

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

### Теория катастроф и каустики радиально-симметричных пучков

С.И. Харитонов<sup>1,2</sup>, С.Г. Волотовский<sup>1</sup>, С.Н. Хонина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

#### Аннотация

Работа посвящена исследованию каустик радиальных пучков. Найдены аналитические выражения для каустических поверхностей волновых фронтов, создаваемых радиально-симметричными дифракционными оптическими элементами. Результат представлен в криволинейной системе координат, согласованной с каустической поверхностью. Получено асимптотическое представление интеграла Кирхгофа вблизи оптической оси, обеспечивающее корректность расчетов в непараксиальном случае.

**Ключевые слова:** теория катастроф, каустики, радиально-симметричные пучки, асимптотическое представление интеграла Кирхгофа.

**Цитирование:** Харитонов, С.И. Теория катастроф и каустики радиально-симметричных пучков / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 159-167. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-159-167.

#### Введение

В классической геометрической оптике предполагается, что свет распространяется вдоль световых лучей. В однородной среде лучи представляют собой прямые линии. Одно из удивительных явлений в геометрической оптике – это образование каустик. Каустика представляет собой огибающую оптических лучей. Самые известные в природе каустики – обычная радуга и яркая линия, которая возникает после отражения света в обычной чашке с чаем. Мелкодисперсная среда рассеивает излучение во все стороны и визуализирует каустику. Каустики можно наблюдать в ясный солнечный день на дне прозрачного водоёма. Они образуются после преломления на криволинейной поверхности воды, созданной мелкими волнами. Геометрическую оптику [1, 2] можно рассматривать как коротковолновый предел классической оптики, которая, в свою очередь, основана на асимптотической аппроксимации системы уравнений Максвелла [2]. В основе коротковолновых асимптотик лежит факт, что поле описывается интегралами. Для того, чтобы вычислить интенсивность светового луча, необходимо вычислить интеграл. В рамках геометрической оптики обычно предполагается, что на интенсивность в данной точке оказывает влияние только небольшая область. На этом предположении строится вся геометрическая оптика. Можно показать, что во многих случаях увеличение области интегрирования не приводит к значительному изменению интенсивности в точке наблюдения. Математическим выражением этого факта является метод стационарной фазы [2]. Однако не всегда дифракционный интеграл можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. В некоторых случаях использование этого метода

приводит к появлению неустранимых особенностей. В этом случае интенсивность электромагнитного поля в точке стремится к бесконечности. Именно этот факт имеет место в окрестности геометрооптических каустик. Изучению каустик посвящено много работ. Классификация всех возможных каустик в общем случае была проведена В.И. Арнольдом [3]. Приложение теории катастроф к исследованию каустик изложено в [4, 5]. В работе [6] использован подход, альтернативный методу, основанному на интегральных представлениях от быстроосциллирующих функций. В работе уравнение Гельмгольца сводится к решению цепочки дифференциальных уравнений. Метод аналогичен сведению уравнения Гельмгольца к решению уравнения эйконала и переносу. Этот подход имеет некоторые преимущества, но позволяет найти поле только в окрестности неособой каустики. Различные асимптотические методы исследования уравнений и анализ поля вблизи особых точек изложены в работах [7–10].

В настоящей работе изучаются каустики осесимметричных пучков. В ряде работ анализ каустик проводится в параксиальном приближении. Однако следует отметить, что некоторые каустики при рассмотрении в рамках параксиального приближения исчезают. Примером может служить каустика параболического фронта. При рассмотрении в параксиальном приближении параболический фронт имеет только одну особую точку-фокус. В непараксиальном приближении появляется каустика, которая известна как ласточкин хвост. В данной работе каустики вихревых пучков исследуются в непараксиальном приближении. В работах, посвящённых теории катастроф, обычно не приводятся системы координат, в которых функции эйконала

имеют канонический вид (обычно приводится только канонический вид). Это приводит к тому, что трудно использовать результаты этих работ для получения конкретных дифракционных картин в окрестности каустик. В работе построена удобная система координат, которая

позволяет в дальнейшем построить в явном виде асимптотики быстроосциллирующих интегралов.

**1. Основные положения**

Рассмотрим интеграл Кирхгофа в цилиндрической системе координат:

$$U(r, \varphi, z) = -\frac{iz}{\lambda} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{A(\rho, \theta) \exp(ik(\Psi(\rho, \theta) + S(\rho, \theta, r, \varphi, z)))}{S^2(\rho, \theta, r, \varphi, z)} \rho d\rho d\theta, \tag{1}$$

где в качестве эйкональной функции дифракционного оптического элемента (ДОЭ) рассмотрим радиально-симметричную функцию:

$$\Psi(\rho, \theta) = \Phi(\rho). \tag{2}$$

Тогда функция, стоящая в интеграле Кирхгофа под знаком экспоненты

$$\Phi(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \Phi(\rho) + S(\rho, \theta, r, \varphi, z), \tag{3}$$

где  $S(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \sqrt{\rho^2 + z^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)}$ .

