langle E^{(-)}(r,t) E^{(+)}(r,t) \rangle = \\ = \langle \Psi | E^{(-)}(r,t) E^{(+)}(r,t) | \Psi \rangle. \end{aligned} \quad (75)$$

Эти выражения соответствуют наблюдаемым величинам, которые измеряются в эксперименте.

4.1. Вычисление средних значений векторного потенциала

$$\begin{aligned} A(x,y,z,t) = \\ = \sum a_m M_m \Phi_m(x,y,z) \exp(-i\omega_m t) + \\ + a_m^+ M_m \Phi_m^*(x,y,z) \exp(i\omega_m t). \end{aligned} \quad (76)$$

Среднее значение оператора

$$\begin{aligned} \langle \Psi | A(x,y,z,t) | \Psi \rangle = \\ = \sum \langle \Psi | a_m | \Psi \rangle M_m \Phi_m(x,y,z) \exp(-i\omega_m t) + \\ + \sum \langle \Psi | a_m^+ | \Psi \rangle M_m \Phi_m^*(x,y,z) \exp(i\omega_m t). \end{aligned} \quad (77)$$

При вычислении (77) используется соотношение:

$$\langle \Psi | a_m^+ | \Psi \rangle = (\langle \Psi | a_m | \Psi \rangle)^*. \quad (78)$$

В состоянии с определённым числом фотонов

Рассмотрим состояние $|n_m\rangle$ с определённым числом фотонов в моде с номером m . Эти состояния удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} a_m |n_m\rangle &= \sqrt{n_m} |(n_m - 1)\rangle, \\ a_m^+ |n_m\rangle &= \sqrt{n_m + 1} |(n_m + 1)\rangle. \end{aligned}$$

В случае многомодового поля в резонаторе состояние электромагнитного поля описывается вектором

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |n_m\rangle = \prod_{n_m} |n_m\rangle, \\ \langle \Psi | a_m | \Psi \rangle &= \langle \Psi | a_m^+ | \Psi \rangle = 0. \end{aligned}$$

В результате получаем, что среднее значение магнитного потенциала и электрического поля в состоянии с определённым числом фотонов равно нулю.

Однако следует отметить, что среднее значение оператора квадрата электрического поля не равно нулю.

В когерентном состоянии

Рассмотрим одномодовое когерентное состояние

$$|\Psi_m\rangle = \exp\left(-\frac{\alpha_m^2}{2}\right) \sum \frac{(\alpha_m)^2}{\sqrt{m!}} |n_m\rangle. \quad (79)$$

Многомодовое когерентное состояние

$$|\Psi_{\{m\}}\rangle = \prod_m |\Psi_m\rangle, \quad (80)$$

это состояние удовлетворяет соотношению

$$a_m |\Psi_m\rangle = \alpha_m |\Psi_m\rangle. \quad (81)$$

Для сопряжённого оператора выполняется соотношение

$$\langle \Psi_{\{m\}} | a_m^+ = \langle \Psi_m | \alpha_m^*. \quad (82)$$

Эти два уравнения позволяют вычислять матричные элементы операторов.

$$|\Psi\rangle = |\alpha\rangle = \prod_n |\alpha_n\rangle, \quad (83)$$

$$\langle \Psi | a_m | \Psi \rangle = \langle \alpha | a_m | \alpha \rangle = \alpha_m. \quad (84)$$

Например, найдём среднее значение оператора электромагнитного потенциала в когерентном состоянии.

$$\begin{aligned} \langle \Psi | A(x,y,z,t) | \Psi \rangle = \\ = \sum \alpha_m M_m \Phi_m(x,y,z) \exp(-i\omega_m t) + \\ + \alpha_m^* M_m \Phi_m^*(x,y,z) \exp(i\omega_m t). \end{aligned} \quad (85)$$

Это выражение совпадает с функцией векторного потенциала в классической теории. То же самое можно сказать относительно операторов электрического и магнитного полей.

