

## Спиральная фазовая пластинка со множеством центров сингулярности

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалев<sup>1,2</sup>, Е.С. Козлова<sup>1,2</sup>, А.П. Порфирьев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Рассмотрена мультиспиральная фазовая пластинка, у которой имеется множество центров сингулярности фазы, расположенных в произвольных точках в плоскости пластинки. Получены замкнутые выражения для топологического заряда вихревого поля в начальной плоскости сразу за обычной спиральной фазовой пластинкой и нормированного на мощность пучка орбитального углового момента. Топологический заряд в начальной плоскости равен сумме топологических зарядов каждой сингулярности, если их центры находятся внутри круглой апертуры конечного радиуса. Если часть центров сингулярности фазы лежит на границе круглой диафрагмы, ограничивающей обычную спиральную фазовую пластинку, то их топологический заряд в сумме нужно поделить на 2. Орбитальный угловой момент зависит от расположения центров сингулярности: чем дальше от центра пластинки расположен центр сингулярности, тем меньше вклад в орбитальный угловой момент. Если все центры сингулярности лежат на границе, ограничивающей мультиспиральную фазовую пластинку диафрагмы, то орбитальный угловой момент пучка равен нулю, хотя топологический заряд пучка в этом случае будет отличен от нуля.

**Ключевые слова:** спиральная фазовая пластинка, оптические вихри, орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Спиральная фазовая пластинка со множеством центров сингулярности / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Е.С. Козлова, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 6. – С. 901-908. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-774.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Kozlova ES, Porfirev AP. Spiral phase plate with many singularity centers. Computer Optics 2020; 44(6): 901-908. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-774.

### Введение

Вихревые лазерные пучки [1] продолжают напряженно исследоваться из-за их уникальных топологических свойств [2, 3] и широкого применения в квантовой информатике [4], системах беспроводной связи [5], манипулировании микрочастицами [6], зондировании атмосферы в присутствии турбулентности [7]. Впервые вихревые лазерные пучки с фазовой сингулярностью были сформированы с помощью амплитудной голограммы с «вилочкой» [8] и спиральной фазовой пластинки (СФП) [9]. Сегодня такие пучки удобно формировать с помощью пространственного модулятора света (ПМС) [10]. Лазерные пучки с фазовой сингулярностью характеризуются определенным топологическим зарядом (ТЗ) [2] и несут орбитальный угловой момент (ОУМ) [3]. Эти характеристики отражают разные стороны вихревого пучка. Если ОУМ сохраняется при распространении пучка, то ТЗ может сохраняться, а может не сохраняться при распространении [11]. Топологический заряд пучка, состоящего из линейной комбинации ОУМ-гармоник [12], определяется «топологической конкуренцией» между ними [13]. При распространении лазерного пучка с начальным дробным ТЗ могут рождаться новые оптические вихри (центры сингулярности) [14, 15]. В [16, 17] было показано, что Гауссов пучок с

внедренным в его перетяжку множеством оптических вихрей с топологическими зарядами одного знака является структурно-стабильным и при распространении изменяет только масштаб и может вращаться. В [18] рассмотрен частный случай, когда центры сингулярности (нули интенсивности) лежат равномерно на окружности (центр окружности лежит на оптической оси) в поперечном сечении Гауссова пучка. В [18] удалось получить точные выражения для ТЗ и ОУМ такого мультивихря. Измерять ТЗ можно с помощью цилиндрической линзы [19] или треугольной диафрагмы [20], а измерять ОУМ можно с помощью двух цилиндрических линз [21].

В данной работе мы рассматриваем новый оптический элемент – мультиспиральную фазовую пластинку (МСФП), которая имеет множество центров сингулярности фазы, произвольно расположенных по плоскости пластинки. В практическом плане формировать вихревой лазерной пучок с помощью МСФП можно как обычно, с помощью ПМС. Приводятся замкнутые выражения для ТЗ и ОУМ оптических вихрей, сформированных МСФП. Особенностью такой спиральной фазовой пластинки является то, что при попадании центра сингулярности на край ограничивающей диафрагмы ТЗ пучка в начальной плоскости становится полупелым. Если все центры сингулярности попали на край диафрагмы, то ОУМ пучка будет равен нулю.

Если все центры сингулярности собраны в центре пластинки, то МСФП становится обычной СФП.

Заметим, что ранее авторы уже рассматривали пучки с несколькими сингулярностями [22]. Но в [22] были рассмотрены поляризаационные сингулярности, внедренные в Гауссов пучок. В каждой точке у такого пучка поляризация линейная, но вектор поляризации изменяется по полю, аналогично как у радиальной или азимутальной поляризации. В данной работе мы рассматриваем другую ситуацию, когда Гауссов пучок с линейной поляризацией падает на фазовую пластинку с несколькими сингулярностями, центры которых произвольно расположены по полю. Сходство этих работ в том, что в обеих работах в начальном поле несколько произвольно расположенных по сечению пучка сингулярностей (неопределенностей) фазы или поляризации. Оба типа таких неопределенностей приводят к изолированным нулям интенсивности в поле. А различия в том, что для случая поляризаационных сингулярностей удалось только найти координаты нулей интенсивности, а для пучка с фазовыми сингулярностями удалось рассчитать ОУМ и ТЗ.

