

## Структура нормальных мод в параллельных идеальных оптических волокнах с сильной связью

К.Н. Алексеев<sup>1</sup>, Е.В. Баршак<sup>1</sup>, Б.П. Лапин<sup>1</sup>, М.А. Яворский<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,  
295007, Россия, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, д. 4

### Аннотация

В данной работе исследовано влияние сильной эванесцентной связи на структуру нормальных мод системы параллельных идеальных многомодовых оптических волокон. С использованием формализма теории возмущений с вырождением на основе скалярного волноводного уравнения для этой системы получены аналитические выражения супермод высших порядков и определены их постоянные распространения. Показано, что структура мод в случае сильной эванесцентной связи совпадает с аналогичной структурой нормальных мод для слабо связанных параллельных волокон. Продемонстрировано, что наличие сильной связи приводит к модификации выражений для поляризационных поправок к скалярной постоянной распространения, для которых получены соответствующие аналитические выражения.

**Ключевые слова:** связанные волокна, моды связанных волокон, оптический вихрь.

**Цитирование:** Алексеев, К.Н. Структура нормальных мод в параллельных идеальных оптических волокнах с сильной связью / К.Н. Алексеев, Е.В. Баршак, Б.П. Лапин, М.А. Яворский // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 6. – С. 876-882. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-777.

**Citation:** Alexeyev CN, Barshak EV, Lapin BP, Yavorsky MA. The structure of normal modes of parallel ideal optical fibers with an intensive coupling. Computer Optics 2020; 44(6): 876-882. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-777.

### Введение

Интерес к задаче о распространении света в связанных оптических волноводах появился после того, как Джонс исследовал процессы туннелирования фундаментальной моды между двумя близко расположенными параллельными идеальными волокнами [1]. В процессе дальнейшего исследования подобных систем эта задача приобрела в электродинамике статус классической [2–4]. Несмотря на достаточно интенсивные исследования в этой области, к настоящему времени задачи о связанных оптических волноводах не утрачивают своей актуальности и привлекают внимание исследователей благодаря их большому прикладному значению [5–7]. Действительно, такие волокна являются ключевыми элементами многих оптических систем: волоконных массивов [8] и оптических змей [9], в которых отдельные волокна связаны друг с другом по всей длине, или петлевых и узловых резонаторов [10, 11], в которых эванесцентная связь осуществляется на коротких участках волокна.

До недавних пор исследователи занимались изучением эволюции света только в связанных одномодовых волноводах. Однако с тех пор, как были открыты оптические вихри (ОВ) [12], которые могут быть использованы во многих областях [13–15], особенно в области оптических коммуникаций [16, 17], усилился интерес к изучению распространения ОВ в связанных многомодовых волокнах [18–20]. В частности, исследовались вопросы о клонировании вих-

ревых состояний, туннелирования ОВ и орбитального углового момента (ОУМ) в связанных волокнах. В недавних работах был рассмотрен вопрос об использовании оптических резонаторов на базе многомодовых волокон для управления характеристиками ОВ [21–25].

Наиболее близкую к реальности картину эволюции ОВ в связанных волокнах можно получить с помощью численного моделирования. Многие исследователи, однако, при расчёте параметров оптических устройств, в конструкцию которых входят разветвители для ОВ, предпочитают опираться вместо него на упрощённые аналитические модели. В таких моделях используется так называемое приближение слабой ортогональности, постулирующее ортогональность мод, локализованных на разных волокнах разветвителя. Данное приближение, безусловно, оправданно при значительном разнесении волокон. Однако в противоположном случае, который реализуется в большинстве экспериментальных ситуаций, когда соответствующими интегралами перекрытия уже нельзя пренебречь, применимость приближения слабой ортогональности совсем не очевидна.

В этой связи возникает вопрос о пределах применимости приближения слабой ортогональности в задачах о связанных волноводах, а также о том, погрешность какого рода возникает при использовании этого приближения при расчёте оптических систем с сильной эванесцентной связью, включающих в себя как компонент волоконный разветвитель на многомо-

довых волокнах. В настоящем исследовании предлагается модификация теории возмущений с вырождением для описания структуры нормальных мод в сильно связанных оптических волокнах. Нашей целью является установление структуры мод высшего порядка и их постоянных распространения в системе параллельных идеальных оптических волокон при наличии сильной связи.

**1. Теория возмущений для связанных волокон**

Систему двух параллельных связанных идеальных волокон обычно описывают в виде двух волокон с показателем преломления  $n_{co}$ , погруженных в однородную среду с показателем  $n_{cl}$  (рис. 1а).

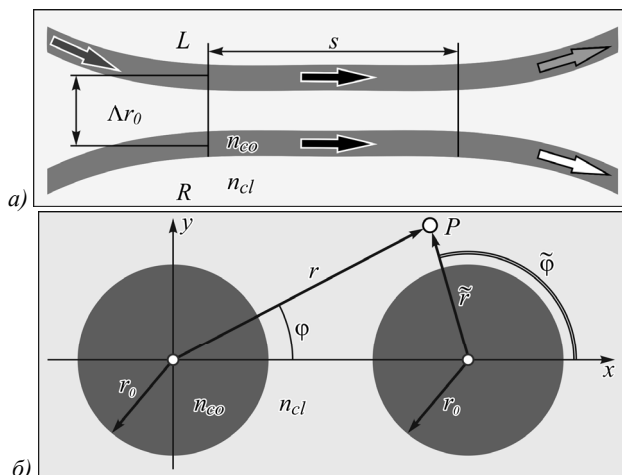


Рис. 1. Модель связанных волокон: сердцевинки волокон ( $L$  и  $R$ ) имеют показатель преломления  $n_{co}$  и погружены в однородную среду с показателем преломления  $n_{cl}$ ; расстояние между центрами сердцевин равно  $\Lambda r_0$ , где  $r_0$  – радиус сердцевинки волокна. Входящее в одно из волокон поле (чёрная стрелка слева) возбуждает на связанном участке с длиной  $s$  комбинацию супермод (чёрные параллельные стрелки), и в результате на выходах из верхнего и нижнего волокон появляются поля (светло-серая и белая стрелки) (а); с каждым из волокон связаны полярные системы координат  $(r, \varphi)$  и  $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ , в которых можно задать координаты произвольной точки  $P$ . Продольная координата  $z$  поперечного сечения волокон одинакова (б)