В приближении геометрической оптики интеграл Кирхгофа (1) можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. Рассмотрим множество точек, для которых неприменим метод стационарной фазы. Это множество точек описывается системой уравнений:

$$\begin{vmatrix} \Phi_{\rho\rho} & \Phi_{\rho\theta} \\ \Phi_{\rho\theta} & \Phi_{\theta\theta} \end{vmatrix} = 0, \quad \Phi_\rho = 0, \quad \Phi_\theta = 0. \tag{4}$$

К этим уравнениям нужно добавить уравнение для стационарной точки функции эйконала:

$$\Phi_\rho(\rho) + S_\rho = 0, \quad S_\theta = 0. \tag{5}$$

Решение системы уравнений (4) и (5) приводит к параметрическому уравнению поверхности особых точек

$$\begin{aligned} r(\xi) &= \pm(S_0(\xi)\Phi_\xi(\xi) + \xi), \\ \varphi &= \eta + (1 \mp 1)\frac{\pi}{2}, \\ Z_0(\xi) &= \sqrt{S_0^2(\xi) - (\xi \mp r(\xi))^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Параметрическое уравнение (6) аналогично полученным в работах [1, 11].

Функция  $S_0$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$a(\xi)S_0^2(\xi) + b(\xi)S_0(\xi) + c(\xi) = 0, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \xi^3 \Phi_{\xi\xi}(\xi) \Phi_\xi(\xi), \\ b(\xi) &= \xi^3 \{ \xi \Phi_{\xi\xi}(\xi) + (1 - \Phi_\xi^2(\xi)) \Phi_\xi(\xi) \}, \\ c(\xi) &= \xi^4 (1 - \Phi_\xi^2(\xi)). \end{aligned} \tag{8}$$

Решение (7) имеет два корня. Один корень, соответствующий внеосевой каустике, имеет вид

$$S_0(\xi) = \frac{\Phi_\xi^2(\xi) - 1}{\Phi_{\xi\xi}(\xi)}. \tag{9}$$

Другое решение, описывающее каустику, лежащую на оптической оси, имеет вид:

$$S_0(\xi) = -\frac{\xi}{\Phi_\xi(\xi)}. \tag{10}$$

Параметрическое уравнение каустики в декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= X_0(\xi, \eta) = r(\xi) \cos \varphi(\xi, \eta), \\ y &= Y_0(\xi, \eta) = r(\xi) \sin \varphi(\xi, \eta), \\ z &= Z_0(\xi). \end{aligned} \tag{11}$$

**2. Криволинейная система координат**

Метод стационарной фазы не применим для вычисления интеграла Кирхгофа в области каустики. Однако для вычисления поля в этой области можно использовать другие асимптотические методы, которые основаны на разложении функции под экспонентой в ряд Тейлора с точностью до членов выше второго порядка. Для вычисления интеграла Кирхгофа (1) в окрестности каустической поверхности введём криволинейную систему координат  $(\xi, \eta, \sigma)$ . Декартовые координаты связаны с введёнными криволинейными следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= X_0(\xi, \eta) + N_x(\xi, \eta)\sigma, \\ y &= Y_0(\xi, \eta) + N_y(\xi, \eta)\sigma, \\ z &= Z_0(\xi) + N_z(\xi, \eta)\sigma. \end{aligned} \tag{12}$$

Величины  $N_x(\xi, \eta)$ ,  $N_y(\xi, \eta)$ ,  $N_z(\xi, \eta)$  представляют собой декартовые компоненты единичного вектора нормали,  $\sigma$  – расстояние от каустической поверхности по нормали, при  $\sigma=0$  точка лежит на каустической поверхности.

Для дальнейшего анализа рассмотрим квадрат расстояния между точкой на оптическом элементе с координатами  $(\rho, \theta)$  и точкой вблизи каустики с координатами  $(\xi, \eta, \sigma)$ ,

$$S_1^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2. \tag{13}$$

После подстановки выражений для криволинейных координат в окрестности каустики и на оптическом элементе получается выражение

$$\begin{aligned} S_1^2(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) &= \\ &= S^2(\rho, \theta, \xi, \eta) + \sigma^2 + 2f(\rho, \theta, \xi, \eta)\sigma, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$S^2(\rho, \theta, \xi, \eta) = r^2(\xi) + \rho^2 - 2r(\xi)\rho \cos(\eta + (1 \mp 1)(\pi/2) - \theta) + Z_0^2(\xi), \quad (15)$$

$$f(\rho, \theta, \xi, \eta) = r(\xi)a(\xi) + 2Z_0(\xi)b(\xi) - a(\xi)\rho \cos(\eta + (1 \mp 1)(\pi/2) - \theta). \quad (16)$$

Вычисление функций  $a(\xi)$  и  $b(\xi)$  приведено в Приложении.

### 3. Вычисление в рамках теории катастроф

#### 3.1. Внеосевая каустика

Теперь перейдём к постановке, характерной для теории катастроф. Рассмотрим функцию, которая в интеграле Кирхгофа находится под знаком экспоненты (подэкспоненциальная функция):

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = \Phi(\rho) + S_1(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma). \quad (17)$$

Для вычисления интеграла Кирхгофа (1) вблизи каустики в точке  $(\xi, \eta, \sigma)$  учтём, что луч, проходящий в рассматриваемую точку, исходит из точки  $(\rho = \xi, \theta = \eta + (1 \mp 1)\pi/2)$  на апертуре. Далее вводим следующие координаты:

$$\begin{aligned} x &= \rho - \xi, \\ y &= \theta - \eta + (1 \mp 1)\pi/2. \end{aligned} \quad (18)$$

Диапазон изменения значений:  $x \in [-\xi, R - \xi]$ ,  $y \in [-\eta + (1 \mp 1)\pi/2, 2\pi - \eta + (1 \mp 1)\pi/2]$ . Учитывая радиальную симметрию, можно всегда положить  $\eta = 0$ . После некоторых преобразований можно записать расстояние от точки  $(\rho, \theta)$  на апертуре до точки вблизи каустики следующим образом:

$$S_1^2(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = S^2(\rho, \theta, \xi, \eta) + 2f(\rho, \theta, \xi, \eta)\sigma, \quad (19)$$

а расстояние от точки  $(\rho, \theta)$  на апертуре до точки непосредственно на каустике (при  $\sigma = 0$ ) будет:

$$S^2(\rho, \theta, \xi, \eta) = S_0^2(\xi) + 2(\xi \mp r(\xi))x + x^2 \pm 2r(\xi)x C(y) \pm 2r(\xi)\xi C(y), \quad (20)$$

где  $C(y) = 1 - \cos(y)$ .