**Топологический заряд поля от МСФП**

Рассмотрим комплексную функцию пропускания мультиспиральной фазовой пластинки, у которой име-

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \Psi(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^M n_p \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2 - rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)} =$$

$$= \frac{R}{2\pi} \sum_{p=1}^M n_p \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R - r_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{R^2 + r_p^2 - 2Rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)} = \begin{cases} \sum_{p=1}^M n_p, & r_p < R, p = 1, 2, \dots, M, \\ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^M n_p, & r_p = R, p = 1, 2, \dots, M, \\ \sum_{p=1}^N n_p + \frac{1}{2} \sum_{p=N+1}^M n_p, & r_p < R, p = 1, 2, \dots, N, \\ & r_p = R, p = N + 1, N + 2, \dots, M. \end{cases} \tag{4}$$

При получении (4) воспользовались справочным интегралом [23]

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad |a| > |b|. \tag{5}$$

Из (4) следует, что если точка сингулярности фазы МСФП находится на краю диафрагмы, то ТЗ светового поля в начальной плоскости будет дробным (целым или полуцелым). Ранее авторами было показано [13], что при распространении оптического вихря с начальным дробным ТЗ могут возникать несколько сценариев эволюции такого вихря, в зависимости от близости начального ТЗ к четному или нечетному целому числу. В нашем случае механизм возникновения дробного ТЗ другой, и в данном случае начальный ТЗ может быть только целым или полуцелым. Заметим, что если в (1) вместо освещающей плоской волны,

юстя  $M$  центров фазовой сингулярности, находящихся в точках с полярными координатами  $(r_p, \varphi_p)$ :

$$E(r, \varphi) = \text{circl}\left(\frac{r}{R}\right) \exp(i\Psi(r, \varphi)), \tag{1}$$

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_{p=1}^M n_p \arctg\left(\frac{r \sin \varphi - r_p \sin \varphi_p}{r \cos \varphi - r_p \cos \varphi_p}\right), \tag{2}$$

где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты,  $n_p$  – топологический заряд каждой отдельной сингулярности,  $\text{circl}(r/R) = \{1, r \leq R; 0, r > R\}$  – функция круглой диафрагмы с радиусом  $R$ , которая ограничивает МСФП. Рассчитаем полный ТЗ светового поля в начальной плоскости, которое появляется сразу за МСФП (1), если осветить ее нормально световым пучком с радиально-симметричной амплитудой  $A(r)$ . Для расчета ТЗ воспользуемся формулой Берри [2]:

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \tag{3}$$

Подставим в первый из интегралов выражения (3) аргумент функции (1), получим:

ограниченной круглой диафрагмой, осветить СФП Гауссовым пучком, то ТЗ оптического вихря, сформировавшегося за СФП, будет равен сумме топологических зарядов всех сингулярностей:

$$TC = \sum_{p=1}^M n_p .$$

**Орбитальный угловой момент пучка после МСФП**

Найдем далее ОУМ светового поля (1) в начальной плоскости. Для этого воспользуемся известным выражением для расчета ОУМ и мощности пучка [21]:

$$J_z = -i \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r dr d\varphi, \tag{6}$$

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |E|^2 r dr d\varphi. \tag{7}$$

Для взятия производной под интегралом в (6) от поля (1) удобно переписать амплитуду поля (1) в виде:

$$E(r, \varphi) = \text{circI} \left( \frac{r}{R} \right) A(r) \times \prod_{p=1}^M \left( \frac{re^{i\varphi} - r_p e^{i\varphi_p}}{\sqrt{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)}} \right)^{n_p} \quad (8)$$

Подставим (8) в (6), получим:

$$J_z = \sum_{p=1}^M n_p \int_0^R |A(r)|^2 r dr \times \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^2 - rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)}{r^2 + r_p^2 - 2rr_p \cos(\varphi - \varphi_p)} = \sum_{p=1}^M n_p \int_0^R |A(r)|^2 r dr \begin{cases} 2\pi, & r_p < r \\ 0, & r_p \geq r \end{cases} = \sum_{p=1}^M n_p \int_{r_p}^R |A(r)|^2 r dr \quad (9)$$

При получении (9) воспользовались справочными интегралами [23]:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^2 - 2a \cos x} = \frac{2\pi}{|1 - a^2|}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1 + a^2 - 2a \cos x} = \begin{cases} \frac{2\pi a}{1 - a^2}, & a < 1, \\ \frac{2\pi}{a(a^2 - 1)}, & a \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Нормированный ОУМ светового пучка с амплитудой  $A(r)$ , прошедшего МСФП (1), будет равен выражению:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\sum_{p=1}^M n_p \int_{r_p}^R |A(r)|^2 r dr}{\int_0^R |A(r)|^2 r dr} \quad (11)$$

Выражение (11) для ОУМ обобщает ранее полученное авторами выражение для СФП с одним смещенным центром сингулярности [24]. Из сравнения (4) и (11) видно, что ОУМ зависит от степени близости центров сингулярности фазы МСФП к краю круглой диафрагмы радиуса  $R$ . Если центр сингулярности фазы попадает на край диафрагмы, то он «пропадает» из суммы в (11) и не дает вклад в ОУМ. Такой «крайний» центр сингулярности ( $r_p = R$ ) дает «половинный» ( $n_p/2$ ) вклад в общий ТЗ пучка. В случае, если все центры сингулярности лежат на окружности радиуса  $r_0$ , выражение (11) упрощается:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\int_0^R |A(r)|^2 r dr}{\int_0^R |A(r)|^2 r dr} \sum_{p=1}^M n_p \quad (12)$$

Если радиус окружности, на которой лежат центры сингулярностей, совпадает с радиусом диафрагмы ( $r_0 = R$ ), то из (12) следует, что ОУМ пучка после СФП будет равен нулю. Однако ТЗ такого пучка будет отличен от нуля и равен  $0,5 \sum n_p$ . Простой пример оптического вихря, у которого ОУМ равен нулю, а ТЗ отличен от нуля, приведен в Приложении. Из (12) видно, что если все центры сингулярности свести в центр диафрагмы ( $r_p = 0$ ), то ОУМ пучка (12) будет равен ТЗ (4):  $J_z / W = \sum n_p$ .