Расстояние между центрами цилиндров равно  $\Lambda r_0$ , где  $r_0$  – радиус сердцевинки волокна, а  $\Lambda > 2$  – безразмерный множитель. Координаты точки  $P$  в поперечном сечении могут быть заданы с помощью полярных координат  $(r, \varphi)$ , связанных с левым волокном, или  $(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ , которые относятся к правому волокну (рис. 1б). Отметим, что продольная координата  $z$  одинакова для обоих волокон. Распространение света в такой трансляционно-инвариантной по  $z$  системе может быть описано в скалярном приближении волновым уравнением [26]:

$$[\nabla_t^2 + k^2 n^2(x, y)] \vec{e}_i(x, y) = \beta^2 \vec{e}_i(x, y), \tag{1}$$

где  $\vec{e}_i$  – вектор, вводимый как

$$\vec{E}_i(x, y, z) = \vec{e}_i(x, y) \exp(i\beta z),$$

где  $\vec{E}_i$  – поперечная компонента напряжённости электрического поля,  $n$  – показатель преломления системы,  $k$  – волновое число в вакууме,  $\nabla_t = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ ,  $\beta$  – постоянная распространения. Нужно отметить, что уравнение (1) получено в преенебрежении «градиентным» слагаемым векторного волнового уравнения и тем самым эффектами спин-орбитального взаимодействия (СОВ).

Уравнение (1) можно переписать в виде уравнения на собственные значения [18]:

$$(\hat{T} + k^2 n_{cl}^2 + V_L + V_R - \beta^2) \vec{e}_i = 0, \tag{2}$$

где  $\hat{T} = \nabla_t^2$ ,  $V_{L(R)} = 2k^2 n_{co}^2 \Delta \tilde{f}_{L(R)}$ ,  $\Delta = \frac{n_{co}^2 - n_{cl}^2}{2n_{co}^2}$ .

В случае волокон со ступенчатым профилем показателя преломления, рассмотрением которого мы ограничимся в данной работе,  $\tilde{f}_L = \theta(1 - r/r_0)$ ,  $\tilde{f}_R = \theta(1 - \tilde{r}/r_0)$ ,  $\theta$  – функция Хэвисайда.

Структуру супермод исследуемой системы можно получить следующим образом. Сначала нужно построить матрицу оператора в уравнении (2) в базисе скалярных мод левого и правого волокон, взятых по отдельности. Данные скалярные моды удобно выбрать в виде циркулярно поляризованных ОВ, локализованных на левом или правом волокнах:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |1, l, L\rangle, & |2\rangle &= |1, -l, L\rangle, \\ |3\rangle &= |1, l, R\rangle, & |4\rangle &= |1, -l, R\rangle, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $|1, \pm l, L\rangle = F_l(r) e^{\pm i l \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ,

$l = 1, 2, \dots$  – орбитальное число. Выражения (3) записаны в базисе линейных поляризаций:

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}.$$

Выражения для мод правого волокна легко получить из (3) заменой  $L \rightarrow R$ ,  $r \rightarrow \tilde{r}$  и  $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ . Радиальная функция  $F_l(r)$  в выражениях для моды является решением стандартного уравнения [26] и представляет собой функцию Бесселя  $J_l(r)$  первого рода, когда поле моды рассматривается в сердцевине волокна, и модифицированную функцию Бесселя  $K_l(r)$  второго рода – когда в оболочке. Отметим, что «появление» функций  $J_l(r)$ ,  $K_l(r)$  диктуется симметрией системы. Вектора (3) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (\hat{T} + k^2 n_{cl}^2 + V_L) \begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \end{pmatrix} &= \tilde{\beta}_l^2 \begin{pmatrix} |1\rangle \\ |2\rangle \end{pmatrix}, \\ (\hat{T} + k^2 n_{cl}^2 + V_R) \begin{pmatrix} |3\rangle \\ |4\rangle \end{pmatrix} &= \tilde{\beta}_l^2 \begin{pmatrix} |3\rangle \\ |4\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $\tilde{\beta}_l$  – скалярная постоянная распространения. Отметим, что поля (3) представляют собой ОВ с тополо-

гическими зарядами  $\pm l$ , локализованные на левом или правом волокнах. Следует подчеркнуть, что выбор базиса (3) позволяет исследовать случай связи мод только с одинаковым по модулю топологическим зарядом (ТЗ). Состояние поляризации при этом может быть произвольным, но одинаковым у всех базисных функций. Предлагаемый подход можно легко адаптировать и для более сложных случаев, включив в базис (3) дополнительные моды нулевого приближения и по необходимости добавив градиентное слагаемое в (1).

После выбора базиса нужно получить матричное представление оператора

$$H = \hat{T} + k^2 n_{cl}^2 + V_L + V_R - \beta^2$$

в базисе (3), вычислив элементы матрицы  $H$  с использованием стандартного правила нахождения таких элементов:  $H_{ij} = \langle i | H | j \rangle$ . Скалярное произведение определяется здесь как

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \iint_S (\Phi_x^* \Phi_y^*) \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix} dS, \quad (5)$$

где  $S$  – область всего поперечного сечения.

Выражения для супермод  $|\Psi_a\rangle$  могут быть представлены в виде суммы базисных векторов (3):

$$|\Psi_a\rangle = \sum_k x_{ak} |k\rangle \equiv \vec{x}_a^T \vec{\Psi},$$

где  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ,  $\vec{x}_\alpha = \text{col}(x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, x_{\alpha 3}, x_{\alpha 4})$  – собственный вектор матрицы  $H$ :

$$H \vec{x}_\alpha = 0, \quad \vec{\Psi} = \text{col}(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle),$$

и «Т» означает «транспонирование». Спектр постоянных распространения можно найти из уравнения  $\det H = 0$ . Данное уравнение с учётом отсутствия ортогональности базисных векторов в приближении сильной связи  $\langle i | j \rangle \neq 0$  в явном виде записывается как:

$$\left[ V + (\tilde{\beta}_l^2 - \beta^2) E \right] \vec{x} = 0, \quad (6)$$

где  $E_{ij} = \langle i | j \rangle$ , и матрица  $V$  получена при усреднении  $V_{L,R}$  по базису (3). В развёрнутой форме для матриц  $V$ ,  $E$  при учёте нормировки  $\langle k | k \rangle = 1$  имеем:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e_{13} & e_{14} \\ 0 & 1 & e_{14} & e_{13} \\ e_{13} & e_{14} & 1 & 0 \\ e_{14} & e_{13} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$V = 2k^2 n_{co}^2 \Delta \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} \\ V_{12} & V_{11} & V_{14} & V_{13} \\ V_{13} & V_{14} & V_{11} & V_{12} \\ V_{14} & V_{13} & V_{12} & V_{11} \end{pmatrix}.$$

