

Теория связанных мод для резонансных дифракционных решёток с изменяющимся периодом

Д.А. Быков^{1,2}, Е.А. Безус^{1,2}, Л.Л. Досколович^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В работе предложена теория связанных мод для резонансных дифракционных решеток с изменяющимся периодом. Рассмотрены дифракционные структуры, у которых вектор обратной решетки – величина, обратно пропорциональная периоду, – линейно изменяется в направлении периодичности. Показано, что оптические свойства такой структуры существенно зависят от скорости изменения периода. На основе сравнения с результатами строгого численного моделирования в рамках метода Фурье-мод показана высокая точность предложенной теоретической модели. В частности, разработанная теория связанных мод описывает уширение резонансного пика и появление вторичных максимумов, вызванные ненулевой скоростью изменения периода. Полученные результаты могут найти применение при разработке линейно изменяющихся спектральных фильтров на основе резонансных дифракционных решеток с изменяющимися параметрами.

Ключевые слова: резонанс, дифракционная решётка, линейно изменяющийся фильтр, теория связанных мод.

Цитирование: Быков, Д.А. Теория связанных мод для резонансных дифракционных решёток с изменяющимся периодом / Д.А. Быков, Е.А. Безус, Л.Л. Досколович // Компьютерная оптика. – 2023. – Т. 47, № 3. – С. 341-349. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1232.

Citation: Bykov DA, Bezus EA, Doskolovich LL. Coupled-mode theory for resonant gratings with a varying period. Computer Optics 2023; 47(3): 341-349. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1232.

Введение

В последнее время большое внимание исследователей уделяется изучению резонансных оптических эффектов в структурах нанопотоники [1, 2]. Это вызвано как фундаментальным интересом, так и многочисленными потенциальными применениями таких структур в оптических фильтрах и спектрометрах, химических и биологических сенсорах, лазерных и фотогальванических устройствах и т. д. [1]. Одним из наиболее изученных типов резонансных структур фотоники являются дифракционные решётки. Несмотря на долгую историю [3–6], такие структуры продолжают являться предметом интенсивных исследований благодаря широкому спектру экстраординарных оптических эффектов, проявляющихся в условиях резонанса [7–9].

При исследовании оптических свойств структур фотоники большой интерес представляет теоретическое описание резонансных особенностей спектров отражения и пропускания, а также распределений электромагнитного поля. При теоретическом описании оптических свойств таких структур обычно исследуется профиль резонанса, который задаёт зависимость амплитуды рассеяния от частоты света. Теория связанных мод (англ. coupled-mode theory) предоставляет гибкий аналитический подход, позволяющий получить аналитическое выражение для профиля резонанса и тем самым описать оптические свойства

исследуемых резонансных структур. В известных исследованиях были разработаны различные формулировки теории связанных мод, позволяющие описать оптические свойства таких структур, как связанные волокна и волноводы [10–12], слоистые структуры, возбуждаемые плоской волной, [13–15], брэгговские зеркала в волноводах [10, 11], связанные резонаторы [10, 11], резонаторы, связанные с оптическими волокнами [16–18], резонансные дифракционные решётки [19, 20], изолированные объёмные резонаторы [21, 22]. Вместе с тем теория связанных мод не была разработана для резонансных дифракционных решеток с параметрами, изменяющимися в пространстве.

Резонансные дифракционные решетки с изменяющимися параметрами находят применение в качестве спектральных фильтров электромагнитного излучения [23–40]. При этом различные части структуры осуществляют фильтрацию различных длин волн. Одним из преимуществ таких решёток является то, что их толщина сравнима с длиной волны падающего излучения, поскольку они состоят только из одного (сама дифракционная решётка) или двух (решётка и волновод) слоев. Они также относительно просты в изготовлении, поскольку для их создания можно использовать простые и дешевые методы интерференционной литографии и ионно-лучевого травления с маской [23]. В дополнение к спектрометрическим приложениям решётки с пространственно изменяющимися параметрами также перспективны для ис-

пользования в качестве датчиков показателя преломления [30, 34], биосенсоров [36, 39] и датчиков крутящего момента [28].

Чаще всего в качестве изменяющегося параметра используется период дифракционной решётки [26–33]. В других работах изменяющимся параметром является толщина волноводного слоя [34, 35] или дифракционной решетки [24, 25]. В некоторых работах одновременно изменяются два параметра: период и толщина волноводного слоя [37–39] или период и высота решётки [40].

В настоящей работе предложена теория связанных мод для резонансных дифракционных решеток с волноводным слоем, период которых изменяется в направлении периодичности. Разработка такой теории важна для расчета компактных оптических фильтров на основе дифракционных решеток с изменяющимися параметрами. В частности, указанная теория позволит оценить спектральное разрешение таких фильтров и описать изменение формы резонанса, вызванное изменением периода. Наличие такого теоретического описания особенно важно в случаях, когда строгое численное моделирование резонансных дифракционных решеток с изменяющимися параметрами затруднено.

1. Резонансные дифракционные решётки с изменяющимся периодом

Геометрия исследуемой структуры представлена на рис. 1а. Структура состоит из бинарной дифракционной решётки высотой h_{gr} , расположенной на поверхности плоскопараллельного диэлектрического волновода толщиной h_{wg} . Период решётки $d(x)$ изменяется в направлении оси x . Хотя такая структура не является периодической, для удобства мы все же будем называть это направление направлением периодичности.