Отметим, что  $C(y) \in [0, 2]$ , т.е. принимает положительные значения, поэтому можем ввести новую переменную  $y_1 = \sqrt{C(y)/2}$ . Для дальнейших рассуждений понадобится выражение старых координат через новые:

$$\begin{aligned} x &= Rx_1, \\ y &= \arccos(1 - 2y_1^2), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $y_1 \in [0, 1]$ .

Учтём описанные выше преобразования координат в интеграле Кирхгофа:

$$U(\xi, \eta, \sigma) = -\frac{i2z}{\lambda} \int_{-\xi/R}^1 \int_0^1 \frac{A(\rho)J(y_1)}{S_1^2(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma)} \times \exp(ikF(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma)) \rho dx_1 dy_1, \quad (22)$$

где  $\rho$  выражено через  $x_1$ , а  $\theta$  – через  $y_1$ ,  $J(y_1)$  – якобиан преобразования:

$$J(y_1) = \frac{4R}{\sqrt{(2 - 2y_1^2)}}. \quad (23)$$

Заметим, что интеграл (22) интересен в области малых значений  $y_1$ , поэтому особенности в (23) не будут. А особенность при  $y_1 = 1$  является устранимой.

Далее рассмотрим подэкспоненциальную функцию (17). С учётом (19) нам понадобится:

$$S(\rho, \theta, \xi, \eta) = \sqrt{S_0^2(\xi) + \Delta}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= R(2\xi \mp 2r(\xi))x_1 + \\ &+ R^2x_1^2 \pm 2r(\xi)\xi y_1^2 \pm 2Rr(\xi)x_1y_1^2, \\ S_0(\xi) &= \frac{\Phi_\xi^2 - 1}{\Phi_{\xi\xi}(\xi)}. \end{aligned}$$

Функцию  $\Phi(\rho)$ , входящую в (17), разложим в ряд Тейлора

$$\Phi(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \Phi(\xi)}{d\xi^n} R^n x_1^n. \quad (25)$$

Функцию  $S(\rho, \theta, \xi, \eta)$  в (24) также разложим в ряд по степеням  $\Delta$ .

Запишем выражение для подэкспоненциальной функции в виде:

$$\begin{aligned} F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) &= \Phi(\xi) + S_0(\xi) \pm \frac{2r(\xi)\xi}{S_0(\xi)} y_1^2 + \\ &+ R^3 \left( \frac{1}{3!} \frac{d^3 \Phi(\xi)}{d\xi^3} - \frac{\Phi_\xi(\xi)}{2S_0^2(\xi)} - \frac{1}{8} \frac{\Phi_\xi^3(\xi)}{S_0^3(\xi)} \right) x_1^3 + \\ &+ 2R \left( \mp \frac{\Phi_\xi(\xi)r(\xi)\xi}{S_0^2(\xi)} \pm \frac{r(\xi)}{S_0(\xi)} \right) x_1 y_1^2 + \\ &+ \frac{f(\rho, \theta, \xi, \eta)}{S_0(\xi)} \sigma + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \Phi(\xi)}{d\xi^n} R^n x_1^n + \\ &+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{\Delta^4}{S_0^7(\xi)} + \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} f(\rho, \theta, \xi, \eta) &= \\ &= [r(\xi)a(\xi) + 2Z_0(\xi)b(\xi) \mp a(\xi)\xi] \mp \\ &\mp Ra(\xi)x_1 \pm 2a(\xi)\xi y_1^2 \pm 2Ra(\xi)x_1 y_1^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что выражение (26) в точке  $(0, 0)$  будет иметь первую производную, равную нулю. Также гессиан в центральной точке  $(0, 0)$  равен нулю. Это означает, что центральная точка является стационарной неморсовской точкой. Теория катастроф занимается анализом поведения функций именно в таких точках. При этом функции в этих точках с точностью до замены координат приводятся к некоторому набо-

ру канонических форм. Каждая из этих форм соответствует своему типу «катастрофы» [3–5].

Приведём (26) к каноническому виду. Тогда функция  $F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma)$  будет имеет вид

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = F_0(\xi, \sigma) + \lambda_2(\xi)y_1^2 + t_{30}(\xi)x_1^3 + t_{12}(\xi)x_1y_1^2 + P, \tag{28}$$

где возмущение

$$P = p_1(\xi, \sigma)x_1 + p_{02}(\xi, \sigma)y_1^2 + p_{12}(\xi, \sigma)x_1y_1^2. \tag{29}$$

Следует отметить, что на поверхности каустики функция возмущения (29) равна нулю.