Элементы  $V_{13}$  и  $V_{14}$  характеризуют туннелирование ОВ в смежное волокно без инверсии или с инвер-

сией их ТЗ. Явные выражения для матричных элементов в (7) имеют вид:

$$\begin{aligned} e_{13} &= \iint_S e^{i l (\tilde{\phi} - \phi)} F_l(r) F_l(\tilde{r}) dS, \\ e_{14} &= \iint_S e^{-i l (\tilde{\phi} + \phi)} F_l(r) F_l(\tilde{r}) dS, \\ V_{11} &= \iint_{SR} F_l^2(r) dS, \\ V_{12} &= \iint_{SR} e^{-2i l \phi} F_l^2(r) dS, \\ V_{13} &= \iint_{SR} e^{i l (\tilde{\phi} - \phi)} F_l(r) F_l(\tilde{r}) dS, \\ V_{14} &= \iint_{SR} e^{-i l (\tilde{\phi} + \phi)} F_l(r) F_l(\tilde{r}) dS, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $SR$  – область сердцевин правого волокна в поперечном сечении. Полезно отметить, что матрицы  $V$ ,  $E$  содержат только действительные элементы.

### 2. Супермоды и их постоянные распространения

Из вида матрицы  $H$  можно понять, что она может быть приведена к диагональному виду следующим преобразованием:  $H \rightarrow M H M$ , где

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

и  $M^2 = 1$ . В результате такого преобразования вектор  $\vec{\Psi}$  переходит в вектор  $\vec{X}$ :

$$\vec{X} \equiv M \vec{\Psi} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle \\ |1\rangle - |2\rangle + |3\rangle - |4\rangle \\ |1\rangle + |2\rangle - |3\rangle - |4\rangle \\ |1\rangle - |2\rangle - |3\rangle + |4\rangle \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Очевидно, что компоненты вектора  $\vec{X}$  представлены супермодами  $|\Psi_a\rangle$  сильно связанных волокон. Примечательно, что их структура в точности совпадает со структурой мод слабо связанных волокон [22] (вид мод, представленный в [18], не столь удобен для сравнения). Заметим, что все супермоды относятся сразу к двум волокнам и являются суммой одновременно существующих в волокнах  $L$  и  $R$  скалярных полей (3) с одинаковыми амплитудами.

Спектр постоянных распространения супермод  $|\Psi_a\rangle$  устанавливается следующим образом. Рассмотрим, например, первое уравнение системы  $M H M (M \vec{x}) = 0$ , которое выглядит как

$$\begin{aligned} & \left[ \tilde{\beta}_l^2 - \beta^2 \right] (1 + e_{13} + e_{14}) x'_1 + \\ & + 2k^2 n_{co}^2 \Delta [V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14}] x'_1 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из него можно установить выражение  $\beta_l^2$  для спектральной ветви, отвечающей нормальной моде  $|\Psi_1\rangle$ . Аналогично можно получить выражения и для остальных спектральных ветвей  $\beta_l^2$ . Полученный та-

ким образом спектр постоянных распространения имеет вид:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \tilde{\beta}_l + kn_{co}\Delta \frac{V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14}}{1 + e_{13} + e_{14}}, \\ \beta_2 &= \tilde{\beta}_l + kn_{co}\Delta \frac{V_{11} - V_{12} + V_{13} - V_{14}}{1 + e_{13} - e_{14}}, \\ \beta_3 &= \tilde{\beta}_l + kn_{co}\Delta \frac{V_{11} + V_{12} - V_{13} - V_{14}}{1 - e_{13} - e_{14}}, \\ \beta_4 &= \tilde{\beta}_l + kn_{co}\Delta \frac{V_{11} - V_{12} - V_{13} + V_{14}}{1 - e_{13} + e_{14}}.\end{aligned}\quad (12)$$

В дальнейшем будем полагать, что  $n_{co}=1,5$ ,  $n_{cl}=1,496$ , оптический контраст  $\Delta=2,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $l=1$ , длина волны входящего поля  $\lambda=632,8$  нм, радиус  $r_0=8\lambda$ . Значения  $n_{co}$ ,  $n_{cl}$  подобраны так, чтобы они соответствовали реальным значениям для германий-силиконовых стёкол [27]. При выводе (12) мы учли, что для слабонаправляющих ( $\Delta \ll 1$ ) оптических волокон  $\tilde{\beta} \approx kn_{co}$  и поправка к постоянным распространения выражается через собственное значение матрицы  $H$  как  $\delta\beta \approx \Delta\beta^2 / 2\tilde{\beta}$  [26]. Стоит отметить, что выбор длины волны и радиуса сердцевины волокон не является критичным в силу возможности масштабирования подобных систем [28], главное, чтобы сохранялись соотношения между геометрическими и материальными параметрами системы. Данный факт может быть принят во внимание при экспериментальных исследованиях, например, в терагерцевом диапазоне.

Одним из ключевых параметров, которые определяют величину поправок  $\delta\beta = \beta - \tilde{\beta}$  к скалярной постоянной распространения, является расстояние между центрами связанных волокон. Зависимость  $\delta\beta(\Lambda)$  показана на рис. 2а. Дополнительную информацию позволяет получить график относительного изменения поправки  $\delta\beta$  для случая сильной связи по сравнению с соответствующей поправкой  $\tilde{\delta\beta}$ , вычисленной в приближении слабой связи [18]  $(\delta\beta(\Lambda) - \tilde{\delta\beta}(\Lambda)) / \tilde{\delta\beta}(\Lambda)$  (рис. 2б). Из данного рисунка видно, что значительное отличие между  $\delta\beta$  и  $\tilde{\delta\beta}$  возникает при  $\Lambda < 2,25$ . Отметим также, что на рис. 2в отдельно построены поправки  $\delta\beta_2$  и  $\delta\beta_{SOI}$ . Последняя поправка обусловлена СОВ, выражение для неё имеет вид [18]:

$$\delta\beta_{SOI} = \frac{\Delta}{\int_0^\infty r F_l^2(r) dr}.\quad (13)$$

Видно, что вклад СОВ в случае близко расположенных волокон ( $\Lambda \leq 2,05$ ) крайне мал и им можно пренебречь.