Прежде чем изучать оптические свойства структуры с переменным периодом, рассмотрим строго периодический случай, для которого $d(x) = d_0 = \text{const}$ (рис. 1б). Рассмотрим пример со следующими параметрами: период решётки $d_0 = 350$ нм, коэффициент заполнения (отношение ширины ступеньки к периоду решётки) $f = 0,5$, высота решётки $h_{gr} = 100$ нм, толщина волноводного слоя $h_{wg} = 200$ нм, показатель преломления решётки и подложки $n_{gr} = n_{sub} = 1,45$, показатель преломления волноводного слоя $n_{wg} = 2,1$, показатель преломления области над структурой $n_{sup} = 1$.

При нормальном падении ТМ-поляризованной плоской волны рассматриваемая структура имеет резонансный минимум пропускания на длине волны $\lambda = 688$ нм. На этой длине волны величины x -компонент волновых векторов ± 1 -го порядков дифракции близки к константам распространения волноводных мод плоскопараллельного слоя толщиной h_{wg} . Следовательно, резонанс возникает за счет возбуждения этой собственной моды. Отметим, что структуры с аналогичными резонансными оптическими свойствами

широко применяются в качестве узкополосных спектральных фильтров. Спектральное положение минимума пропускания изменяется практически линейно с изменением периода структуры. Это иллюстрирует рис. 2, показывающий спектры пропускания в зависимости от периода решётки d . Коэффициент пропускания был рассчитан на основе численного решения уравнений Максвелла с использованием метода фурье-мод (англ. rigorous coupled-wave analysis, RCWA) [41, 42].

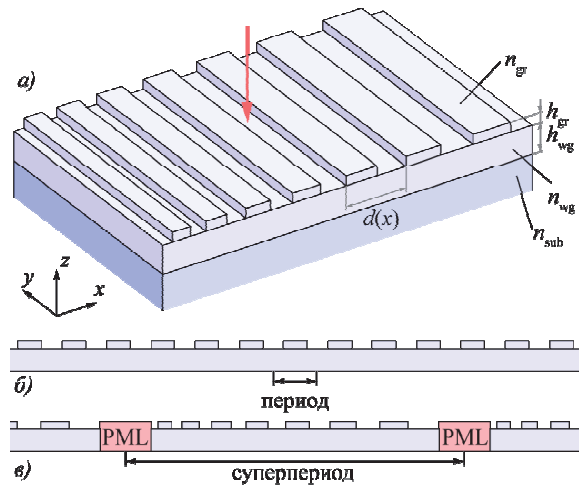


Рис. 1. (а) Геометрия рассматриваемой структуры с изменяющимся периодом. (б) Геометрия строго периодической решётки, используемой для локально-периодической аппроксимации. (в) Моделирование структуры с изменяющимся периодом на основе суперпериодов, разделенных идеально согласованными поглощающими слоями (PML)

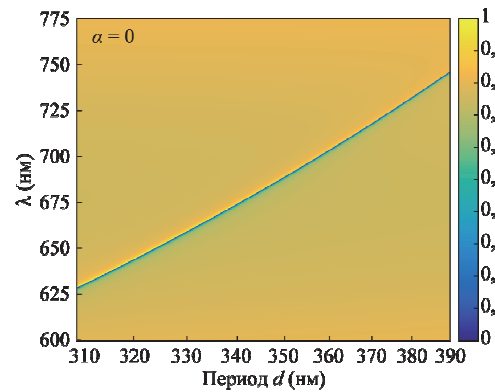


Рис. 2. Коэффициент пропускания строго периодической дифракционной решётки в зависимости от её периода и длины волны нормально падающей ТМ-поляризованной плоской волны, рассчитанный с использованием метода фурье-мод. График также можно рассматривать как распределение поля, прошедшего через структуру с переменным периодом на разных длинах волн, рассчитанные в рамках локально-периодической аппроксимации ($\alpha = 0$)

Для приложений в оптической фильтрации важны структуры с изменяющимся периодом (рис. 1а), обеспечивающие фильтрацию различных длин волн в различных пространственных положениях вдоль направ-

ления периодичности. В дальнейшем будем использовать следующий закон изменения периода:

$$\frac{1}{d(x)} = \frac{1}{d_0} - \frac{\alpha}{d_0^2} x, \quad (1)$$

где $d_0 = 690$ нм – центральный период, а величина α определяет скорость изменения периода. Заметим, что $d(x)$ в уравнении (1) – локальный период, который соответствует расстоянию между левыми границами двух соседних ступенек решётки (см. рис. 1а). При этом у решётки, описываемой законом изменения периода (1), происходит линейное изменение вектора обратной решётки $2\pi/d(x)$ в направлении периодичности. Отметим, что при законе изменения периода (1) рассмотренная в параграфе 3 теория связанных мод имеет наиболее простой вид.