Выражение (28) можно также представить в виде:

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = F_0(\xi, \sigma) + p_1(\xi, \sigma)x_1 + \lambda_2(\xi, \sigma)y_1^2 + t_{30}(\xi, \sigma)x_1^3 + t_{12}(\xi, \sigma)x_1y_1^2. \tag{30}$$

В случае, если коэффициент при  $y_1^2$  не является малым, тогда с помощью осесохраняющего преобразования:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ y_1 &= y_2 + (B_{20}x_2^2 + B_{11}x_2y_2 + B_{02}y_2^2) \end{aligned} \tag{31}$$

уберём все члены третьего порядка, кроме  $x_2^3$ :

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = p_1x_2 + \lambda_2y_2^2 + t_{30}x_2^3 + t_{40}x_2^4 + t_{31}x_2^3y_2 + t_{22}x_2^2y_2^2 + t_{13}x_2y_2^3 + t_{04}y_2^4. \tag{32}$$

Якобиан преобразования (31) имеет вид:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial y_1}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (2B_{20}x_2 + B_{11}x_2y_2) \\ 0 & 1 + B_{11}x_2 + 2B_{02}y_2 \end{vmatrix} = 1 + (B_{11}x_2 + 2B_{02}y_2). \tag{33}$$

Таким образом, в (32) остаются члены четвёртого порядка и выше. На этом можно остановиться, так как членами четвёртого порядка и выше можно пренебречь. В этом случае

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) \approx p_1x_2 + \lambda_2y_2^2 + t_{30}x_2^3. \tag{34}$$

Если же продолжить процесс, то с помощью осесохраняющего преобразования:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_3 + (B_{30}x_3^3 + B_{21}x_3^2y_3 + B_{12}x_3y_3^2 + B_{03}y_3^3), \\ x_2 &= x_3, \end{aligned} \tag{35}$$

выбирая коэффициенты соответствующим образом, можно привести функцию (32) к виду:

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = p_1x_3 + \lambda_2y_3^2 + t_{30}x_3^3 + t_{40}x_3^4 + T_5, \tag{36}$$

где функция  $T_5$  содержит члены пятой степени и выше.

Дальнейшее продолжение аналогичного процесса приведёт к следующему результату:

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = p_1x_n + \lambda_2y_n^2 + t_{30}x_n^3 + \dots + t_{n0}x_n^n + T_{n+1}, \tag{37}$$

где  $T_{n+1}$  – тейл («хвост») степени  $n + 1$  и выше. Членами  $t_{n0}x_n^n + T_{n+1}$  пренебрегаем, и в результате получаем

$$F(\rho, \theta, \xi, \eta, \sigma) = (p_1x_n + t_{30}x_n^3) + \lambda_2y_n^2 + \dots \tag{38}$$

Вернёмся к виду, полученному в (30), и подставим в интеграл Кирхгофа (22), выполнив замены переменных и расширив пределы интегрирования с учётом асимптотического характера интеграла:

$$U(\xi, \eta, \sigma) = -(iz / \lambda) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\rho)J(y_1(x_2, y_2))(1 + (B_{11}x_2 + 2B_{02}y_2))}{S_2^2(x_2, y_2, \xi, \eta, \sigma)} \times \exp(ik(p_1x_2 + t_{30}x_2^3 + \lambda_2y_2^2)) \rho dx_2 dy_2. \tag{39}$$

В полученном выражении асимптотическая зависимость поля  $U(\xi, \eta, \sigma)$  от  $\sigma$  имеет вид функции Эйри [1].

### 3.2. Каустика вблизи оси

Рассмотрим оптический элемент, формирующий каустику вдоль оптической оси. В этом случае при вычислении интеграла Кирхгофа мы встречаемся с проблемой представления в канонической форме выражения, стоящего под знаком экспоненты

$$F(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \Phi(\rho) + S(\rho, \theta, r, \varphi, z), \tag{40}$$

где

$$S(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \sqrt{\rho^2 + z^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)}. \tag{41}$$

Выражение для эйкональной функции для формирования осевой каустики имеет следующий вид [12]:

$$\Phi(\rho) = -\int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + Z_0^2(\rho)}}, \tag{42}$$

где  $Z_0(\rho)$  определяет распределение энергии вдоль каустики.

Будем искать поле в окрестности точки  $\rho = \xi, \theta = \varphi = \eta, z = Z_0(\xi)$ , для этого разложим функцию  $S(\rho, \theta, r, \varphi, z)$  в этой точке:

$$S(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \sqrt{\rho^2 + z^2 + r^2 - 2r\rho + 2r\rho(1 - \cos(\theta - \varphi))}. \tag{43}$$

Перепишем в виде:

$$S(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \sqrt{(\rho - r)^2 + z^2 + 2r\rho(1 - \cos(\theta - \varphi))}. \tag{44}$$

Обозначим  $y^2 = (1 - \cos(\theta - \varphi))$ , тогда

$$S(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \sqrt{\xi^2 + z^2 + (x^2 + 2\xi x) + r^2 + 2r(\xi y^2 + xy^2 - x - \xi)} \tag{45}$$

или

$$S(\rho, \theta, r, \varphi, z) = \sqrt{\xi^2 + z^2 + \Delta}, \tag{46}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta &= \delta_0 + \delta_1, \\ \delta_1 &= r\delta, \\ \delta &= -2\left[\xi - \frac{r}{2} + x_1 - \xi y^2 - x_1 y^2\right].\end{aligned}\quad (47)$$