Полученные значения поправок  $\delta\beta$  позволяют оценить длину  $s$  связанной области вихревого волоконного разветвителя-инвертора, созданного на базе близко расположенных маломодовых волокон. Например, при длине связанной области  $s \approx 1$  мм входящий ОВ туннелирует в соседнее волокно со сменой знака ТЗ (переход  $|1\rangle \rightarrow |4\rangle$ ). Туннелирование без смены знака заряда будет наблюдаться при длине  $s \approx 80$  мм (переход  $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ ).

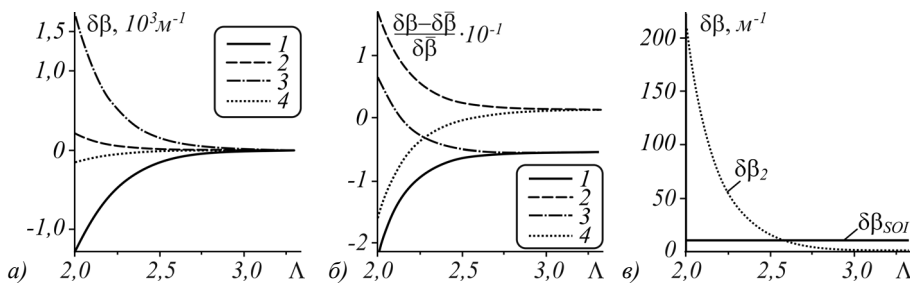


Рис. 2. Поправки  $\delta\beta$  к скалярной постоянной распространения в случае сильной связи в зависимости от приведённого расстояния  $\Lambda$  между центрами волокон (а); приведённая разница  $(\delta\beta - \tilde{\delta\beta}) / \tilde{\delta\beta}$ , где поправка  $\tilde{\delta\beta}$  рассчитана для случая слабой связи, в зависимости от приведённого расстояния  $\Lambda$  между центрами волокон (б); поправка  $\delta\beta_2$  и поправка  $\delta\beta_{SOI}$ , обусловленная СОВ, в зависимости от расстояния между центрами волокон – номера типов кривых соответствуют номеру поправки  $\delta\beta$ , параметры волокна:  $r_0=8\lambda$ ,  $\lambda=632,8$  нм, волноводный параметр 5,33 (в)

Ещё одним важным параметром, от которого зависят  $\delta\beta$ , является радиус сердцевины волокна  $r_0$ . Графики зависимости  $\delta\beta$  от  $r_0$  при сохранении приведённого расстояния между центрами волокон ( $\Lambda = \text{const}$ ) показаны на рис. 3. Из этих графиков видно, что при малых радиусах сердцевины поправки  $\delta\beta$  значительно больше, чем при больших значениях  $r_0$ . Это легко объяснить качественно: чем меньше радиус сердцевины волокна, тем меньше степень концентрации поля вблизи центра волокна. Это приводит к усилению эванесцентной связи между волокнами и

увеличению поправок к скалярной постоянной распространения. С математической точки зрения такая ситуация отвечает росту значений матричных элементов  $e_{13}$ ,  $e_{14}$  и  $V_{13}$ ,  $V_{14}$ . Стоит отметить, что матричные элементы  $V_{13}$ ,  $V_{14}$  соответствуют константам  $C$ ,  $D$ , введённым в [18], поэтому отличие поправок  $\delta\beta$  от скалярной постоянной распространения определяется в основном интегралами перекрытия радиальных функций  $e_{13}$ ,  $e_{14}$ . Графики их зависимости от приведённого расстояния  $\Lambda$  и радиуса сердцевины волокна  $r_0$  (при постоянном  $\Lambda$ ) даны на рис. 4.

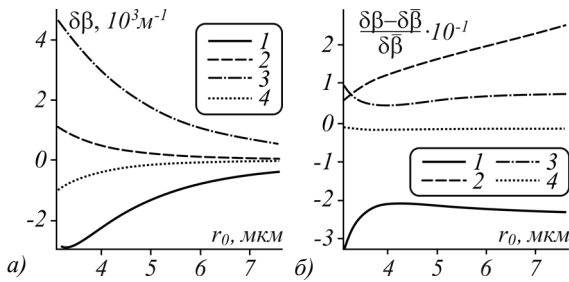


Рис. 3. Поправки  $\delta\beta$  к скалярной постоянной распространения в случае сильной связи в зависимости от радиуса сердцевины волокон  $r_0$  (а); зависимость приведённой разницы постоянных распространения  $(\delta\beta - \delta\bar{\beta}) / \delta\beta$  от радиуса сердцевины волокна (поправка  $\delta\bar{\beta}$  рассчитана для случая слабой связи); номера типов кривых соответствуют номеру поправки  $\delta\beta$ , волноводный параметр волокна 5,33, приведённое расстояние между центрами волокон  $\Lambda = 2,01$  и постоянно для всех значений  $r_0$  (б)

Из кривых на рис. 4б видно, что величина  $|e_{13} + e_{14}|$  при малых значениях радиуса  $r_0$  может достигать значения 0,2, так что пренебрежение этим следствием сильной связи может привести к существенной ошибке при расчёте оптических систем, включающих волоконные разветвители.