### Амплитуда светового поля, прошедшего МСФП

Найти амплитуду светового поля в зоне Френеля или в дальней зоне для светового поля (1) в замкнутом виде (без использования рядов) не удастся. Поэтому упростим задачу и рассмотрим, к чему приводит смещение с оптической оси одного центра сингулярности оптического вихря, внедренного в перетяжку Гауссова пучка, в Фурье-плоскости сферической линзы. То есть вместо (1) рассмотрим в начальной плоскости световое поле с амплитудой вида:

$$E(r, \varphi) = \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) (re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0})^n \quad (13)$$

В Фурье-плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием  $f$  комплексная амплитуда поля (13) выражается через преобразование Фурье

$$E(\rho, \theta) = \left( \frac{-ik}{2\pi f w^n} \right) \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{w^2}} (re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0})^n \times \exp \left( \frac{-ikr\rho}{f} \cos(\varphi - \theta) \right) r dr d\varphi = \left( \frac{-ikw^2}{2f} \right) \exp \left( -\left( \frac{k\rho}{2f} \right)^2 \right) \left( \frac{-ik\rho}{2f} e^{i\theta} - \frac{r_0}{w} e^{i\varphi_0} \right)^n \quad (14)$$

где  $k$  – волновое число света. Из сравнения (13) и (14) видно, что ноль интенсивности (центр сингулярности)  $n$ -го порядка в начальной плоскости, находящийся в точке с координатами  $(r_0, \varphi_0, z=0)$  в Фурье-плоскости, останется по-прежнему нулем интенсивности  $n$ -го порядка, но будет находиться в точке с координатами  $(2fr_0/kw^2, \varphi_0 + \pi/2, z=f)$ . То есть повернется на 90 градусов по отношению к начальному положению. ОУМ такого пучка, в котором оптический вихрь смещен с оси, уменьшается с ростом величины смещения  $r_0$  [24]. Можно показать, что аналогичным образом будут распространяться и несколько нулей интенсивности (оптические вихри), внедренных в разные точки перетяжки Гауссова пучка. Комплексная амплитуда такого пучка на любом расстоянии от перетяжки будет иметь вид [16,17]:

$$E(r, \varphi) = \frac{1}{q(z)} \left( \frac{\sqrt{2}}{w} \right)^M \exp \left( \frac{-r^2}{w^2 q(z)} \right) \times \prod_{p=1}^M \left( \frac{r e^{i\varphi}}{q(z)} - r_p e^{i\varphi_p} \right)^{n_p}, \quad q(z) = 1 + i \frac{z}{z_0}, \quad (15)$$

где  $z_0 = kw^2/2$  – длина Рэлея.

Найдем также комплексную амплитуду поля в Фурье-плоскости для поля с комплексной амплитудой в начальной плоскости:

$$E(r, \varphi) = \exp \left( -\frac{r^2}{w^2} \right) (r e^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_0})^n \times (r^2 + r_0^2 - 2r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0))^{-n/2}. \quad (16)$$

Фурье-преобразование для поля (16) будет иметь вид:

$$E(\rho, \theta) = \left( \frac{-ik}{2\pi f} \right) \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{w^2}} \exp \left[ i n \arctg \left( \frac{r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0}{r \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0} \right) \right] \times \exp \left( \frac{-ikr\rho}{f} \cos(\varphi - \theta) \right) r dr d\varphi. \quad (17)$$

Введем новые переменные:

$$E(\rho, \theta) = \left( \frac{-ikw^2}{16\sqrt{\pi}f} \right) \exp \left( -i \frac{k}{f} r_0 \rho \cos(\theta - \varphi_0) \right) e^{-\rho^2/w^2} x^{-n} (xw) \left( -i \frac{k}{f} \rho e^{i\theta} - \frac{2r_0}{w^2} e^{i\varphi_0} \right)^n \left[ I_{(n-1)/2} \left( -\frac{x^2 w^2}{8} \right) - I_{(n+1)/2} \left( -\frac{x^2 w^2}{8} \right) \right]. \quad (21)$$

Из (21) следует, что как и у поля (14), так и поля (16) ноль интенсивности порядка  $n$  будет в Фурье-плоскости находиться в точке с координатами

$$(\rho, \theta, z) = \left( \frac{2fr_0}{kw^2}, \varphi_0 + \frac{\pi}{2}, z = f \right).$$

То есть оба поля (4) и (16) топологически одинаковы.

### Эксперимент и моделирование

На рис. 1 показана использованная экспериментальная установка. Линейно-поляризованный лазерный луч Гаусса ( $\lambda = 532$  нм,  $w_0$  составляет около 5 мм) был расширен и коллимирован с помощью комбинации точечного отверстия PH (с апертурой 40 мкм) и линзы  $L_1$  с фокусным расстоянием 350 мм. Зеркала  $M_1$  и  $M_2$ , а также два светоделителя  $B_1$  и  $B_2$  были использованы для реализации интерферометрической установки Маха–Цендера. Коллимированный лазерный пучок далее падал на дисплей пространственного модулятора света SLM (HOLOEYE LC-2012, 1024×768 пикселей), который использовался для реализации функции мультиспиральной фазовой пластинки. Оптическая система 4- $f$  состояла из линз  $L_2$  (фокусное расстояние  $f_2 = 150$  мм) и  $L_3$  (фокусное расстояние  $f_3 = 150$  мм), а диафрагма D пространственно фильтровала лазерный пучок, генерируемый SLM.

$$\begin{cases} r' \sin \varphi' = r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0, \\ r' \cos \varphi' = r \cos \varphi - r_0 \cos \varphi_0. \end{cases} \quad (18)$$

Тогда в новых переменных получим вместо (17):

$$E(\rho, \theta) = \left( \frac{-ik}{2\pi f} \right) \exp \left( -i \frac{k}{f} r_0 \rho \cos(\theta - \varphi_0) \right) e^{-\rho^2/w^2} \times x^{-n} \left( -i \frac{k}{f} \rho e^{i\theta} - \frac{2r_0}{w^2} e^{i\varphi_0} \right)^n \int_0^\infty e^{-\frac{r'^2}{w^2}} J_n(r'x) r' dr', \quad (19)$$