В сжатом когерентном состоянии

В этом случае:

$$|\Psi\rangle = |\alpha, \eta\rangle = \prod_n |\alpha_n, \eta_n\rangle = |\alpha_m, \eta_m\rangle \prod_{n \neq m} |\alpha_n, \eta_n\rangle. \quad (86)$$

Учитывая соотношение в (86), получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | a_m | \Psi \rangle &= \langle \alpha, \eta | a_m | \alpha, \eta \rangle = \\ &= \prod_{n \neq m} \langle \alpha_n, \eta_n | \alpha_n, \eta_n \rangle \langle \alpha_m, \eta_m | a_m | \alpha_m, \eta_m \rangle = \\ &= \langle \alpha_m, \eta_m | a_m | \alpha_m, \eta_m \rangle. \end{aligned} \quad (87)$$

Далее, используя выражение (62), получаем

$$\begin{aligned} \langle \alpha_m, \xi_m | a_m | \alpha_m, \xi_m \rangle = \\ = \alpha_m \operatorname{ch}(r_m) - \alpha_m^* \exp(i\theta_m) \operatorname{sh}(r_m). \end{aligned} \quad (88)$$

Особенность сжатых состояний

Рассмотрим простой случай

$$A(x, y, z, t) = \sum a_m M_m \Phi_m(x, y, z) \exp(-i\omega_m t) + a_m^+ M_m \Phi_m^*(x, y, z) \exp(i\omega_m t). \quad (89)$$

Пусть у нас есть только одна мода

$$A(x, y, z, t) = a_m M_m \Phi_m(x, y, z) \exp(-i\omega_m t) + a_m^+ M_m \Phi_m^*(x, y, z) \exp(i\omega_m t). \quad (90)$$

Оператор электрического поля имеет вид

$$E(x, y, z, t) = ia_m \left(\frac{\omega_m}{c} M_m \right) \Phi_m(x, y, z) \exp(-i\omega_m t) - ia_m^+ \left(\frac{\omega_m}{c} M_m \right) \Phi_m^*(x, y, z) \exp(i\omega_m t). \quad (91)$$

Обозначим $Q_m = \left(\frac{\omega_m}{c} M_m \right)$.

Введём новые операторы рождения и уничтожения:

$$ia_m = b_m, \quad -ia_m^+ = b_m^+, \quad E(x, y, z, t) = b_m Q_m \Phi_m(x, y, z) \exp(-i\omega_m t) + b_m^+ Q_m^* \Phi_m^*(x, y, z) \exp(i\omega_m t). \quad (92)$$

$\Phi_m(x, y, z)$ являются действительными функциями.

$$E(x, y, z, t) = Q_m \Phi_m(x, y, z) (b_m \exp(-i\omega_m t) + b_m^+ \exp(i\omega_m t)). \quad (93)$$

Представим выражение в виде

$$E(x, y, z, t) = 2Q_m \Phi_m(x, y, z) (X_1 \cos(\omega_m t) + X_2 \sin(\omega_m t)), \quad (94)$$

$$X_1 = \frac{(b_m + b_m^+)}{2}; \quad X_2 = i \frac{(b_m^+ - b_m)}{2}. \quad (95)$$

Рассмотрим теперь

$$X_1 = Y_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - Y_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (96)$$

$$X_2 = Y_1 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + Y_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (97)$$

Подставляя это в выражение для электрического поля, получаем

$$E(x, y, z, t) = 2Q_m \Phi_m \left(Y_1 \cos\left(\omega_m t - \frac{\theta}{2}\right) + Y_2 \sin\left(\omega_m t - \frac{\theta}{2}\right) \right). \quad (98)$$

Из этого выражения видно, что в одни моменты времени оператор электрического поля определяется

только оператором Y_1 , в другой момент времени – только оператором Y_2 .

Дисперсии этих операторов, а значит, и дисперсии электрического поля равны

$$(DY_1)^2 = \langle Y_1^2 \rangle - \langle Y_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} \exp(2r), \quad (99)$$

$$(DY_2)^2 = \langle Y_2^2 \rangle - \langle Y_2 \rangle^2 = \frac{1}{4} \exp(-2r). \quad (100)$$

В результате получается, что дисперсия в одни моменты очень большая по сравнению с когерентным состоянием, но зато в другие моменты дисперсия электрического поля намного меньше, чем в когерентном состоянии.