Опишем геометрию структуры, локальный период которой изменяется согласно уравнению (1). Для этого определим диэлектрическую проницаемость внутри элементарной ячейки слоя решётки, используя следующую периодическую функцию:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} n_{gr}^2, & k < t \leq k + f; \\ n_{sup}^2, & k + f < t \leq k + 1; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z},$$

где f – коэффициент заполнения решётки. Тогда решётка с фиксированным периодом d_0 будет описываться функцией $\varepsilon(x/d_0)$. Теперь выберем аргумент $\varepsilon(t)$ в виде $\varepsilon(x/D(x))$ и найдем такую функцию $D(x)$, что локальный период структуры с переменным периодом будет описываться уравнением (1). Локальный период можно найти, анализируя, как быстро меняется аргумент функции ε , т. е. вычисляя производную от отношения $x/D(x)$, которая должна быть равна величине, обратной локальному периоду. Записав это условие, мы приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{D(x)} \right) = \frac{1}{d(x)}. \quad (2)$$

В качестве граничного условия будем использовать соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{D(x)} = 0,$$

означающее, что в точке $x=0$ диэлектрическая проницаемость структуры с изменяющимися параметрами и диэлектрическая проницаемость структуры с постоянными параметрами совпадают. Используя данное граничное условие и уравнение (1), получим следующее решение дифференциального уравнения (2):

$$D(x) = \frac{d_0}{1 - \alpha x / (2d_0)}. \quad (3)$$

Таким образом, в настоящем параграфе показано, что функция $\varepsilon(x/D(x))$ с величиной $D(x)$, заданной

уравнением (3), определяет геометрию структуры, локальный период которой $d(x)$ изменяется в соответствии с уравнением (1).

2. Численное моделирование

Определив геометрию решётки с изменяющимся периодом, перейдем теперь к исследованию её оптических свойств. При рассмотрении таких структур в качестве оптических фильтров обычно представляют интерес коэффициенты отражения и пропускания в разных точках структуры на различных длинах волн [23, 30, 31, 34, 38]. При достаточно малой скорости изменения периода α в каждой точке дифракционной решётки с изменяющимся периодом её можно заменить строго периодической решёткой, имеющей период, равный локальному периоду исследуемой структуры. В этом локально-периодическом приближении мы приходим к тому же рис. 1, на котором период d выступает в роли локального периода исследуемой структуры. Однако когда величина α имеет значение порядка 10^{-6} или больше, такое приближение перестает быть применимым и требуется более точное теоретическое описание. Чтобы продемонстрировать это, промоделируем численно структуру с изменяющимся периодом.

Как и в предыдущем параграфе, для моделирования мы использовали метод Фурье-мод [41, 42]. Однако, поскольку этот метод ориентирован на моделирование строго периодических дифракционных структур, для моделирования исследуемой структуры был использован т.н. метод суперпериода. В рамках данного подхода рассматривалась структура с изменяющимся периодом, состоящая из некоторого большого, но конечного числа периодов. Данная структура была «искусственно» периодизована вдоль оси x . Соседние «суперпериоды» были разделены идеально согласованными поглощающими слоями (англ. perfectly matched layers, PML) для устранения взаимодействия между ними (рис. 1б). Для оценки коэффициента пропускания структуры моделировалась дифракция нормально падающей плоской ТМ-поляризованной волны и вычислялось распределение прошедшего поля ($|H_y|^2/n_{sub}$) вдоль горизонтальной прямой, расположенной на расстоянии 500 нм под волноводным слоем структуры. Так как распределение поля рассчитывалось в области подложки, то полученные величины были нормированы на значение показателя преломления n_{sub} , что обеспечило выполнение закона сохранения энергии [41].

На рис. 3а представлены результаты моделирования (распределения прошедшего поля), полученные для длин волн из спектрального диапазона 600–775 нм и скорости изменения периода $\alpha = 10^{-3}$. Важно отметить, что даже при такой относительно малой скорости изменения периода распределения поля на рис. 3а существенно отличаются от результатов, предсказываемых в

рамках локально-периодической аппроксимации (рис. 2). В качестве дополнительной иллюстрации на рис. 4а представлено горизонтальное сечение рис. 3а при длине волны 690 нм, а также аналогичные зависимости, рассчитанные при еще меньших скоростях изменения периода: $\alpha = 0,5 \times 10^{-3}$ и $\alpha = 0,25 \times 10^{-3}$. Для сравнения на рис. 4б представлено горизонтальное сечение рис. 2.

Сравнение рис. 2 и 3а, а также рис. 4а и 4б показывает неприменимость локально-периодической аппроксимации для рассматриваемых значений

скоростей изменения периода решётки и обуславливает необходимость разработки более точного теоретического описания, приведенного в следующем параграфе. Отметим, что разработка такого описания важна также и потому, что строгое численное моделирование структур с меньшими скоростями изменения периода является затруднительным в связи с большими размерами суперпериода и, как следствие, крайне высокими требованиями к вычислительным ресурсам (времени и оперативной памяти), необходимым для расчета.