Разлагая  $S(\rho, \theta, r, \varphi, z)$  по степеням  $\Delta$  в ряд Тейлора и эйкональную функцию в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) &= \Phi(\xi) - \frac{\xi}{S_0(\xi)}x - \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_0(\xi)} - \frac{\xi^2}{S_0^3(\xi)}\right)x^2 + \dots +,\end{aligned}\quad (48)$$

получаем выражение для подэкспоненциальной функции в виде:

$$\begin{aligned}F(\rho, \theta, r, \varphi, z) &= \Phi(\xi) + S(\xi) - \\ &- \frac{1}{8}\frac{4\xi x_1^3}{S^3(\xi)} + \frac{1}{16}\frac{\delta_0^3}{S^5(\xi)} - \frac{1}{8}\frac{x_1^4}{S^3(\xi)} + a_4\frac{\delta_0^4}{S^7(\xi)} + P,\end{aligned}\quad (49)$$

где

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\frac{r\delta}{S(\xi)} - \frac{1}{8}\frac{r^2\delta^2 + 2r\delta_0\delta}{S^3(\xi)} + \\ &+ \frac{1}{16}\frac{r^3\delta^3 + 3r\delta\delta_0^2 + 3r^2\delta_0\delta^2}{S^5(\xi)} - \\ &- a_4\frac{r^4\delta^4 + 4r\delta\delta_0^3 + 6r^2\delta_0^2\delta^2 + 4r^3\delta_0\delta^3}{S^7(\xi)}.\end{aligned}\quad (50)$$

Далее удержим на поверхности каустики только члены, содержащие  $S^{-1}$ ,  $S^{-3}$  и линейные по  $r$ :

$$\begin{aligned}F(\rho, \theta, r, \varphi, z) &= \Phi(\xi) + S(\xi) + \\ &+ \frac{1}{8S^3(\xi)}(x_1^4 - 4\xi x_1^3) + \frac{r}{2}P_4,\end{aligned}\quad (51)$$

где

$$\begin{aligned}P_4 &= \left(\frac{\delta}{S(\xi)} - \frac{1}{2}\frac{\delta_0\delta}{S^3(\xi)}\right), \\ \delta\delta_0 &\approx -4\xi^2 x_1 - 4\xi x_1^2 - (2x_1^3 - 4\xi^2 x_1 y^2) + 6\xi x_1^2 y^2, \\ \delta &\approx -2(\xi + x_1 - \xi y^2 - x_1 y^2).\end{aligned}\quad (52)$$

На каустической поверхности возмущение в (51) будет равно нулю, т.е.  $rP_4=0$ . В этом случае после подстановки выражения (51) в интеграл Кирхгофа мы получим выражение:

$$U \sim \int A(x_1) \exp\left\{ik\left[\frac{(x_1^4 - 4\xi x_1^3)}{8S^3(\xi)}\right]\right\} dx_1.\quad (53)$$

После замены переменных  $x_1 = x_2 + \xi$  интеграл сводится к интегралу:

$$U \sim \int A(x_2) \exp\left\{ik\left[\frac{(x_2^4 + t_2 x_2^2 + t_1 x_2)}{8S^3(\xi)}\right]\right\} dx_2,\quad (54)$$

который асимптотически сводится к интегралу Пирси [1].

В окрестности каустики возмущение (52) имеет вид:

$$\begin{aligned}P_4 &= p_1(\xi)x_1 + \lambda_1(\xi)x_1^2 + \lambda_2(\xi)y_1^2 + \\ &+ t_{30}(\xi)x_1^3 + t_{12}(\xi)x_1 y_1^2 + t_{22}(\xi)x_1^2 y_1^2.\end{aligned}\quad (55)$$

Если бы коэффициент при  $y_1$  имел большое значение, то переменная  $y_1^2$  была бы «хорошей» [5] и тогда с помощью осесохраняющего преобразования только «хороших» переменных можно было убрать перекрестные члены, содержащие «плохие» и «хорошие» переменные выше третьей степени, и функцию привести к виду

$$\begin{aligned}F(\rho, \theta, r, \varphi, z) &= \Phi(\xi) + S(\xi) + \\ &+ \frac{1}{8S^3(\xi)}(x_2^4 - 4\xi x_2^3) + \lambda_2(\xi)y_2^2.\end{aligned}\quad (56)$$

Однако это не так. Это означает, что в этом случае невозможно представить выражение в виде канонического ростка и его возмущения. Это связано с тем, что в отсутствие возмущения все количество стационарных точек стремится к бесконечности.

Теорию катастроф целесообразно применять для анализа, когда имеется конечное число стационарных точек, которые сливаются. Возмущение приводит к тому, что вместо одной вырожденной неморсовской точки появляются несколько псевдоморсовских точек (происходит «морсификация»). В нашем случае ситуация иная и применять подход, основанный на анализе форм Тома, нецелесообразно. Подобный случай наблюдается вблизи фокальной точки, где росток катастрофы представляет собой константу и стационарные точки занимают всю плоскость.