где

$$x = \left[ \left( \frac{k\rho}{f} \right)^2 - \left( \frac{2r_0}{w^2} \right)^2 - 2i \frac{k r_0 \rho}{f w^2} \cos(\theta - \varphi_0) \right]^{1/2}.$$

Интеграл по  $r'$  в (19) можно вычислить с помощью справочного интеграла [23]:

$$\int_0^\infty x e^{-\mu x^2} J_\nu(cx) dx = \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{8p}} \left[ I_{(\nu-1)/2} \left( \frac{c^2}{8p} \right) - I_{(\nu+1)/2} \left( \frac{c^2}{8p} \right) \right], \quad (20)$$

где  $I_\nu(x)$  – модифицированные функции Бесселя. Окончательно вместо (19) получим:

Распределение интенсивности, сформированное в зоне Френеля на расстоянии 50 мм от фокальной плоскости объектива  $L_4$  (фокусное расстояние  $f_4 = 350$  мм), было записано с помощью видеокамеры (3264×2448 пикселей, размер пикселя 1,67 мкм). Фильтр нейтральной плотности F использовался для выравнивания интенсивностей объектного и опорного пучков.

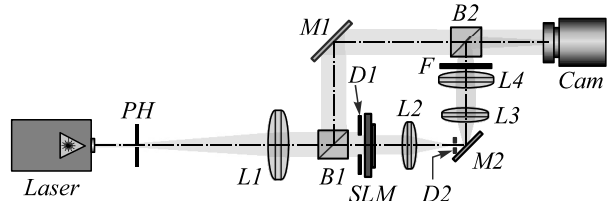


Рис. 1. Схема экспериментальной установки в виде интерферометра Маха–Цендера

На рис. 2 показаны экспериментальные ( $в, з, ж, з, л, м$ ) и для сравнения модельные ( $а, б, д, е, и, к$ ) картины сечения интенсивности пучка ( $а, в, д, ж, и, л$ ) и его интерферограммы ( $б, з, е, з, к, м$ ) в зоне Френеля (на 50 мм от фокуса линзы  $L_4$ ). Пучок был сформирован мультиспиральной фазовой пластинкой с тремя центрами сингулярности, лежащими внутри круга с радиусом 4 мм ( $а, б, в, з$ ). По сбоям полос на интерферограммах ( $б, з$ ) можно видеть, что в пучке присут-

ствуют 3 оптических вихря с ТЗ +1 (выделены черными кружками). Таким образом, ТЗ всего пучка будет равен 3. Интересно, что если центр одного из вихрей на рис. 2 будет находиться на краю диафрагмы (д, е, ж, з), то в распределении интенсивности этот «обрезанный» вихрь не проявляется (д, ж). А на интерферограммах (е, з) он проявляется в виде сближения интерференционных полос (отмечено кружком на рис. 2е, з). Поэтому в данном случае ТЗ всего пучка дробный 2,5. Если же центр третьего вихря находится за пределами диафрагмы, то он не проявляется ни в интенсивности пучка (и, л), ни на интерферограмме (к, м). Заметим, что световые «ободки» вокруг нулей интенсивности на рис. 2а, в, д, ж, и, л были описаны в [25] и появляются из-за того, что оптический

вихрь, как воронка, «выбрасывает» интенсивность из своего центра на периферию.

На рис. 3 показаны распределения интенсивности и их интерферограммы для пучка с 4 оптическими вихрями в зоне Френеля, сформированного мульти-спиральной фазовой пластинкой. И так же, как на рис. 2е, з, на рис. 3е, з видно из интерферограммы, что когда центр одного из вихрей попадает на край диафрагмы, то вместо сбоя полос на половину полосы происходит сбой меньше, чем на половину полосы (выделено кружком на рис. 3е, з). То есть ТЗ пучка на рис. 3д, ж равен 3,5.

В заключение этого параграфа заметим, что эксперимент (рис. 2, 3) согласуется с теорией (4).