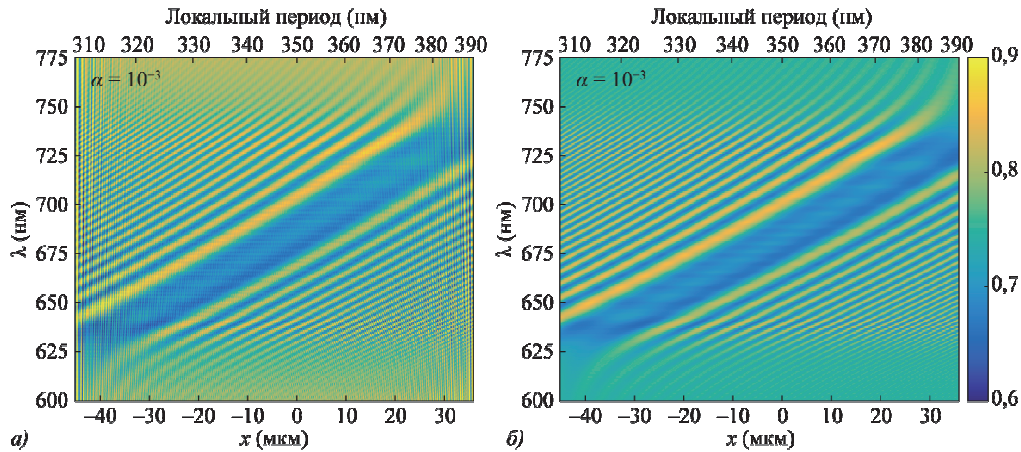


Рис. 3. Распределения прошедшего поля $|H_y|^2/n_{sub}$, рассчитанные для различных длин волн падающей ТМ-поляризованной плоской волны и разных положений вдоль структуры с помощью метода фурье-мод (а) и теории связанных мод (б). Цветовая карта для обоих распределений приведена справа

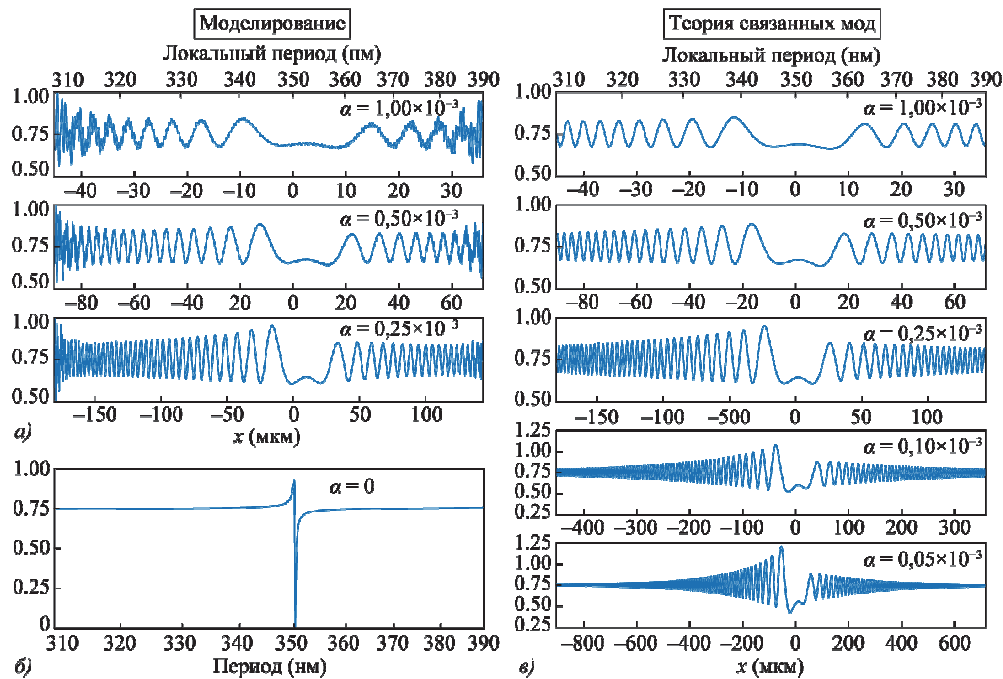


Рис. 4. Нормированные спектры поля, прошедшего через структуру при различных скоростях изменения периода: моделирование методом фурье-мод (а) и предсказания в рамках теории связанных мод (б). График (б) рассчитан в локально-периодическом приближении

3. Теория связанных мод

В настоящем параграфе предложена пространственно-временная теория связанных мод,

описывающая оптические свойства резонансной дифракционной решётки с изменяющимся периодом. Сначала рассматривается теория связанных мод для случая строго периодической дифракционной

решётки, а затем параметры полученных уравнений полагаются зависящими от пространственной переменной, что позволяет учесть ненулевую скорость изменения периода α .

3.1. Периодическая дифракционная решётка

Для описания оптических свойств симметричной дифракционной решётки с фиксированным периодом d_0 запишем теорию связанных мод в виде двух связанных однонаправленных волновых уравнений [20]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -v_g \frac{\partial u}{\partial x} + i(k_{\text{mode}} v_g - \omega_0)u - \gamma u + \kappa e^{2ik_{x,\text{gr}}x} v + \\ + q f(x, t) e^{ik_{x,\text{gr}}x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} = v_g \frac{\partial v}{\partial x} + i(k_{\text{mode}} v_g - \omega_0)v - \gamma v + \kappa e^{-2ik_{x,\text{gr}}x} u + \\ + q f(x, t) e^{ik_{x,\text{gr}}x}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь u и v обозначают комплексные амплитуды мод, распространяющихся внутри волноводного слоя в положительном и отрицательном направлениях оси x соответственно. Законы дисперсии этих мод предполагаются линейными вблизи частоты ω_0 и определяются групповой скоростью v_g и значением константы распространения моды k_{mode} на указанной частоте.