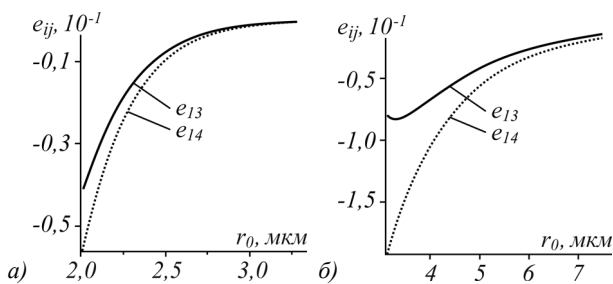


Рис. 4. Интегралы перекрытия  $e_{13}, e_{14}$  как функции приведённого расстояния между центрами волокон. Волноводный параметр волокна 5,33 (а); интегралы перекрытия  $e_{13}, e_{14}$  как функции радиуса сердцевины волокна. Приведённое расстояние между центрами волокон  $\Lambda = 2,01$  и постоянно для всех значений  $r_0$  (б)

### 3. Дискуссия

Использование базиса (3) позволяет в конечном итоге установить выражения для тех супермод, которые представлены суммой ОВ с одинаковыми по модулю ТЗ. Тем не менее, ОВ при туннелировании в соседнее волокно будет возбуждать в нём ОВ с иными по модулю ТЗ. Поэтому возникает естественный вопрос: «Как учесть тот факт, что туннелирование ОВ в соседнее волокно может сопровождаться не только сменой знака ТЗ, но и изменением его модуля?» Попробуем разобраться с этим вопросом, рассмотрев систему связанных волокон, в которых могут существовать только фундаментальная мода и ОВ с единичными по модулю зарядами. В этом случае базис (3) дополняется двумя векторами и принимает вид:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |1, 0, L\rangle, |2\rangle = |1, 1, L\rangle, |3\rangle = |1, -1, L\rangle, \\ |4\rangle &= |1, 0, R\rangle, |5\rangle = |1, 1, R\rangle, |6\rangle = |1, -1, R\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Для удобства мы перенумеровали «старые» базисные векторы. Далее нам нужно дополнительно рассчитать элементы вида

$$V_{0l} = \iint_{SR} F_0(\tilde{r}) F_l(r) e^{i\phi} dS. \quad (15)$$

Результаты этих расчётов приведены в табл. 1 (при  $\Lambda = 2,01$ ). На первый взгляд кажется, что значения элементов  $V_{0l}$ , характеризующих перекрёстную связь фундаментальной моды и ОВ, сравнимы с аналогичными значениями матричных элементов для ОВ с ТЗ  $l = 1$ . Тем не менее, имеется существенное различие между случаем связи полей с разными и одинаковыми по модулю ТЗ. Когда ТЗ базисных полей одинаковы по модулю, то их постоянные распространения нулевого приближения равны друг другу. Поэтому для описания результата их перекрёстной связи необходимо использовать теорию возмущений с вырождением, которая говорит нам о том, что при снятии вырождения моды системы становятся суперпозицией мод системы нулевого приближения. Когда мы начинаем учитывать перекрёстную связь мод с разными зарядами, то замечаем, что вырождение в системе пропадает и некоторая мода нулевого приближения  $|i\rangle^0$  получает добавку  $|i\rangle^1$ , величина которой определяется как:

$$\begin{aligned} |i\rangle^{(1)} &= \sum_{m \neq i} \frac{\langle m | V_R | i \rangle^0}{\tilde{\beta}_i^2 - \tilde{\beta}_m^2} |m\rangle^{(0)} \approx \\ &\approx \sum_m \frac{\langle m | V_R | i \rangle^0 / 2\tilde{\beta}}{\Delta\tilde{\beta}_{mi}} |m\rangle^{(0)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что здесь  $\tilde{\beta} \approx \tilde{\beta}_0$ . Из табл. 1 видно, что амплитуды отдельных слагаемых в сумме из выражения (16) не превышают 10% амплитуды исходного поля. Этот факт говорит о том, что конверсия между полями с разными по модулю ТЗ даже в случае сильной связи очень мала. Действительно, их вклад в общую интенсивность поля будет составлять около 1%. Данная ситуация имеет место и в том случае, когда базис (14) дополняется ОВ с большими зарядами. Таким образом, при рассмотрении оптически связанных волокон можно учитывать перекрёстную связь только между полями с одинаковыми по модулю ТЗ.

### Заключение

В данной работе мы исследовали влияние сильной эванесцентной связи на структуру супермод параллельных идеальных многомодовых оптических волокон. Используя метод теории возмущений при решении скалярного волнового уравнения, мы получили аналитические выражения для супермод высших порядков такой системы и нашли их постоянные распространения. Мы установили, что в скалярном приближении при наличии сильной связи структура супермод совпадает с аналогичной структурой нормальных мод для слабо связанных парал-

ельных волокон. Наличие сильной связи, однако, приводит к существенному изменению поправок к скалярной постоянной распространения, что должно учитываться при расчёте оптических устройств на базе рассмотренных в настоящей работе связанных волокон. Было также установлено, что инверсия знака топологического заряда входящего поля после его полного туннелирования в соседнее волокно может наблюдаться при длинах участка связи около 1 мм. Туннелирование без смены знака заряда имеет место при больших длинах участка связи  $s$  порядка 80 мм.

### Благодарности

Данная работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-12-00291).