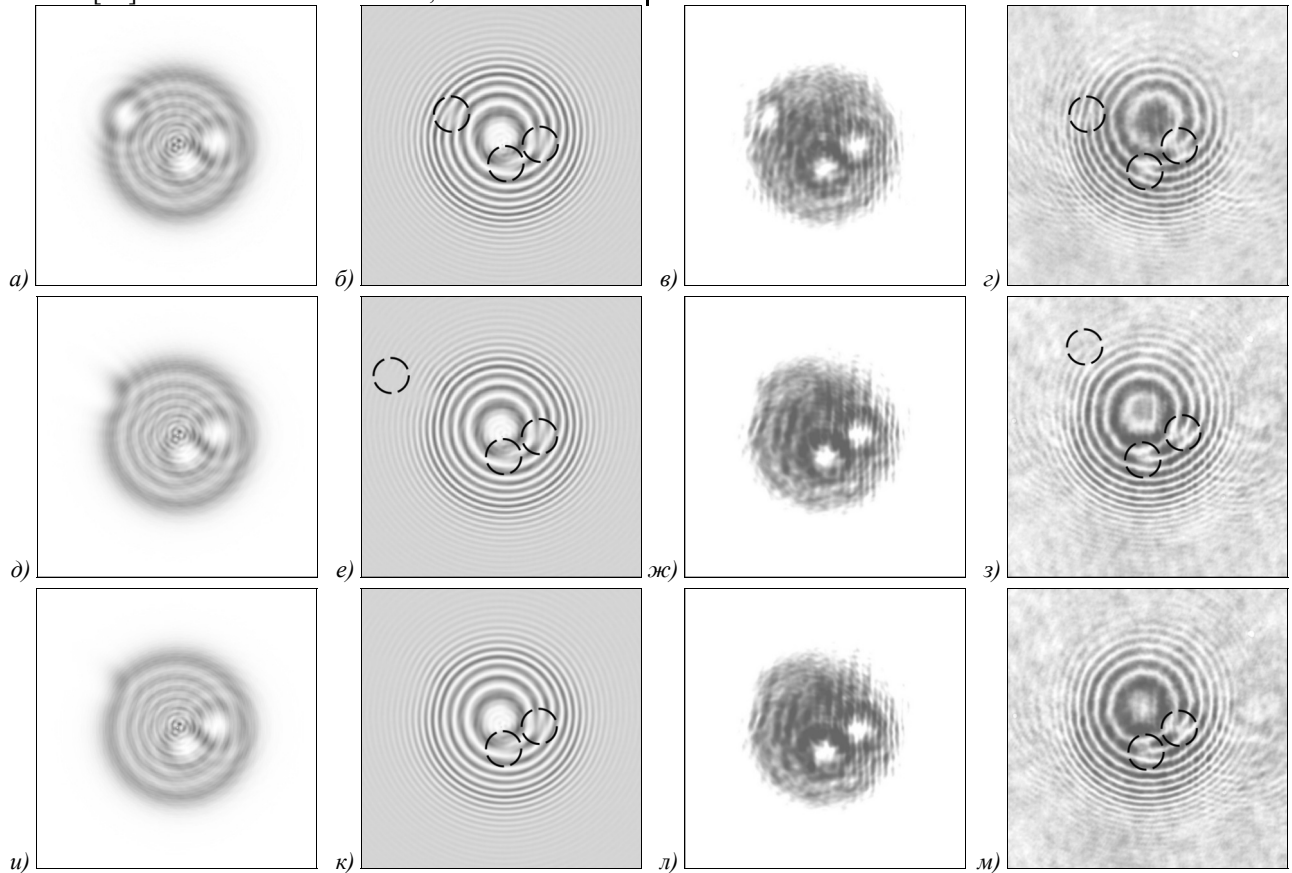


Рис. 2. Модельные (а, б, д, е, и, к) и экспериментальные (в, г, ж, з, л, м) распределения интенсивности без опорного пучка (а, в, д, ж, и, л) и с опорным пучком (б, г, е, з, к, м) на расстоянии 50 мм от фокуса линзы  $L_4$ , сформированные мультиспиральной фазовой пластинкой (SLM), с тремя центрами сингулярности, находящимися внутри круглой диафрагмы радиусом 4 мм (а, б, в, г), с тремя центрами сингулярности, но один из которых находился на краю диафрагмы радиусом 4 мм (д, е, ж, з), и с тремя центрами сингулярности, но один из которых находился за пределами диафрагмы радиусом 4 мм (и, к, л, м). Размеры кадров –  $10 \times 10$  мм

### Заключение

Рассмотрена мультиспиральная фазовая пластинка, у которой вместо одного центра сингулярности фазы рассматриваются множество центров сингулярности одного знака, но разного порядка, расположенных в произвольных точках в плоскости спиральной пластинки. Топологический заряд такой МСФП равен сумме всех порядков каждой сингулярности, если все они лежат внут-

ри границы круглой диафрагмы. Если некоторые центры сингулярности лежат на границе диафрагмы, то их топологический заряд учитывается со множителем  $1/2$ . Орбитальный угловой момент мульти-СФП (вернее поля, которое она формирует) зависит от расстояния каждого центра сингулярности от оптической оси (от центра пластинки или от центра круглой диафрагмы). Чем дальше от центра расположен центр сингулярности, тем меньше его вклад в общий ОУМ пучка. Если все центры

сингулярности СФП расположены на краю диафрагмы (или вне диафрагмы), то ОУМ пучка равен нулю. Если все центры сингулярности собраны в центре СФП, то ее ОУМ максимален и совпадает с ее ТЗ. Эксперимент по

формированию лазерного пучка с помощью мультиспиральной фазовой пластинки согласуется с предсказаниями теории и с моделированием в том, что ТЗ пучка, у которого центр лежит на краю диафрагмы, дробный.