В перепутанном состоянии

$$|\Psi\rangle = \Phi(\xi_n \xi_m \xi_p \xi_s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) + \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p)), \quad (101)$$

$$\langle \Psi | a_q | \Psi \rangle = \frac{1}{2} \langle \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) + \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) \times a_q(\xi_q) | \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) + \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) \rangle = \langle \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) | a_q(\xi_q) | \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) \rangle + \langle \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) | a_q(\xi_q) | \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) \rangle + \langle \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) | a_q(\xi_q) | \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) \rangle + \langle \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) | a_q(\xi_q) | \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) \rangle. \quad (102)$$

Найдём действие оператора на базисные вектора:

$$a_q(\xi_q) | \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) \rangle = \delta_{qs} \sqrt{n_s} | \Phi_{n_s-1}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) \rangle + \delta_{qp} \sqrt{n_p} | \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p-1}(\xi_p) \rangle, \quad (103)$$

$$a_q(\xi_q) | \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) \rangle = \delta_{qn} \sqrt{n_n} | \Phi_{n_n-1}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) \rangle + \delta_{qm} \sqrt{n_m} | \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m-1}(\xi_m) \rangle. \quad (104)$$

Используя соотношение

$$\langle \Phi_{n_s}(\xi_s) \Phi_{n_p}(\xi_p) | \Phi_{n_n}(\xi_n) \Phi_{n_m}(\xi_m) \rangle = \delta_{sn} \delta_{pm}, \quad (105)$$

можно получить явный вид для $\langle \Psi | a_q | \Psi \rangle$.

Заключение

На примере дифракции света на диэлектрической пластине в резонаторе рассмотрены аспекты квантовой оптики. Показана связь между классическим и квантовым решением задачи дифракции на диэлектрической пластине. Получены выражения для соб-

ственных мод такого резонатора, а также для операторов векторного магнитного потенциала и напряжённости электрического поля. Метод, предложенный в данной работе, может быть распространён на диэлектрические пластины с дифракционным микро-рельефом, то есть на дифракционные оптические элементы. Результаты расчёта квантовых систем с дифракционными оптическими элементами будут представлены в следующих публикациях.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/ЧЗ363/26) в части анализа дифракции излучения в резонаторе на диэлектрической пластине, а также в рамках реализации Программы развития Самарского университета на 2021–2030 годы в рамках программы «Приоритет-2030» при поддержке Правительства Самарской области в части разработки квантовой теории дифракционных оптических элементов.