### Литература

- Jones, A.L.** Coupling of optical fibers and scattering in fibers / A.L. Jones // *Journal of the Optical Society of America B*. – 1965. – Vol. 55, Issue 3. – P. 261-271. – DOI: 10.1364/JOSA.55.000261.
- Hall, D.G.** Selected papers on coupled-mode theory in guided-wave optics / D.G. Hall, B.J. Tompson. – Bellingham, Washington, USA: SPIE Optical Engineering Press, 1993. – 569 p.
- Barybin, A.A.** Modern electrodynamics and coupled-mode theory: Application to guided-wave optics / A.A. Barybin, V.A. Dmitriev. – Princeton: Rinton Press, 2002. – 700 p. – ISBN: 978-1-58949-007-9.
- Black, R.J.** Optical waveguide modes: polarization, coupling and symmetry / R.J. Black, L. Gagnon. – New York: McGraw-Hill Education, 2010. – 208 p. – ISBN: 978-0-07-162296-7.
- Joseph, T.** Two-core fiber-based mode converter and mode demultiplexer / T. Joseph, J. John // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2019. – Vol. 36, Issue 8. – P. 1987-1994. – DOI: 10.1364/JOSAB.36.001987.
- Wang, G.** High-sensitivity magnetic field sensor based on a dual-core photonic crystal fiber / G. Wang, Y. Lu, X. Yang, L. Duan, J. Yao // *Applied Optics*. – 2019. – Vol. 58, Issue 2. – P. 5800-5806. – DOI: 10.1364/AO.58.005800.
- Miri, M.-A.** Optical gradient forces between evanescently coupled waveguides / M.-A. Miri, M. Cotrufo, A. Alu // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 17. – P. 4104-4107. – DOI: 10.1364/OL.43.004104.
- Christodoulides, D.** Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices / D. Christodoulides, F. Lederer, Y. Silberberg // *Nature*. – 2003. – Vol. 424. – P. 817-823. – DOI: 10.1038/nature01936.
- Sumetsky, M.** Uniform coil optical resonator and waveguide: transmission spectrum, eigenmodes, and dispersion relation / M. Sumetsky // *Optics Express*. – 2005. – Vol. 13, Issue 11. – P. 4331-4340. – DOI: 10.1364/OPEX.13.004331.
- Ren, Y.** Tapered optical fiber loops and helices for integrated photonic device characterization and microfluidic roller coasters / Y. Ren, R. Zhang, C. Ti, Y. Liu // *Optica*. – 2016. – Vol. 3, Issue 11. – P. 1205-1208. – DOI: 10.1364/OPTICA.3.001205.
- Yuan, S.** Mode coupling in a terahertz multi-mode whispering-gallery-mode resonator / S. Yuan, L. Chen, Z. Wang, R. Wang, X. Wu, X. Zhang // *Optics Letters*. – 2019. – Vol. 44, Issue 8. – P. 2020-2023. – DOI: 10.1364/OL.44.002020.
- Nye, J.F.** Dislocations in wave trains / J.F. Nye, M.V. Berry // *Proceedings of the Royal Society A*. – 1974. – Vol. 336, Issue 1605. – P. 165-190. – DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
- Leake, K.D.** All-optical particle trap using orthogonally intersecting beams [Invited] / K.D. Leake, A.R. Hawkins, H. Schmidt // *Photonics Research*. – 2013. – Vol. 1, Issue 1. – P. 47-51. – DOI: 10.1364/PRJ.1.000047.
- Bernet, S.** Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy / S. Bernet, A. Jesacher, S. Fürhapter, C. Maurer, M. Ritsch-Marte // *Optics Express*. – 2006. – Vol. 14, Issue 9. – P. 3792-3805. – DOI: 10.1364/OE.14.003792.
- Mari, E.** Fabrication and testing of  $l=2$  optical vortex phase masks for coronagraphy / E. Mari, G. Anzolin, F. Tamburini, M. Prasciolu, G. Umbrico, A. Bianchini, C. Barbieri, F. Romanato // *Optics Express*. – 2010. – Vol. 18, Issue 3. – P. 2339-2344. – DOI: 10.1364/OE.18.002339.
- Mirhosseini, M.** High-dimensional quantum cryptography with twisted light / M. Mirhosseini, O.S. Magaña-Loaiza, M.N. O'Sullivan, B. Rodenburg, M. Malik, M.P.J. Lavery, M.J. Padgett, D.J. Gauthier, R.W. Boyd // *New Journal of Physics*. – 2015. – Vol. 17. – 033033.
- Wang, J.** Advances in communications using optical vortices / J. Wang // *Photonics Research*. – 2016. – Vol. 4, Issue 5. – P. B14-B28. – DOI: 10.1364/PRJ.4.000B14.
- Alexeyev, C.N.** Higher order modes of coupled optical fibers / C.N. Alexeyev, N.A. Boklag, M.A. Yavorsky // *Journal of Optics*. – 2010. – Vol. 12, Issue 11. – 115704. – DOI: 10.1088/2040-8978/12/11/115704.
- Alexeyev, C.N.** Tunneling of orbital angular momentum in parallel optical waveguides / C.N. Alexeyev, N.A. Boklag, T.A. Fadeyeva, M.A. Yavorsky // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13, Issue 6. – 064012.
- Turpin, A.** Engineering of orbital angular momentum supermodes in coupled optical waveguides / A. Turpin, G. Pelegrí, J. Polo, J. Mompart, V. Ahufinger // *Scientific Reports*. – 2017. – Vol. 7. – 44057. – DOI: 10.1038/srep44057.
- Zhang, Z.** Low-crosstalk orbital angular momentum fiber coupler design / Z. Zhang, J. Gan, X. Heng, M. Li, J. Li, S. Xu, Z. Yang // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 10. – P. 11200-11209. – DOI: 10.1364/OE.25.011200.
- Alexeyev, C.N.** Inversion of the topological charge of optical vortices in a coil fiber resonator / C.N. Alexeyev, A.V. Milodan, M.C. Alexeyeva, M.A. Yavorsky // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 7. – P. 1526-1529. – DOI: 10.1364/OL.41.001526.
- Alexeyev, C.N.** Transmission of optical vortices through fiber loop resonators / C.N. Alexeyev, E.V. Barshak, B.P. Lapin, M.A. Yavorsky // *Optics Letters*. – 2019. – Vol. 44, Issue 16. – P. 4044-4047. – DOI: 10.1364/OL.44.004044.
- Zheng, J.** Wavelength-switchable vortex beams based on a polarization-dependent microknot resonator / J. Zheng, A. Yang, T. Wang, X. Zeng, N. Cao, M. Liu, F. Pang, T. Wang // *Photonics Research*. – 2018. – Vol. 6, Issue 5. – P. 396-402. – DOI: 10.1364/PRJ.6.000396.
- Alexeyev, C.N.** Topological resonances, super-efficient OAM control and spin-orbit interaction enhancement in fiber loop resonators / C.N. Alexeyev, E.V. Barshak, B.P. Lapin, M.A. Yavorsky // *Physical Review A*. – 2020. – Vol. 101, Issue 6. – 063801. – DOI: 10.1103/PhysRevA.101.063801.
- Snyder, A.W.** Optical waveguide theory / A.W. Snyder, J.D. Love. – London, New York: Chapman and Hall, 1985. – 750 p. – ISBN: 978-0-412-09950-2.
- Fleming, J.W.** Dispersion in  $\text{GeO}_2\text{-SiO}_2$  glasses / J.W. Fleming // *Applied Optics*. – 1984. – Vol. 23, Issue 24. – P. 4486-4493. – DOI: 10.1364/AO.23.004486.
- Napiorkowski, M.** Scaling effects in resonant coupling phenomena between fundamental and cladding modes in twisted microstructured optical fibers / M. Napiorkowski, W. Urbanczyk // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 9. – P. 12131-12143. – DOI: 10.1364/OE.26.012131.