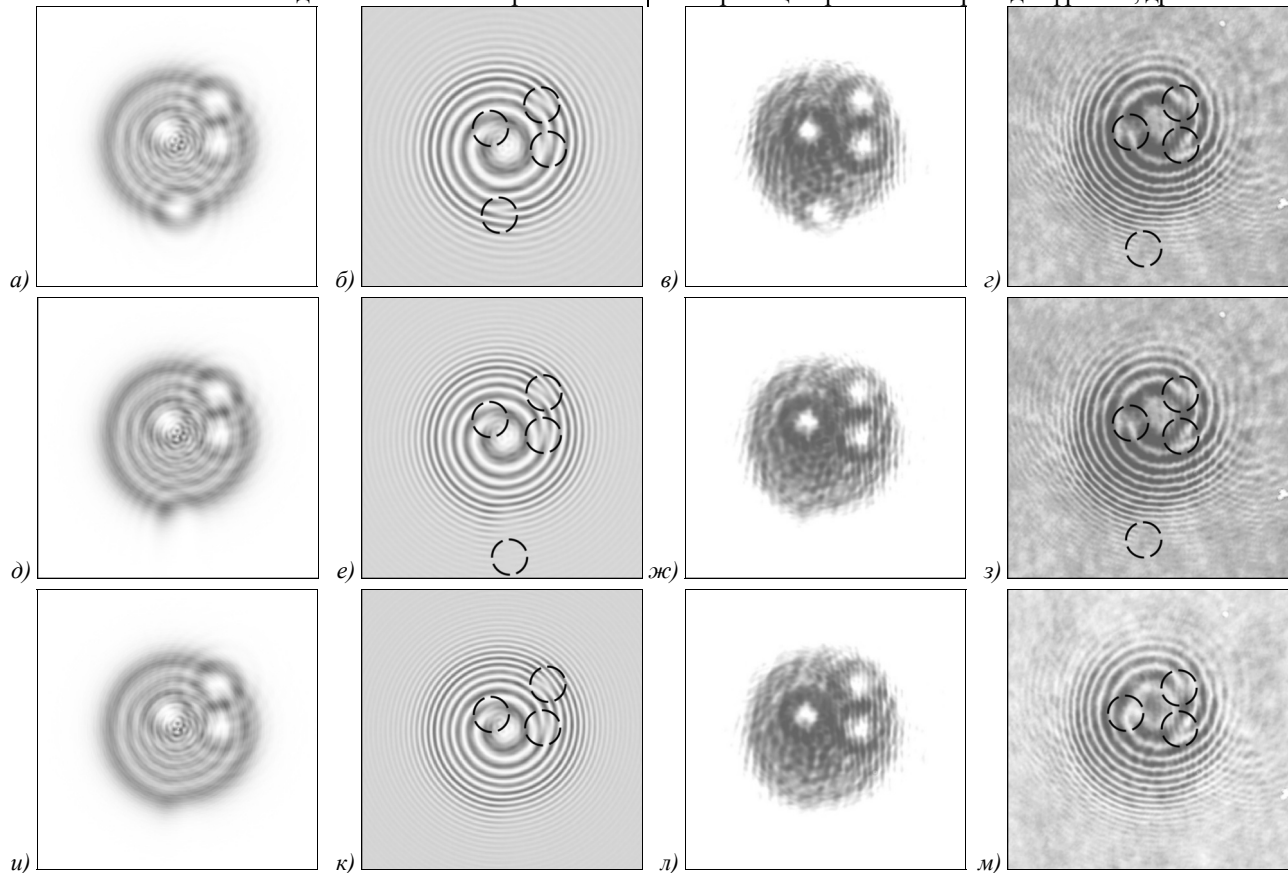


Рис. 3. Модельные (а, б, д, е, и, к) и экспериментальные (в, г, ж, з, л, м) распределения интенсивности без опорного пучка (а, в, д, ж, и, л) и с опорным пучком (б, г, е, з, к, м) на расстоянии 50 мм от фокус линзы L4, сформированные мультиспиральной фазовой пластинкой (SLM) с четырьмя центрами сингулярности, находящимися внутри круглой диафрагмы радиусом 4 мм (а, б, в, г), с четырьмя центрами сингулярности, но один из которых находился на краю диафрагмы радиусом 4 мм (д, е, ж, з), и с четырьмя центрами сингулярности, но один из которых находился за пределами диафрагмы радиусом 4 мм (и, к, л, м). Размер кадров – 10×10 мм

Заметим, что рассмотренная в этой работе ситуация, когда фазы оптических вихрей ограничены круглой диафрагмой, существенно отличается от ситуации, рассмотренной в [26], когда уже сформированный оптический вихрь (пучок Лагерра–Гаусса) проходит через круглое отверстие в непрозрачном экране. В [26] показано, что после диафрагмы в пучке формируются другие моды Лагерра–Гаусса с радиальными индексами как больше, так и меньше, чем у исходного пучка. В нашем случае тоже возникают дополнительные оптические вихри, но только если хотя бы один центр сингулярности лежит на краю диафрагмы. Если же центры всех сингулярностей (вихрей) лежат внутри диафрагмы, то ТЗ пучка не зависит от радиуса диафрагмы и равен числу вихрей с учетом их кратности.

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-

20003, расчет топологического заряда), Российского научного фонда (грант 18-19-00595, расчет орбитального углового момента), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (результаты моделирования).

#### Литература

1. **Kotlyar, V.V.** Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – Boca Raton: CRC Press, 2018. – 404 p. – ISBN: 978-1-138-54211-2.
2. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268.
3. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, J. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45. – 8185.
4. **Li, S.** Deterministic generation of orbital-angular-momentum multiplexed tripartite entanglement / S. Li, X. Pan, Y. Ren, H. Liu, S. Yu, J. Jing // Physical Review Letters. – 2020. – Vol. 124. – 083605.