Коэффициенты связи γ , κ и q описывают следующие процессы рассеяния света: вытекание моды описывается действительным коэффициентом γ ; связь между модами u и v описывается комплексным коэффициентом κ ; возбуждение моды падающим полем $f(x, t)$ описывается комплексным коэффициентом связи q [20]. Отметим, что связь между модами и возбуждение мод происходят за счет дифракции света в один из дифракционных порядков решётки. В настоящей работе рассматриваются структуры, в которых моды возбуждаются ± 1 -ми порядками дифракции. В этом случае соответствующие фазовые множители в уравнении (4) задаются экспонентами с показателями, содержащими величину [11, 20]

$$k_{x,\text{gr}} = \frac{2\pi}{d_0}.$$

Собственные моды возбуждаются нормально падающей плоской волной с частотой ω_0 , когда константа распространения моды на этой частоте совпадает с тангенциальной компонентой волнового вектора первого порядка дифракции: $k_{x,\text{gr}} = k_{\text{mode}}$.

Комплексную амплитуду прошедшего поля можно записать как [20]

$$f_T(x, t) = t_0 f(x, t) + q_i \left(u(x, t) e^{-ik_{x,\text{gr}}x} + v(x, t) e^{ik_{x,\text{gr}}x} \right), \quad (5)$$

где первый член описывает нерезонансное рассеяние, а остальные члены описывают резонансный вклад, обусловленный вытеканием мод u и v из волновода.

Таким образом, коэффициент t_0 можно назвать нерезонансным коэффициентом пропускания, а q_i – коэффициентом вытекания моды. Аналогичное уравнение, которое для краткости здесь не приводится, можно записать для отражённого поля.

В представленных уравнениях связанных мод мы рассмотрели периодическую структуру с плоскостью симметрии $x=0$. Для дальнейшего анализа также будет интересно рассмотреть симметричную решётку, сдвинутую на расстояние Δ вдоль оси x . Уравнения связанных мод для такой структуры можно получить, формально заменив x на $x+\Delta$ в показателях экспонент в уравнениях (4) и (5).

3.2. Дифракционная решётка с изменяющимся периодом

Как было отмечено в параграфе 1, диэлектрическая проницаемость структуры с переменным периодом определяется выражением $\varepsilon(x/D(x))$. Рассмотрим диэлектрическую проницаемость в окрестности точки $x=x_0$ и заменим аргумент функции ε первыми двумя членами его разложения в ряд Тейлора:

$$\varepsilon\left(\frac{x}{D(x)}\right) \approx \varepsilon\left(\frac{x-\Delta(x_0)}{d(x_0)}\right),$$

где $\Delta(x_0) = x_0 d(x_0)/D(x_0) - x_0$, что следует из уравнения (2). Полученное уравнение означает, что мы можем локально аппроксимировать структуру с изменяющимся периодом структурой с фиксированным периодом, имеющей период, равный локальному периоду $d(x_0)$, и сдвинутой на расстояние $\Delta(x_0)$. Формально заменив x на $x+\Delta$ в уравнениях (4) и (5), можно увидеть, что это смещение может быть учтено в уравнениях (4) и (5) путем переопределения величины $k_{x,\text{gr}}$ в виде

$$k_{x,\text{gr}}(x) = \frac{2\pi}{D(x)}. \quad (6)$$

Это означает, что локальная аппроксимация решётки с изменяющимся периодом в точке $x=x_0$ решёткой с фиксированным периодом $d(x_0)$, сдвинутой на $\Delta(x_0)$, формально эквивалентна аппроксимации несмещённой решёткой с фиксированным периодом $D(x_0)$.

Отметим, что в «стандартной» локально-периодической аппроксимации (см. рис. 2) для расчета локального коэффициента пропускания используется строго периодическая решётка, локально аппроксимирующая структуру с переменным периодом. В рамках же подхода, обсуждаемого в настоящем параграфе, локальный коэффициент пропускания не рассчитывается, а аппроксимация структуры с переменным периодом строго периодическими структурами применяется для получения теории связанных мод с пространственно меняющимися параметрами. Как будет показано ниже,

этот подход гораздо точнее и позволяет описать влияние скорости изменения периода на форму резонанса. Следует также отметить, что в случае структуры с изменяющимся периодом все остальные параметры ($k_{mode}, v_g, \omega_0, \gamma, \kappa, q, q_t, r_0$) в уравнениях связанных мод (4) и (6) также становятся функциями пространственной координаты x . Однако в дальнейшем мы будем учитывать только зависимость $k_{x,gr}$ от x [уравнение (7)], которая, как показывают результаты расчета, оказывает наибольшее влияние на оптические свойства решётки, тогда как остальные параметры можно считать постоянными. В результате зависимость от переменной x появится лишь в показателях экспонент в уравнении (4).

Чтобы записать теорию связанных мод для структуры с изменяющимся периодом, предположим, что падающий свет представляет собой монохроматическую плоскую волну с единичной амплитудой, нормально падающую на решётку: $f(x, t) = e^{-i\omega t}$. В этом случае амплитуды мод u и v также будут зависеть от времени как $e^{-i\omega t}$. Поэтому мы можем переписать систему уравнений (4) и (6) в терминах функций $\tilde{u}(x) = u(x, t)e^{-ik_{x,gr}(x)x}e^{i\omega t}$ и $\tilde{v}(x) = v(x, t)e^{ik_{x,gr}(x)x}e^{i\omega t}$, зависящих только от пространственной координаты x :