**Приложение**

Табл. 1. Приведённые элементы матрицы возмущений  $\langle i|V_R|m\rangle^0 / 2\tilde{\beta} \text{ м}^{-1}$  и разности между постоянными распространения в нулевом приближении

| <i>i</i> \ <i>m</i> | -1    | 0    | 1     | Аналитическое выражение                                    |
|---------------------|-------|------|-------|--|
| -1                  | -698  | 724  | -875  | $\langle i V_R m\rangle^0 / 2\tilde{\beta} \text{ м}^{-1}$ |
|                     | 0     | 8029 | 0     | $\tilde{\beta}_m - \tilde{\beta}_i, \text{ м}^{-1}$        |
| 0                   | -441  | 384  | -441  | $\langle i V_R m\rangle^0 / 2\tilde{\beta} \text{ м}^{-1}$ |
|                     | -8029 | 0    | -8029 | $\tilde{\beta}_m - \tilde{\beta}_i, \text{ м}^{-1}$        |
| 1                   | -875  | 724  | -698  | $\langle i V_R m\rangle^0 / 2\tilde{\beta} \text{ м}^{-1}$ |
|                     | 0     | 8029 | 0     | $\tilde{\beta}_m - \tilde{\beta}_i, \text{ м}^{-1}$        |

**Сведения об авторах**

**Алексеев Константин Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, 1960 года рождения; в 1982 году окончил Симферопольский государственный университет по специальности «Физика», работает профессором на кафедре теоретической физики в Физико-техническом институте Крымского федерального университета. Область научных интересов: волоконная сингулярная оптика.  
E-mail: [c.alexeyev@yandex.ua](mailto:c.alexeyev@yandex.ua).

**Баршак Елена Владимировна**, 1989 года рождения, кандидат физико-математических наук. Работает на должности доцента кафедры физики конденсированных сред, физических методов и информационных технологий в медицине физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Область научных интересов: волоконная оптика, сингулярная оптика.  
E-mail: [lena.barshak@gmail.com](mailto:lena.barshak@gmail.com).

**Лалин Борис Петрович**, 1986 года рождения, кандидат физико-математических наук; в 2009 году окончил Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского по специальности «Физика», работает в должности доцента на кафедре общей физики в Физико-техническом институте Крымского федерального университета. Область научных интересов: волоконная сингулярная оптика. E-mail: [lapinboris@gmail.com](mailto:lapinboris@gmail.com).

**Яворский Максим Александрович**, 1982 года рождения, в 2004 году окончил Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского по специальности «Физика», кандидат физико-математических наук (2008 год). Работает зам. директора по научной работе физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. Область научных интересов: волоконная оптика, акустооптика, сингулярная оптика.  
E-mail: [maxyavorsky@yahoo.com](mailto:maxyavorsky@yahoo.com).

ГРНТИ: 29.33.17.

Поступила в редакцию 3 июля 2020 г. Окончательный вариант – 16 октября 2020 г.

---

# The structure of normal modes in parallel ideal optical fibers with strong coupling

C.N. Alexeyev<sup>1</sup>, E.V. Barshak<sup>1</sup>, B.P. Lapin<sup>1</sup>, M.A. Yavorsky<sup>1</sup>

<sup>1</sup>V.I. Vernadsky Crimean Federal University

295000, Simferopol, Russia, Prospekt Vernadskogo, 4

## Abstract

In this paper, we studied an effect of strong evanescent coupling on the structure of normal modes in a system of parallel ideal multimode optical fibers. Using the formalism of the degenerate perturbation theory and a scalar waveguide equation for this system, analytical expressions of higher-order supermodes and their propagation constants have been determined. We have shown that the structure of modes in the case of strong evanescent coupling coincides with the structure of normal modes for weakly coupled parallel fibers. We have demonstrated that in the presence of strong coupling, expressions for corrections to the scalar propagation constant are modified, deducing them analytically.

**Keywords:** strongly coupled fibers, modes' structure, optical vortex.

**Citation:** Alexeyev CN, Barshak EV, Lapin BP, Yavorsky MA. The structure of normal modes of parallel ideal optical fibers with an intensive coupling. *Computer Optics* 2020; 44(6): 876-882. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-777.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Science Foundation (Project No. 20-12-00291).