References

- [1] Martin V, Brito JP, Escribano C, Menchetti M, White C, Lord A, Wissel F, Gunkel M, Gavignet P, Genay N, Le Moul O, Abellán C, Manzalini A, Pastor-Perales A, López V, López D. Quantum technologies in the telecommunications industry. *EPJ Quantum Technol* 2021; 8: 19. DOI: 10.1140/epjqt/s40507-021-00108-9.
- [2] Bennett CH, Bessette F, Brassard G, Salvail L, Smolin J. Experimental quantum cryptography. *J Cryptol* 1992; 5(1): 3-28. DOI: 10.1007/BF00191318.
- [3] Gisin N, Ribordy G, Tittel W, Zbinden H. Quantum cryptography. *Rev Mod Phys* 2002; 74(1): 145-195. DOI: 10.1103/RevModPhys.74.145.
- [4] Dušek M, Lütkenhaus N, Hendrych M. Quantum cryptography. In Book: Wolf E, ed. *Progress in optics*. Vol 49. Ch 5. Amsterdam, Oxford: Elsevier; 2006: 381-454. DOI: 10.1016/S0079-6638(06)49005-3.
- [5] Klauder JR, Sudarshan ECG. *Fundamentals of quantum optics*. New York: W A Benjamin Inc; 1968.
- [6] Klyshko D. *Physical foundations of quantum electronics*. Singapore: World Scientific Publisher Co Pte Ltd; 2011. ISBN: 978-981-4324-50-2.
- [7] Scully MO, Zubairy MS. *Quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1997. ISBN: 978-0-521-43458-4.
- [8] Mandel L, Wolf E. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1995. ISBN: 978-0-521-41711-2.
- [9] Kilin SYa. *Quantum optics. Fields and their detection* [In Russian]. Moscow: "Editorial URSS" Publisher; 2003. ISBN: 5-354-00442-X.
- [10] Belinsky AV, Lapshin VB. Specific features of interference of photons and other quantum particles. *Moscow University Physics Bulletin* 2016; 71(3): 258-265. DOI: 10.3103/S0027134916030036.
- [11] Belinsky AV, Zhukovskiy AK. The state vector of a quantum system: Mathematical fiction or physical reality, *Moscow University Physics Bulletin* 2016; 71(3): 253-257. DOI: 10.3103/S0027134916030024.
- [12] Belinsky AV, Vladimirov YuS. Relational-statistical nature of the regularities of quantum theory [In Russian]. *Space, Time and Fundamental Interactions* 2016; 1: 32-42.
- [13] Rastorguev AA, Kharitonov SI, Kazanskiy NL. Modeling of image formation with a space-borne Offner hyperspectrometer. *Computer Optics* 2020; 44(1): 12-21. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-644.
- [14] Kazanskiy N, Ivliev N, Podlipnov V, Skidanov R. An airborne Offner imaging hyperspectrometer with radially-fastened primary elements. *Sensors* 2020; 20(12): 3411. DOI: 10.3390/s20123411.
- [15] Rastorguev AA, Kharitonov SI, Kazanskiy NL. Numerical simulation of the performance of a spaceborne Offner imaging hyperspectrometer in the wave optics approximation. *Computer Optics* 2022; 46(1): 56-64. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1034.
- [16] Anshakov GP, Salmin VV, Peresyepkin KV, Chetverikov AS, Tkachenko IS. Design and control of the diffraction optical system for the prospective project of the observation spacecraft. *J Phys Conf Ser* 2018; 1096(1): 012076. DOI: 10.1088/1742-6596/1096/1/012076.
- [17] Wright LG, Christodoulides DN, Wise FW. Controllable spatiotemporal nonlinear effects in multimode fibres. *Nat Photonics* 2015; 9(5): 306-310. DOI: 10.1038/nphoton.2015.61.
- [18] Bevzenko IG. Investigation of the behavior of ultrashort pulses in multiwire structures with inhomogeneous dielectric filling [In Russian]. *Computing, Telecommunications and Control* 2016; 252(4): 7-18. DOI: 10.5862/JCSTCS.252.1.
- [19] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN, Kazanskiy NL. Propagation of electromagnetic pulses and calculation of dynamic invariants in a waveguide with a convex shell. *Computer Optics* 2018; 42(6): 947-958. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-6-947-958.
- [20] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Calculation of the angular momentum of an electromagnetic field inside a waveguide with absolutely conducting walls. *Computer Optics* 2018; 42(4): 588-605. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-4-588-605.
- [21] Caron CFR, Potvliege RM. Free-space propagation of ultrashort pulses: space-time couplings in Gaussian pulse beams. *J Mod Opt* 1999; 46(13): 1881-1891. DOI: 10.1080/09500349908231378.
- [22] Feng S, Winful HG. Spatiotemporal structure of iso-diffracting ultrashort electromagnetic pulses. *Phys Rev E* 2000; 61(1): 862-873. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.862.
- [23] Belgioirno F, Cacciatori SL, Clerici M, Gorini V, Ortenzi G, Rizzi L, Rubino E, Sala VG, Faccio D. Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments. *Phys Rev Lett* 2010; 105(20): 203901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.203901.
- [24] Khonina SN, Golub I. Tighter focus for ultrashort pulse vector light beams: change of the relative contribution of different field components to the focal spot upon pulse shortening. *J Opt Soc Am A* 2018; 35(6): 985-991. DOI: 10.1364/JOSAA.35.000985.
- [25] Slavik R, Park Y, Kulishov M, Azaña J. Terahertz-bandwidth high-order temporal differentiators based on phase-shifted long-period fiber gratings. *Opt Lett* 2009; 34(20): 3116-3118. DOI: 10.1364/OL.34.003116.
- [26] Preciado MA, Shu X, Harper P, Sugden K. Experimental demonstration of an optical differentiator based on a fiber Bragg grating in transmission. *Opt Lett* 2013; 38(6): 917-919. DOI: 10.1364/OL.38.000917.
- [27] Bykov DA, Doskolovich LL, Golovastikov NV, Soifer VA. Time-domain differentiation of optical pulses in reflection and in transmission using the same resonant grat-