5. **Willner, A.E.** Optical communications using orbital angular momentum beams / A.E. Willner, H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, Z. Zhao, J. Wang, M.P.J. Lavery, M. Tur, S. Ramachandran, A.F. Molisch, N. Ashrafi, S. Ashrafi // *Advances in Optics and Photonics*. – 2015. – Vol. 7. – P. 66-106.
6. **Rodriguez-Herrera, O.G.** Optical nanoprobng via spin-orbit interaction of light / O.G. Rodriguez-Herrera, D. Lara, K.Y. Bliokh, E.A. Ostrovskaya, C. Dainty // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 104. – 253601.
7. **Aksenov, V.P.** The influence of the vortex phase on the random wandering of a Laguerre–Gaussian beam propagating in a turbulent atmosphere: a numerical experiment / V.P. Aksenov, V.V. Kolosov, C.E. Pogutsa // *Journal of Optics*. – 2013. – Vol. 15. – 044007.
8. **Bazhenov, V.** Laser-beam with screw dislocations in the wavefront / V. Bazhenov, M.V. Vassetsov, M.S. Soskin // *JETP Letters*. – 1990. – Vol. 53. – P. 429-431.
9. **Khonina, S.N.** The rotor phase filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, M.V. Shinkarev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev // *Journal of Modern Optics*. – 1992. – Vol. 39, Issue 5. – P. 1147-1154. – DOI: 10.1080/09500349214551151.
10. **Котляр, В.В.** Топологическая стабильность оптических вихрей при дифракции на случайном фазовом экране / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 6. – С. 917-925. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-917-925.
11. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vassetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Physical Review A*. – 1997. – Vol. 56, Issue 5. – P. 4064-4075.
12. **Воляр, А.В.** По ту сторону интенсивности или моменты интенсивности и измерение спектра оптических вихрей сложных пучков / А.В. Воляр, М.В. Брецко, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 5. – С. 736-743. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
13. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28, Issue 6. – P. 8266-8281. – DOI: 10.1364/OE.386401.
14. **Wen, J.** Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams / J. Wen, L. Wang, X. Yang, J. Zhang, S. Zhu // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 4. – P. 5893-5904.
15. **Hickmann, J.M.** Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using lights orbital angular momentum / J.M. Hickmann, E.J.S. Fonseca, W.C. Soares, S. Chavez-Cerda // *Physical Review Letters*. – 2010. – Vol. 105. – 053904.
16. **Indebetouw, G.** Optical vortices and their propagation / G. Indebetouw // *Journal of Modern Optics*. – 1993. – Vol. 40, Issue 1. – P. 73-87.
17. **Abramochkin, E.** Spiral-type beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Optics Communications*. – 1993. – Vol. 102, Issues 3-4. – P. 336-350. – DOI: 10.1016/0030-4018(93)90406-U.
18. **Ковалёв, А.А.** Орбитальный угловой момент и топологический заряд Гауссова пучка с несколькими оптическими вихрями / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, Д.С. Калинкина // *Компьютерная оптика*. – 2020. – Т. 44, № 1. – С. 34-39. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-632.
19. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Pofirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
20. **Leach, J.** Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam / J. Leach, E. Yao, M.J. Padgett // *New Journal of Physics*. – 2004. – Vol. 6. – 71.
21. **Kotlyar, V.V.** Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 8. – P. 11236-11251. – DOI: 10.1364/OE.27.011236.
22. **Ковалёв, А.А.** Дифракция Френеля и Фраунгофера гауссова пучка с несколькими поляризационными сингулярностями / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 2. – С. 179-189. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-179-189.
23. **Gradshteyn, I.S.** Table of integrals, series, and products / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. – 7<sup>th</sup> ed. – New York: Academic Press, 2007. – ISBN: 978-0-12-373637-6.
24. **Kotlyar, V.** Orbital angular momentum of a laser beam behind an off-axis spiral phase plate / V. Kotlyar, A. Kovalev, A. Porfirev, E. Kozlova // *Optics Letters*. – 2019. – Vol. 44, Issue 15. – P. 3673-3676. – DOI: 10.1364/OL.44.003673.
25. **Kotlyar, V.V.** Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.A. Soifer, H. Elfstrom, J. Turunen // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2005. – Vol. 22, Issue 5. – P. 849-861. – DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
26. **Volyar, A.** Digital sorting perturbed Laguerre-Gaussian beams by radial number / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2020. – Vol. 37, Issue 6. – P. 959-968.

### Приложение

Рассмотрим суперпозицию двух соосных Гауссовых оптических вихрей с разными топологическими зарядами и разными весовыми коэффициентами, амплитуда которых имеет вид:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \times (a \exp(im\varphi) + b \exp(in\varphi)). \quad (\text{П1})$$

ТЗ такой суперпозиции найден в [13] и находится из выражения:

$$TC = \left(\frac{n+m}{2}\right) + \left(\frac{n-m}{2}\right) \left(\frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2 + |b|^2}\right). \quad (\text{П2})$$

А ОУМ пучка (П1) также получен в [13] и равен:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{na^2 + mb^2}{a^2 + b^2}. \quad (\text{П3})$$

Из выражений (П2) и (П3) следует, что ОУМ равен нулю при условии  $n = -m(b/a)^2$ .

А ТЗ суперпозиции (П1) отличен от нуля и равен  $ТС = m$ , если  $b > a$ , и равен  $ТС = n$ , если  $b < a$ . И только при  $b = a$  ТЗ суперпозиции будет равен нулю.

Из этого простого примера следует, что у оптического вихря может быть ТЗ равен нулю, а ОУМ отличен от нуля. И наоборот, ТЗ отличен от нуля, а ОУМ равен нулю.

---

#### *Сведения об авторах*

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович, Ковалёв Алексей Андреевич, Порфирьев Алексей Петрович** – см. стр. 870 этого номера.

**Козлова Елена Сергеевна**, 1989 года рождения. В 2011 году окончила Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и информатика». Кандидат физико-математических наук с 2014 года. Научный сотрудник лаборатории лазерных измерений ИСОИРАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству ассистент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Область научных интересов: дифракционная оптика, численные методы. E-mail: [kozlova.elena.s@gmail.com](mailto:kozlova.elena.s@gmail.com).

---

ГРНТИ: 29.31.01

Поступила в редакцию 27 июня 2020 г. Окончательный вариант – 22 июля 2020 г.

---



---

# Spiral phase plate with multiple singularity centers

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, E.S. Kozlova<sup>1,2</sup>, A.P. Porfirev<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

We investigate a multispiral phase plate (MSPP) with multiple centers of phase singularity arbitrarily located in the MSPP plane. Equations to describe the topological charge of an optical vortex in the initial plane immediately behind the MSPP and orbital angular momentum (OAM) normalized relative to the beam power are derived. The topological charge in the initial plane is found as a sum of the topological charges of all singularities if their centers are located inside a finite-radius circular aperture. If the phase singularity centers are partially located on the boundary of a circular diaphragm limiting the MSPP, the total topological charge is found as the sum of all singularities divided by 2. Total OAM that the vortex carries depends on the location of the singularity centers: the farther from the center of the plate the singularity center is located, the smaller is its contribution to the OAM. If all singularity centers are located on the boundary of the diaphragm limiting MSPP, then the OAM of the vortex beam equals zero, although in this case the topological charge of the beam is nonzero.

**Keywords:** spiral phase plate, optical vortex, orbital angular momentum.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Kozlova ES, Porfirev AP. Spiral phase plate with multiple singularity centers. *Computer Optics* 2020; 44(6): 901-908. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-774.