## References

- [1] Jones AL. Coupling of optical fibers and scattering in fibers. *J Opt Soc Am B* 1965; 55(3): 261-271. DOI: 10.1364/JOSA.55.000261.
  - [2] Hall DG, Tompson BJ. Selected papers on coupled-mode theory in guided-wave optics. Bellingham, Washington USA: SPIE Optical Engineering Press; 1993.
  - [3] Barybin AA, Dmitriev VA. Modern electrodynamics and coupled-mode theory: Application to guided-wave optics. Princeton: Rinton Press; 2002. ISBN: 978-1-58949-007-9.
  - [4] Black RJ, Gagnon L. Optical waveguide modes: polarization, coupling and symmetry. New York: McGraw-Hill Education; 2010. ISBN: 978-0-07-162296-7.
  - [5] Joseph T, John J. Two-core fiber-based mode converter and mode demultiplexer. *J Opt Soc Am B* 2019; 36(8): 1987-1994. DOI: 10.1364/JOSAB.36.001987.
  - [6] Wang G, Lu Y, Yang X, Duan L, Yao J. High-sensitivity magnetic field sensor based on a dual-core photonic crystal fiber. *Appl Opt* 2019; 58(2): 5800-5806. DOI: 10.1364/AO.58.005800.
  - [7] Miri M-A, Cotrufo M, Alu A. Optical gradient forces between evanescently coupled waveguides. *Opt Lett* 2018; 43(17): 4104-4107. DOI: 10.1364/OL.43.004104.
  - [8] Christodoulides D, Lederer F, Silberberg Y. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature* 2003; 424: 817-823. DOI: 10.1038/nature01936.
  - [9] Sumetsky M. Uniform coil optical resonator and waveguide: transmission spectrum, eigenmodes, and dispersion relation. *Opt Express* 2005; 13(11): 4331-4340. DOI: 10.1364/OPEX.13.004331.
  - [10] Ren Y, Zhang R, Ti C, Liu Y. Tapered optical fiber loops and helices for integrated photonic device characterization and microfluidic roller coasters. *Optica* 2016; 3(11): 1205-1208. DOI: 10.1364/OPTICA.3.001205.
  - [11] Yuan S, Chen L, Wang Z, Wang R, Wu X, Zhang X. Mode coupling in a terahertz multi-mode whispering-gallery-mode resonator. *Opt Lett* 2019; 44(8): 2020-2023. DOI: 10.1364/OL.44.002020.
  - [12] Nye JF, Berry MV. Dislocations in wave trains. *Proc Math Phys Eng Sci* 1974; 336(1605): 165-190. DOI: 10.1098/rspa.1974.0012.
  - [13] Leake KD, Hawkins AR, Schmidt H. All-optical particle trap using orthogonally intersecting beams [Invited]. *Photon Res* 2013; 1(1): 47-51. DOI: 10.1364/PRJ.1.000047.
  - [14] Bernet S, Jesacher A, Fürhapter S, Maurer C, Ritsch-Marte M. Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy. *Opt Express* 2006; 14(9): 3792-3805. DOI: 10.1364/OE.14.003792.
  - [15] Mari E, Anzolin G, Tamburini F, Prasciolu M, Umbriaco G, Bianchini A, Barbieri C, Romanato F. Fabrication and testing of I=2 optical vortex phase masks for coronagraphy. *Opt Express* 2010; 18(3): 2339-2344. DOI: 10.1364/OE.18.002339.
  - [16] Mirhosseini M, Magaña-Loaiza OS, O'Sullivan MN, Rodenburg B, Malik M, Lavery MPJ, Padgett MJ, Gauthier DJ, Boyd RW. High-dimensional quantum cryptography with twisted light. *New J Phys* 2015; 17: 033033. DOI: 10.1088/1367-2630/17/3/033033.
  - [17] Wang J. Advances in communications using optical vortices. *Photon Res* 2016; 4(5): B14-B28. DOI: 10.1364/PRJ.4.000B14.
  - [18] Alexeyev CN, Boklag NA, Yavorsky MA. Higher order modes of coupled optical fibers. *J Opt* 2010; 12(11): 115704. DOI: 10.1088/2040-8978/12/11/115704.
  - [19] Alexeyev CN, Boklag NA, Fadeyeva TA, Yavorsky MA. Tunneling of orbital angular momentum in parallel optical waveguides. *J Opt* 2011; 13(6): 064012. DOI: 10.1088/2040-8978/13/6/064012.
  - [20] Turpin A, Pelegrí G, Polo J, Mompart J, Ahufinger V. Engineering of orbital angular momentum supermodes in coupled optical waveguides. *Sci Rep* 2017; 7: 44057. DOI: 10.1038/srep44057.
  - [21] Zhang Z, Gan J, Heng X, Li M, Li J, Xu S, Yang Z. Low-crosstalk orbital angular momentum fiber coupler design. *Opt Express* 2017; 25(10): 11200-11209. DOI: 10.1364/OE.25.011200.
-



- 
- [22] Alexeyev CN, Milodan AV, Alexeyeva MC, Yavorsky MA. Inversion of the topological charge of optical vortices in a coil fiber resonator. *Opt Lett* 2016; 41(7): 1526-1529. DOI: 10.1364/OL.41.001526.
- [23] Alexeyev CN, Barshak EV, Lapin BP, Yavorsky MA. Transmission of optical vortices through fiber loop resonators. *Opt Lett* 2019; 44(16): 4044-4047. DOI: 10.1364/OL.44.004044.
- [24] Zheng J, Yang A, Wang T, Zeng X, Cao N, Liu M, Pang F, Wang T. Wavelength-switchable vortex beams based on a polarization-dependent microknot resonator. *Photon Res* 2018; 6(5): 396-402. DOI: 10.1364/PRJ.6.000396.
- [25] Alexeyev CN, Barshak EV, Lapin BP, Yavorsky MA. Topological resonances, super-efficient OAM control and spin-orbit interaction enhancement in fiber loop resonators. *Phys Rev A* 2020; 101(6): 063801. DOI: 10.1103/PhysRevA.101.063801.
- [26] Snyder AW, Love JD. *Optical waveguide theory*. London, New York: Chapman and Hall; 1985. ISBN: 978-0-412-09950-2.
- [27] Fleming JW. Dispersion in GeO<sub>2</sub>-SiO<sub>2</sub> glasses. *Appl Opt* 1984; 23(24): 4486-4493. DOI: 10.1364/AO.23.004486.
- [28] Napiorkowski M, Urbanczyk W. Scaling effects in resonant coupling phenomena between fundamental and cladding modes in twisted microstructured optical fibers. *Opt Express* 2018; 26(9): 12131-12143. DOI: 10.1364/OE.26.012131.
- 

### *Authors' information*

**Constantine Nikolayevich Alexeyev**, (b. 1960) Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, graduated from Simferopol State University in 1982 with a degree in Physics, currently a professor at the Theoretical Physics chair at the Physical-Technical Institute of the Crimean Federal University. Research interests: singular fiber optics.  
E-mail: [c.alexeyev@yandex.ua](mailto:c.alexeyev@yandex.ua).

**Elena Vladimirovna Barshak**, (b. 1989), PhD, currently she works as the Associate Professor of the Department of Condensed Matter Physics, Physical Methods and Information Technologies in Medicine at the Physical-Technical Institute of V.I Vernadsky Crimean Federal University. Research interests are fiber optics, singular optics.  
E-mail: [lena.barshak@gmail.com](mailto:lena.barshak@gmail.com).

**Boris Petrovich Lapin** (born in 1986), Candidate of Physical and Mathematical Sciences; graduated from the V.I. Vernadsky Taurida National University (specialty "Physics") in 2009, currently an associate professor at the Physical-Technical Institute of the Crimean Federal University. Research interests: singular fiber optics.  
E-mail: [lapinboris@gmail.com](mailto:lapinboris@gmail.com).

**Maxim Alexandrovich Yavorsky** (b. 1982) graduated from V.I Vernadsky Taurida National University in 2004, majoring in Physics, PhD (2008). Currently he works as the vice director in science at the Physical-Technical Institute of V.I Vernadsky Crimean Federal University. Research interests are fiber optics, acousto-optics, singular optics.  
E-mail: [maxyavorsky@yahoo.com](mailto:maxyavorsky@yahoo.com).

---

*Received June 3, 2020. The final version – October 16, 2020.*

---