$$\begin{cases} -i\omega\tilde{u} = v_g \left[-\frac{d\tilde{u}}{dx} - i\tilde{u} \frac{dxk_{x,gr}(x)}{dx} + ik_{x,gr}(0)\tilde{u} \right] - \\ -i\omega_0\tilde{u} - \gamma\tilde{u} + \kappa\tilde{v} + q; \\ -i\omega\tilde{v} = v_g \left[\frac{d\tilde{v}}{dx} - i\tilde{v} \frac{dxk_{x,gr}(x)}{dx} + ik_{x,gr}(0)\tilde{v} \right] - \\ -i\omega_0\tilde{v} - \gamma\tilde{v} + \kappa\tilde{u} + q; \\ \tilde{f}_T(x, \omega) = t_0 + q_t(\tilde{u} + \tilde{v}). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\tilde{f}_T = f_T e^{i\omega t}$ задаёт распределение прошедшего поля в точке x дифракционной решётки с изменяющимся периодом при угловой частоте падающего света, равной ω . Отметим, что при получении уравнения (7) величина k_{mode} была заменена на $k_{x,gr}(0)$, что означает, что на частоте ω_0 условие возбуждения моды выполняется в точке $x=0$.

Из формул (2) и (6) следует, что $d[xk_{x,gr}(x)]/dx = 2\pi/d(x)$ и $k_{x,gr}(0) = 2\pi/d(0)$. Следовательно, уравнение (7) может быть переписано в виде

$$\begin{cases} v_g \frac{d\tilde{u}}{dx} = \left[i(\omega - \omega_0) - \gamma + 2\pi i v_g \left(\frac{1}{d(0)} - \frac{1}{d(x)} \right) \right] \tilde{u} + \\ + \kappa\tilde{v} + q; \\ -v_g \frac{d\tilde{v}}{dx} = \left[i(\omega - \omega_0) - \gamma + 2\pi i v_g \left(\frac{1}{d(0)} - \frac{1}{d(x)} \right) \right] \tilde{v} + \\ + \kappa\tilde{u} + q; \\ \tilde{f}_T(x, \omega) = t_0 + q_t(\tilde{u} + \tilde{v}). \end{cases} \quad (8)$$

Полученная система уравнений (8) представляет собой теорию связанных мод для резонансных дифракционных решёток с изменяющимся периодом. Важно отметить, что данные уравнения справедливы для произвольного закона изменения локального периода $d(x)$. В случае же, когда локальный период изменяется в соответствии с уравнением (1), система (9) принимает вид

$$\begin{cases} v_g \frac{d\tilde{u}}{dx} = \left[i(\omega - \omega_0) - \gamma + i\alpha \frac{2\pi v_g}{d_0^2} x \right] \tilde{u} + \kappa\tilde{v} + q; \\ -v_g \frac{d\tilde{v}}{dx} = \left[i(\omega - \omega_0) - \gamma + i\alpha \frac{2\pi v_g}{d_0^2} x \right] \tilde{v} + \kappa\tilde{u} + q; \\ \tilde{f}_T(x, \omega) = t_0 + q_t(\tilde{u} + \tilde{v}). \end{cases} \quad (9)$$

3.3. Результаты моделирования

Для проверки разработанной теории связанных мод система уравнений (9) была численно решена для решёток с изменяющимся периодом, рассмотренных выше. В расчетах использовались следующие значения параметров модели:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2,741 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}; \\ \gamma &= 4,949 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}; \\ \kappa + \gamma &= 3,022 \cdot 10^{12} i \text{ c}^{-1}; \\ v_g &= 1,122 \cdot 10^{17} \text{ нм/с}; \\ q \cdot q_t &= (-1,584 + 4,507i) \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}; \\ t_0 &= 0,6174 - 0,6064i. \end{aligned}$$

Важно отметить, что все представленные параметры были рассчитаны на основе анализа лишь строго периодической дифракционной решётки (в рассматриваемом примере – решётки с периодом $d_0 = 350$ нм). В частности, указанные значения коэффициентов ω_0, γ и κ были найдены вычислением комплексных частот собственных мод периодической решётки [43, 44]; остальные параметры (v_g, q, q_t, r_0) рассчитывались аналогичным образом [20].

Чтобы решить систему уравнений (9) численно, необходимо задать граничные условия. При решении использовались следующие граничные условия:

$$\begin{cases} u(X_L) = 0; \\ v(X_R) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

аналогичные поглощающим слоям (PML), использованным при строгом численном моделировании с помощью метода фурье-мод. Действительно, согласно уравнениям (10), на левой границе структуры (при $x = X_L$) мода, распространяющаяся вправо, отсутствует. Поэтому мода v , распространяющаяся влево, не отражается на этой границе. Точно так же правая граница структуры ($x = X_R$) не излучает моды, распространяющиеся влево.