#### 4. Альтернативный подход

В предыдущих параграфах мы пытались свести подэкспоненциальную функцию к формам Тома. Этот процесс нелёгкий и приводит к громоздким выражениям. Для того, чтобы вычислить интеграл Кирхгофа вблизи оси, воспользуемся следующим представлением подэкспоненциальной функции:

$$\begin{aligned}F(\rho, \theta, r, \varphi, z) &= \Phi(\rho) + S(\rho, r, z) \times \\ &\times \left(1 + \frac{\Delta}{2} - \frac{\Delta^2}{8} + \frac{\Delta^3}{16} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \Delta^4\right),\end{aligned}\quad (57)$$

где

$$\begin{aligned}S(\rho, r, z) &= \sqrt{(\rho - r)^2 + z^2}, \\ \Delta &= \frac{2r\rho(1 - \cos(\theta - \varphi))}{S^2(\rho, r, z)}.\end{aligned}\quad (58)$$

Вблизи оптической оси используем только первый член разложения:

$$\begin{aligned}F(\rho, \theta, r, \varphi, z) &= \Phi(\rho) + \frac{r\rho}{S(\rho, r, z)} + S(\rho, r, z) - \\ &- \frac{r\rho}{S(\rho, r, z)} \cos(\theta - \varphi),\end{aligned}\quad (59)$$

тогда интеграл Кирхгофа:

$$U(r, \varphi, z) = \frac{ikz}{2\pi} \int A(\rho) \times \exp\left(ik\left(\Phi(\rho) + \frac{r\rho}{S(\rho, r, z)} + S(\rho, r, z)\right)\right) \times \frac{1}{S^2(\rho, r, z)} \times \exp\left(-ik\frac{r\rho}{S(\rho, r, z)}\cos(\theta - \varphi)\right) \rho d\rho d\theta. \quad (60)$$

Интегрируем по углу

$$U(r, \varphi, z) = ikz \int_0^R \frac{A(\rho)}{S^2(\rho, r, z)} \times \exp\left(ik\left(\Phi(\rho) + \frac{r\rho}{S(\rho, r, z)} + S(\rho, r, z)\right)\right) \times J_0\left(\frac{kr\rho}{S(\rho, r, z)}\right) \rho d\rho. \quad (61)$$

Заметим, что интеграл (61) отличается от непараксиальной аппроксимации интеграла Кирхгофа, рассмотренной в работах [13, 14].

Полученный асимптотический интеграл удобен для расчётов и в параксиальном приближении сводится к преобразованию Френеля–Ханкеля.

**5. Результаты моделирования**

В данном параграфе выполнено численное сравнение расчета поля для параболической и сферической линз в непараксиальном режиме с использованием трех типов операторов распространения: разложение по коническим волнам [15, 16], преобразование Френеля–Ханкеля и выражение (61).

На рис. 1 показаны результаты расчета для сферической линзы:

$$\Phi(\rho) = -\sqrt{\rho^2 + f^2}. \quad (62)$$

На рис. 2 показаны результаты расчета для параболической линзы:

$$\Phi(\rho) = -\rho^2/2f. \quad (63)$$

Параметры расчета: радиус оптического элемента  $R = 126\lambda$ , фокусное расстояние  $f = 50\lambda$ .

Как видно из результатов моделирования, представленных на рис. 1 и 2, полученный в работе асимптотический интеграл (61) позволяет получать корректные расчеты, очень близкие к результатам точного моделирования на основе разложения по коническим волнам.

Интересно также отметить различие, которое имеет место для сферической и параболической линз в непараксиальном случае.

**Заключение**

В работе рассмотрено вычисление поля вблизи каустики, формируемой с помощью радиально-симметричного ДОО.

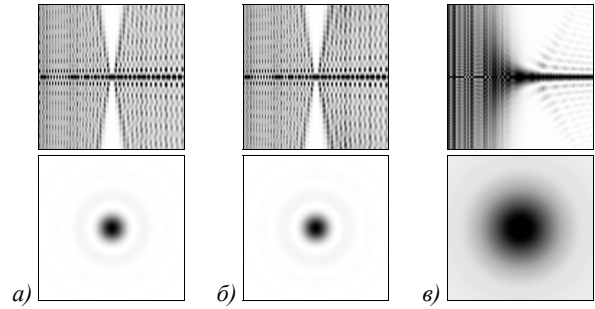


Рис. 1. Результаты расчёта (негатив) для сферической линзы (62) с использованием разложения по коническим волнам (а), асимптотического интеграла (б) и преобразования Френеля–Ханкеля (в): ход лучей (верхняя строка,  $z \in [25\lambda; 75\lambda]$ ,  $y \in [-5\lambda; 5\lambda]$ ) и распределение интенсивности в фокальной плоскости (нижняя строка  $x, y \in [-1,25\lambda; 1,25\lambda]$ )

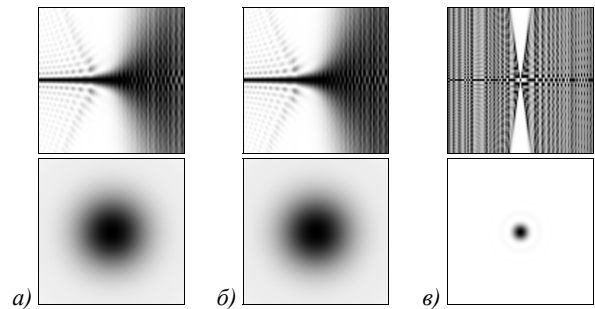


Рис. 2. Результаты расчёта (негатив) для параболической линзы (63) с использованием разложения по коническим волнам (а), асимптотического интеграла (б) и преобразования Френеля–Ханкеля (в): ход лучей (верхняя строка,  $z \in [25\lambda; 75\lambda]$ ,  $y \in [-5\lambda; 5\lambda]$ ) и распределение интенсивности в фокальной плоскости (нижняя строка  $x, y \in [-1,25\lambda; 1,25\lambda]$ )

Получено представление интеграла Кирхгофа с использованием канонических форм, которые обычно применяются в теории катастроф. В отличие от других работ, интеграл Кирхгофа рассмотрен в цилиндрической системе координат. Результат представлен в криволинейной системе координат, согласованной с каустической поверхностью.