- ing. J Opt 2013; 15(10): 105703. DOI: 10.1088/2040-8978/15/10/105703.
- [28] Liu F, Wang T, Qiang L, Ye T, Zhang Z, Qiu M, Su Y. Compact optical temporal differentiator based on silicon microring resonator. Opt Express 2008; 16(20): 15880-15886. DOI: 10.1364/OE.16.015880.
- [29] Kazanskiy NL, Serafimovich PG, Khonina SN. Use of photonic crystal cavities for temporal differentiation of optical signals. Opt Lett 2013; 38(7): 1149-1151. DOI: 10.1364/OL.38.001149.
- [30] Silva A, Monticone F, Castaldi G, Galdi V, Alù A, Engheta N. Performing mathematical operations with metamaterials. Science 2014; 343: 160-163. DOI: 10.1126/science.1242818.
- [31] Pors A, Nielsen MG, Bozhevolnyi SI. Analog computing using reflective plasmonic metasurfaces. Nano Lett 2015; 15(1): 791-797. DOI: 10.1021/nl5047297.
- [32] Kharitonov SI, Khonina SN, Kazanskiy NL. Field quantization in a waveguide with freeform cladding. Proc SPIE 2021; 11793: 117930R. DOI: 10.1117/12.2593197.

Сведения об авторах

Харитонов Сергей Иванович 1961 г. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры нанотехнологий, ведущий научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета; 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию; 2010 г. – защитил докторскую диссертацию. Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, волноводная оптика. В списке научных работ С.И. Харитонova 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: prognoz2007@gmail.com.

Казанский Николай Львович в 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет)) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 г.), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Заведующий базовой кафедрой высокопроизводительных вычислений Самарского университета в ИСОИ РАН. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельства и патента. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: kazanskiy@ssau.ru.

Волотовский Сергей Геннадьевич, научный сотрудник, ведущий программист ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирование работы элементов дифракционной оптики. E-mail: sv@ipsiras.ru.

Сведения об авторе **Хонина Светлана Николаевна** – см. стр. 732 этого номера.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 16 июня 2022 г. Окончательный вариант – 30 июня 2022 г.

Calculation of quantum characteristics based on the classical solution of the diffraction problem in a resonator with a dielectric plate

S.I. Kharitonov^{1,2}, N.L. Kazanskiy^{1,2}, S.G. Volotovskiy¹, S.N. Khonina^{1,2}

¹IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS,
Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia,

²Samara National Research University, Moskovskoye shosse, 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

The work is devoted to the development of the quantum theory of diffractive optical elements. Aspects of quantum optics are considered by the example of light diffraction from a dielectric plate in a resonator. The paper shows the connection between the classical and quantum solution of the problem of diffraction by a dielectric plate. Expressions are obtained for the eigenmodes of such a resonator, as well as for the operators of the vector magnetic potential and the electric field strength. The method proposed in this paper can be easily extended to dielectric plates with a diffractive microrelief, that is, to diffractive optical elements.

Keywords: modes of a resonator with a dielectric plate, field quantization, field quantum characteristics.

Citation: Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Volotovskiy SG, Khonina SN. Calculation of quantum characteristics based on the classical solution of the diffraction problem in a resonator with a dielectric plate. *Computer Optics* 2022; 46(5): 741-751. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1174.

Acknowledgements: This work was financially supported by the RF Ministry of Science and Higher Education within the state project of the FSRC "Crystallography and Photonics RAS" (agreement No. 007-GZ/Ch3363/26) in part of analyzing the light diffraction in a resonator with a dielectric plate, and within the framework of the Development Program of Samara University for 2021–2030 within the framework of the "Priority-2030" program with the support of the Government of the Samara Region in part of developing a quantum theory of diffractive optical elements.

Authors' information

Sergey Ivanovich Kharitonov (b. 1961) leading researcher of Diffractive Optics laboratory in the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University (presently, Samara National Research University); 1993 – defended his candidate dissertation; 2010 – defended his doctoral thesis. Research interests: diffraction, quantum optics, waveguide optics. The list of S.I. Kharitonov scientific papers includes 87 articles, 5 patents. E-mail: prognoz2007@gmail.com.

Nikolay Lvovich Kazanskiy graduated with honors (1981) from Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Mathematics (1996) degrees from Samara University. He is the Head of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics RAS", also holding a part-time position of a professor at Technical Cybernetics department of Samara University, holding the chair at the of High-Performance Computing department at IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics RAS". He is a member of OSA, SPIE and IAPR. He co-authored 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics.

Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: kazanskiy@ssau.ru.

Sergey Gennadjevich Volotovskiy, researcher in the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements.

E-mail: sv@ipsiras.ru.

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: khonina@ipsiras.ru.

Received June 16, 2022. The final version – June 30, 2022.