**Acknowledgements:** The work was partly funded by the Russian Foundation for Basic Research under project # 18-29-20003 (section "Topological charge calculation"), the Russian Science Foundation under project # 18-19-00595 (section "Orbital angular momentum calculation"), and the Russian Federation Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the "Crystallography and Photonics" Research Center of the RAS (section "Simulation results").

## References

- [1] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex laser beams. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-138-54211-2.
  - [2] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A-Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268.
  - [3] Allen L, Beijersbergen M, Spreeuw R, Woerdman J. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45: 8185.
  - [4] Li S, Pan X, Ren Y, Liu H, Yu S, Jing J. Deterministic generation of orbital-angular-momentum multiplexed tripartite entanglement. *Phys Rev Lett* 2020; 124: 083605.
  - [5] Willner AE, Huang H, Yan Y, Ren Y, Ahmed N, Xie G, Bao C, Li L, Cao Y, Zhao Z, Wang J, Lavery MPJ, Tur M, Ramachandran S, Molisch AF, Ashrafi N, Ashrafi S. Optical communications using orbital angular momentum beams. *Adv Opt Photonics* 2015; 7: 66-106.
  - [6] Rodriguez-Herrera OG, Lara D, Bliokh KY, Ostrovskaya EA, Dainty C. Optical nanoprobeing via spin-orbit interaction of light. *Phys Rev Lett* 2010; 104: 253601.
  - [7] Aksenov VP, Kolosov VV, Pogutsa CE. The influence of the vortex phase on the random wandering of a Laguerre-Gaussian beam propagating in a turbulent atmosphere: a numerical experiment. *J Opt* 2013; 15: 044007.
  - [8] Bazhenov V, Vasnetsov MV, Soskin MS. Laser-beam with screw dislocations in the wavefront. *JETP Lett* 1990; 53: 429-431.
  - [9] Khonina SN, Kotlyar VV, Shinkarev MV, Soifer VA, Uspleniev GV. The rotor phase filter. *J Mod Opt* 1992; 39(5): 1147-1154. DOI: 10.1080/09500349214551151.
  - [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Topological stability of optical vortices diffracted by a random phase screen. *Computer Optics* 2019; 43(6): 917-925. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-917-925.
  - [11] Soskin MS, Gorshkov VN, Vastnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex. *Phys Rev A* 1997; 56(5): 4064-4075.
  - [12] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams. *Computer Optics* 2018; 42(5): 736-743. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
  - [13] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt Express* 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.
  - [14] Wen J, Wang L, Yang X, Zhang J, Zhu S. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams. *Opt Express* 2019; 27(4): 5893-5904.
  - [15] Hickmann JM, Fonseca EJS, Soares WC, Chavez-Cerda S. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using lights orbital angular momentum. *Phys Rev Lett* 2010; 105: 053904.
  - [16] Indebetouw G. Optical vortices and their propagation. *J Mod Opt* 1993; 40(1): 73-87.
  - [17] Abramochkin E, Volostnikov V. Spiral-type beams. *Opt Commun* 1993; 102(3-4): 336-350. DOI: 10.1016/0030-4018(93)90406-U.
  - [18] Kovalev AA, Kotlyar VV, Kalinkina DS. Orbital angular momentum and topological charge of a Gaussian beam with multiple optical vortices. *Computer Optics* 2020; 44(1): 34-39. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-632.
-

- 
- [19] Kotlyar VV, Kovalev AA, Pofirev AP. Astigmatic trans- forms of an optical vortex for measurement of its topologi- cal charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [20] Leach J, Yao E, Padgett MJ. Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam. *New J Phys* 2004; 6: 71.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Calculation of fractional orbital angular momentum of superpositions of optical vortices by intensity moments. *Opt Express* 2019; 27(8): 11236-11251. DOI: 10.1364/OE.27.011236.
- [22] Kovalev AA, Kotlyar VV. Fresnel and Fraunhofer diffrac- tion of a Gaussian beam with several polarization singular- ities. *Computer Optics* 2018; 42(2): 179-189. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-2-179-189.
- [23] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. Table of integrals, series, and products. 7<sup>th</sup> ed. New York: Academic Press; 2007. ISBN: 978-0-12-373637-6.
- [24] Kotlyar V, Kovalev A, Porfirev A, Kozlova E. Orbital an- gular momentum of a laser beam behind an off-axis spiral phase plate. *Opt Lett* 2019; 44(15): 3673-3676. DOI: 10.1364/OL.44.003673.
- [25] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elf- strom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *J Opt Soc Am A* 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
- [26] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Digital sorting perturbed Laguerre-Gaussian beams by radial num- ber. *J Opt Soc Am A* 2020; 37(6): 959-968.
- 

### *Authors' information*

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute (Samara) of the Rus- sian Academy of Sciences – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Insti- tute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is coau- thor of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nano- photonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@smr.ru](mailto:kotlyar@smr.ru).

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crys- tal devices. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Elena Sergeevna Kozlova**, (b. 1989) received Master’s degree in Applied Mathematics and Informatics in Samara State Aerospace University (2011). She received her PhD in 2014. She is researcher of Laser Measurements laboratory at the Image Processing Systems Institute – Branch of the Federal Scientific Research Centre “Crystallography and Photonics” of Russian Academy of Sciences and assistant of Computer Science department at Samara National Re- search University. Scientific interests: diffractive optics, FDTD method, near-field optics.

E-mail: [kozlova.elena.s@gmail.com](mailto:kozlova.elena.s@gmail.com).

**Alexey Petrovich Porfirev** (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Ap- plied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a senior research- er at Intelligent Video Data Analysis Laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photon- ics” RAS. His current research interests include diffractive optics, optical manipulation and structured laser beams. E- mail: [porfirev.alexey@smr.ru](mailto:porfirev.alexey@smr.ru).

---

*Received June 27, 2020. The final version – July 22, 2020.*

---