Полученное асимптотическое представление интеграла Кирхгофа вблизи оптической оси отличается от непараксиальной аппроксимации интеграла Кирхгофа, рассмотренной в других работах. Результаты моделирования на примере сферической и параболической линз показали корректность расчетов с использованием асимптотического интеграла в непараксиальном случае.

Результаты, полученные в данной работе, можно обобщить для вихревых пучков.

**Благодарности**

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-20045-мк) в части численного моделирования и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фото-

ника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части теоретических выкладок.

### Литература

1. **Кравцов, А.Ю.** Геометрическая оптика неоднородных сред / А.Ю. Кравцов, Ю.И. Орлов. – Москва: Наука, 1980. – 306 с.
2. **Борн, М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – 2-е изд. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1973. – 713 р.
3. **Арнольд, В.И.** Особенности гладких отображений / В.И. Арнольд // Успехи математических наук. – 1968. – Т. 23, Вып. 1(139). – С. 1-43.
4. **Постон, Т.** Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, И. Стюарт. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 607 с.
5. **Гилмор, Р.** Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. – 344 с.
6. **Бабич, В.М.** Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн / В.М. Бабич, В.С. Булдырев. – М.: Наука, 1972. – 456 с.
7. **James, G.L.** Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves / G.L. James. – 3<sup>rd</sup> ed. – London, UK: Peter Peregrinus Ltd., 1986. – ISBN: 978-0-86341-062-8.
8. **Вайнберг, Б.Р.** Асимптотические методы в уравнениях математической физики / Б.Р. Вайнберг. – М.: Изд-во Московского университета, 1982. – 296 с.
9. **Маслов, В.П.** Теория возмущений и асимптотические методы / В.П. Маслов. – М.: Издательство Московского университета, 1965. – 553 с.
10. **Маслов, В.П.** Операторные методы / В.П. Маслов. – М.: Наука, 1973. – 544 с.
11. **Харитонов, С.И.** Гибридный асимптотический метод анализа каустик оптических элементов в радиально-симметричном случае / С.И. Харитонов, С.Г. Волотовский, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 2. – С. 175-182. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-175-1.
12. Methods for computer design of diffractive optical elements / ed. by V.A. Soifer. – New York: John Wiley & Sons, 2002. – 784 p. – ISBN: 978-0-471-09533-0.
13. **Marathay, A.S.** On the usual approximation used in the Rayleigh–Sommerfeld diffraction theory / A.S. Marathay, J.F. McCalmont // Journal of the Optical Society of America A. – 2004. – Vol. 21. – P. 510-516.
14. **Хонина, С.Н.** Распространение радиально-ограниченных вихревых пучков в ближней зоне: I. Алгоритмы расчёта / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, А.А. Ковалёв, С.Г. Волотовский // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 3. – С. 315-329.
15. **Luneburg, R.K.** Mathematical theory of optics / R.K. Luneburg. – Berkeley, California: University of California Press, 1966.
16. **Khonina, S.N.** Near-field propagation of vortex beams: models and computation algorithms / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.A. Kovalyov, S.G. Volotovskiy // Optical Memory and Neural Networks (information optics). – 2014. – Vol. 23, No. 2. – P. 50-73. – DOI: 10.3103/S1060992X14020027.

### Сведения об авторах

**Харитонов Сергей Иванович**, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры нанотехнологий, ведущий научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Волотовский Сергей Геннадьевич**, 1959 года рождения, в 1984 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в ИСОИ РАН – филиале ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор Самарского университета; главный научный сотрудник ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

### Приложение А. Вычисление вектора нормали

Для вычисления векторов нормали к поверхности необходимо вычисление определителя

$$O(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ X_{0\xi}(\xi, \eta) & Y_{0\xi}(\xi, \eta) & Z_{0\xi}(\xi, \eta) \\ X_{0\eta}(\xi, \eta) & Y_{0\eta}(\xi, \eta) & Z_{0\eta}(\xi, \eta) \end{vmatrix}, \quad (\text{П1})$$

где  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$  входят в уравнение каустической поверхности в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x &= X_0(\xi, \eta) = r(\xi) \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right), \\ y &= Y_0(\xi, \eta) = r(\xi) \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right), \\ z &= Z_0(\xi). \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

Берём производные:

$$\begin{aligned} X_{0\xi}(\xi, \eta) &= r_\xi(\xi) \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right), & X_{0\eta}(\xi, \eta) &= -r(\xi) \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right), \\ Y_{0\xi}(\xi, \eta) &= r_\xi(\xi) \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right), & Y_{0\eta}(\xi, \eta) &= r(\xi) \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right), \\ Z_{0\xi}(\xi) &= Z_{0\xi}(\xi), & Z_{0\eta}(\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Тогда

$$\begin{aligned} O(\xi, \eta) &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_\xi(\xi) \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) & r_\xi(\xi) \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) & Z_\xi(\xi) \\ -r(\xi) \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) & r(\xi) \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -e_x (Z_{0\xi}(\xi)) r(\xi) \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) - e_y \left( Z_{0\xi}(\xi) r(\xi) \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) \right) + e_z (r_\xi(\xi) r(\xi)) = \\ &= -(Z_{0\xi}(\xi)) r(\xi) \left\{ \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) e_x + \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) e_y \right\} + e_z (r_\xi(\xi) r(\xi)). \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Вектор нормали имеет вид:

$$\begin{aligned} N(\xi, \eta) &= a(\xi) \cos\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) e_x + \\ &+ a(\xi) \sin\left(\eta + (1 \mp 1) \frac{\pi}{2}\right) e_y + b(\xi) e_z, \end{aligned} \quad (\text{П5}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{где} \\ a(\xi) = -Z_{0\xi}(\xi) r(\xi) / |O(\xi)|, \\ b(\xi) = (r_\xi(\xi) r(\xi)) / |O(\xi)|, \\ |O(\xi)| = \sqrt{(Z_{0\xi}(\xi) r(\xi))^2 + (r_\xi(\xi) r(\xi))^2}. \end{array} \right\}$$

ГРПТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 5 марта 2019 г. Окончательный вариант – 29 марта 2019 г.