Распределения прошедшего поля, рассчитанные с использованием разработанной теории связанных мод (уравнения (9) с граничными условиями (10)), представлены на рис. 3б и 4в. Из рисунков видно, что предсказания, полученные на основе теории связанных мод, хорошо согласуются с результатами строгого численного моделирования на основе метода фурье-мод. Отметим, что некоторые различия между численными и теоретическими результатами возникают вблизи границ моделируемой области (рис. 3) и наиболее выражены при $x < -40$ мкм и при $x > 30$ мкм. Данные отличия обусловлены конечным числом фурье-гармоник, использованных при моделировании в рамках метода фурье-мод. Тем не менее рис. 3 и 4 показывают, что разработанная теория связанных мод позволяет учесть ненулевую скорость изменения периода и точно описать как уширение резонанса, так и появление вторичных максимумов в окрестности резонанса. Отметим также, что применение теории связанных мод позволило рассчитать распределения прошедшего поля при весьма малых скоростях изменения периода ($\alpha = 0,1 \times 10^{-3}$ и $\alpha = 0,05 \times 10^{-3}$ на рис. 4в). Моделирование таких структур в рамках метода фурье-мод на имеющемся в распоряжении авторов вычислительном оборудовании невозможно ввиду крайне высоких требований к вычислительным ресурсам. В то же время расчёт оптических свойств дифракционных решёток с малыми скоростями изменения периода представляет интерес, поскольку позволяет пронаблюдать сходимость при $\alpha \rightarrow 0$ распределения поля (рис. 4в) к предельному случаю, описываемому профилем Фано (рис. 4б).

Заклучение

В настоящей работе исследованы оптические свойства резонансных волноводных дифракционных решёток с изменяющимся периодом. На основе метода фурье-мод решения уравнений Максвелла показано, что при скоростях изменения периода порядка $10^{-3} \div 10^{-4}$ локально-периодическое приближение, обычно используемое для описания оптических свойств таких структур, становится неприменимым. При указанных скоростях изменения периода форма резонансного пика существенно отличается от профиля Фано, при этом возникают множественные вторичные максимумы. Чтобы получить точное количественное описание, была разработана пространственно-временная теория связанных мод для решёток с изменяющимся периодом. Разработанная модель не требует подбора каких-либо параметров, так как их значения определяются путем анализа свойств строго периодической резонансной дифракционной решётки. При всех рассмотренных скоростях изменения периода предсказания полученной модели хорошо согласуются с результатами строгого численного моделирования.

По мнению авторов, представленные результаты важны для создания компактных линейных изменя-

ющихся фильтров (англ. linear variable filters, LVF) на основе резонансных дифракционных решёток с изменяющимся периодом. В частности, представленную теорию связанных мод можно использовать для оценки достижимого спектрального разрешения таких фильтров. В связи с этим важно отметить, что расчет спектров пропускания в рамках полученной теории связанных мод происходит на несколько порядков быстрее, чем с использованием строгого электромагнитного моделирования. В частности, вычисление данных для рис. 3а с использованием метода фурье-мод заняло около одного часа, в то время как расчёт на основе теории связанных мод (рис. 3б) занимает не более минуты. В то же время видно, что модель описывает основные эффекты, происходящие в структурах с изменяющимся периодом, такие как появление вторичных максимумов прошедшего поля, их величину и расстояние между ними вдоль направления периодичности.

Аналитическое или полуаналитическое исследование уравнений полученной модели связанных мод позволит оценить ширину линии резонанса и её форму. На наш взгляд, представленные результаты могут быть распространены и на другие резонансные (квази)периодические структуры с пространственно-изменяющимися параметрами, например, на дифракционные решётки с изменяющейся толщиной волноводного слоя, а также на структуры, у которых одновременно изменяются несколько геометрических параметров. Это будет являться предметом дальнейших исследований.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-12-00120) в части разработки теории связанных мод и исследования дифракционных решёток с изменяющимся периодом и Министерства науки и высшего образования в рамках Государственного задания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части разработки программных средств для численного моделирования строго периодических дифракционных решёток.

References

- [1] Zhou W, Zhao D, Shuai Y-C, Yang H, Chuwongin S, Chadha A, Seo J-H, Wang KX, Liu V, Ma Z, Fan S. Progress in 2D photonic crystal Fano resonance photonics. Prog Quantum Electron 2014; 38(1): 1-74. DOI: 10.1016/j.pquantelec.2014.01.001.
- [2] Miroshnichenko AE, Flach S, Kivshar YS. Fano resonances in nanoscale structures. Rev Mod Phys 2010; 82(3): 2257. DOI: 10.1103/RevModPhys.82.2257.
- [3] Wood RW. On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum. Proc Phys Soc Lond 1902; 18(1): 269. DOI: 10.1088/1478-7814/18/1/325.
- [4] Lord Rayleigh. On the dynamical theory of gratings. Proc Math Phys Eng Sci 1907; 79(532): 399-416. DOI: 10.1098/rspa.1907.0051.