## Catastrophe theory and caustics of radially symmetric beams

S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>, S.G. Volotovskiy<sup>1</sup>, S.N. Khonina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,

Molodogvardeyskaya 151, 443001, Samara, Russia;

<sup>2</sup> Samara National Research University, Moskovskoye shosse, 34, 443086, Samara, Russia

### Abstract

The work is devoted to the study of the caustics of radial beams. Analytical expressions for caustic surfaces of wave fronts created by radially symmetric diffractive optical elements are found. The result is presented in a curvilinear coordinate system consistent with the caustic surface. An asymptotic representation of the Kirchhoff integral near the optical axis is obtained, ensuring the correct calculations in the non-paraxial case.

**Keywords:** catastrophe theory, caustics, radially symmetric beams, asymptotic representation of the Kirchhoff integral.

**Citation:** Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Catastrophe theory and caustics of radially symmetric beams. Computer Optics 2019; 43(2): 159-167. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-159-167.

**Acknowledgements:** This work was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research under grant No. 18-29-20045-mk (numerical calculations) and by the Ministry of Science and Higher Education within the State assignment to the FSRC «Crystallography and Photonics» RAS No. 007-GZ/Ch3363/26 (theoretical results).



**References**

- [1] Kravtsov YuA, Orlov YuI. Geometrical optics of inhomogeneous media. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1990. ISBN: 978-3-642-84033-3.
- [2] Born M, Wolf E. Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7<sup>th</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. ISBN: 978-0-521-64222-4.
- [3] Arnol'd VI. Singularities of smooth mappings. Russian Math Surveys 1968; 23(1): 1-43. DOI: 10.1070/RM1968v023n01ABEH001232.
- [4] Poston T, Stewart I. Catastrophe theory and its applications. London, San Francisco: Pitman, 1978.
- [5] Gilmore R. Catastrophe theory for scientists and engineers. New York: John Wiley & Sons Inc; 1981. ISBN: 978-0-471-05064-3.
- [6] Babich VM, Buldyrev VS. Asymptotic methods in short-wavelength diffraction theory. Oxford, UK: Alpha Science Intl Ltd; 2009. ISBN: 978-1-84265-232-9.
- [7] James GL. Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves. 3<sup>rd</sup> ed. London, UK: Peter Peregrinus Ltd; 1986. ISBN: 978-0-86341-062-8.
- [8] Vainberg BR. Asymptotic methods in equations of mathematical physics. New York, London: Gordon and Breach Science Publishers; 1989. ISBN: 978-2-88124-664-7.
- [9] Maslov VP. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Paris: Dunod; 1972.
- [10] Maslov VP. Operator methods [In Russian]. Moscow: "Nauka" Publisher; 1973.
- [11] Kharitonov SI, Volotovskiy SG, Khonina SN. Hybrid asymptotic method for analyzing caustics of optical elements in the axially symmetric case. Computer Optics 2017; 41(2): 175-182. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-175-182.
- [12] Soifer VA, ed. Methods for computer design of diffractive optical elements. New York: John Wiley & Sons; 2002. ISBN: 978-0-471-09533-0.
- [13] Marathay AS, McCalmont JF. On the usual approximation used in the Rayleigh–Sommerfeld diffraction theory. J Opt Soc Am A 2004; 21: 510-516.
- [14] Khonina SN, Ustinov AV, Kovalev AA, Volotovskiy SG. Propagation of the radially-limited vortical beam in a near zone. Part I. Calculation algorithms. Computer Optics 2010; 34(3): 315-329.
- [15] Luneburg RK. Mathematical theory of optics. Berkeley, CA: University of California Press, 1966.
- [16] Khonina SN, Ustinov AV, Kovalyov AA, Volotovskiy SG. Near-field propagation of vortex beams: models and computation algorithms. Optical Memory and Neural Networks (information optics) 2014; 23(2): 50-73. DOI: 10.3103/S1060992X14020027.

**Author's Information**

**Sergey Ivanovich Kharitonov** (b. 1961) leading researcher of Diffractive Optics laboratory in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University (presently, Samara National Research University). 1993 – defended his dissertation “Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation focuser”. 2010 – defended his doctoral thesis on “Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements”. Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of S.I. Kharitonov scientific papers includes 87 articles, 5 patents. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Sergey Gennadjevich Volotovskiy** (b. 1959) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI) on a specialty “Applied Mathematics”, works as the leading programmer in the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: software design, modeling of systems with diffractive optical elements. E-mail: [sv@smr.ru](mailto:sv@smr.ru).

**Svetlana Nikolaevna Khonina**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara National Research University. Main researcher of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru).

*Received March 05, 2019. The final version – March 29, 2019.*