- [5] Fano U. The theory of anomalous diffraction gratings and of quasi-stationary waves on metallic surfaces (Sommerfeld's waves). *J Opt Soc Am* 1941; 31(3): 213-222. DOI: 10.1364/JOSA.31.000213.
- [6] Hessel A, Oliner AA. A new theory of Wood's anomalies on optical gratings. *Appl Opt* 1965; 4(10): 1275-1297. DOI: 10.1364/AO.4.001275.
- [7] Collin S. Nanostructure arrays in free-space: optical properties and applications. *Rep Prog Phys* 2014; 77(12): 126402. DOI: 10.1088/0034-4885/77/12/126402.
- [8] Qiao P, Yang W, Chang-Hasnain CJ. Recent advances in high-contrast metastructures, metasurfaces, and photonic crystals. *Adv Opt Photonics* 2018; 10(1): 180-245. DOI: 10.1364/AOP.10.000180.
- [9] Quaranta G, Basset G, Martin OJ, Gallinet B. Recent advances in resonant waveguide gratings. *Laser Photon Rev* 2018; 12(9): 1800017. DOI: 10.1002/lpor.201800017.
- [10] Haus HA. Waves and fields in optoelectronics. Englewood Cliffs: Prentice Hall; 1984. ISBN: 978-0-13-946053-1.
- [11] Haus H, Huang W. Coupled-mode theory. *Proc IEEE* 1991; 79(10): 1505-1518. DOI: 10.1109/5.104225.
- [12] Snyder AW. Coupled-mode theory for optical fibers. *J Opt Soc Am* 1972; 62(11): 1267-1277. DOI: 10.1364/JOSA.62.001267.
- [13] Nesterenko DV, Hayashi S, Sekkat Z. Asymmetric surface plasmon resonances revisited as Fano resonances. *Phys Rev B* 2018; 97(23): 235437. DOI: 10.1103/PhysRevB.97.235437.
- [14] Nesterenko DV. Resonance characteristics of transmissive optical filters based on metal/dielectric/metal structures. *Computer Optics* 2020; 44(2): 219-228. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-681.
- [15] Nesterenko DV, Hayashi S, Soifer V. Ab initio spatial coupled-mode theory of Fano resonances in optical responses of multilayer interference resonators. *Phys Rev A* 2022; 106(2): 023507. DOI: 10.1103/PhysRevA.106.023507.
- [16] Manolatu C, Khan M, Fan S, Villeneuve PR, Haus H, Joannopoulos J. Coupling of modes analysis of resonant channel add-drop filters. *IEEE J Quantum Electron* 1999; 35(9): 1322-1331. DOI: 10.1109/3.784592.
- [17] Suh W, Wang Z, Fan S. Temporal coupled-mode theory and the presence of non-orthogonal modes in lossless multimode cavities. *IEEE J Quantum Electron* 2004; 40(10): 1511-1518. DOI: 10.1109/JQE.2004.834773.
- [18] Waks E, Vuckovic J. Coupled mode theory for photonic crystal cavity-waveguide interaction. *Opt Express* 2005; 13(13): 5064-5073. DOI: 10.1364/OPEX.13.005064.
- [19] Fan S, Suh W, Joannopoulos JD. Temporal coupled-mode theory for the Fano resonance in optical resonators. *J Opt Soc Am A* 2003; 20(3): 569-572. DOI: 10.1364/JOSAA.20.000569.
- [20] Bykov DA, Doskolovich LL. Spatiotemporal coupled-mode theory of guided-mode resonant gratings. *Opt Express* 2015; 23(15): 19234-19241. DOI: 10.1364/OE.23.019234.
- [21] Ruan Z, Fan S. Temporal coupled-mode theory for light scattering by an arbitrarily shaped object supporting a single resonance. *Phys Rev A* 2012; 85(4): 043828. DOI: 10.1103/PhysRevA.85.043828.
- [22] Verslegers L, Yu Z, Catrysse PB, Fan S. Temporal coupled-mode theory for resonant apertures. *J Opt Soc Am B* 2010; 27(10): 1947-1956. DOI: 10.1364/JOSAB.27.001947.
- [23] Qian L, Zhang D, Tao C, Hong R, Zhuang S. Tunable guided-mode resonant filter with wedged waveguide layer fabricated by masked ion beam etching. *Opt Lett* 2016; 41(5): 982-985. DOI: 10.1364/OL.41.000982.
- [24] Dobbs DW, Gershkovich I, Cunningham BT. Fabrication of a graded-wavelength guided-mode resonance filter photonic crystal. *Appl Phys Lett* 2006; 89(12): 123113. DOI: 10.1063/1.2356695.
- [25] Ganesh N, Xiang A, Beltran NB, Dobbs DW, Cunningham BT. Compact wavelength detection system incorporating a guided-mode resonance filter. *Appl Phys Lett* 2007; 90(8): 081103. DOI: 10.1063/1.2591342.
- [26] Hsu H-Y, Lan Y-H, Huang C-S. A gradient grating period guided-mode resonance spectrometer. *IEEE Photon J* 2018; 10(1): 4500109. DOI: 10.1109/JPHOT.2018.2793894.
- [27] Sheng B, Luo L, Huang Y, Chen G, Zhou H, Zhang D, Zhuang S. Tailorable elastomeric grating with tunable groove density gradient. *IEEE Photon J* 2017; 9(5): 2400406. DOI: 10.1109/JPHOT.2017.2730851.
- [28] Wang Y-C, Jang W-Y, Huang C-S. Lightweight torque sensor based on a gradient grating period guided-mode resonance filter. *IEEE Sens J* 2019; 19(16): 6610-6617. DOI: 10.1109/JSEN.2019.2911982.
- [29] Lin HA, Hsu H-Y, Chang CW, Huang C-S. Compact spectrometer system based on a gradient grating period guided-mode resonance filter. *Opt Express* 2016; 24(10): 10972-10979. DOI: 10.1364/OE.24.010972.
- [30] Hsiung CT, Huang C-S. Refractive index sensor based on a gradient grating period guided-mode resonance. *IEEE Photon Technol Lett* 2019; 31(3): 253-256. DOI: 10.1109/LPT.2019.2890873.
- [31] Chang C-W, Chen S-T, Lin Y-C, Huang C-S. Resonant wavelength shift detection system based on a gradient grating period guided-mode resonance. *IEEE Photon J* 2018; 10(4): 6803010. DOI: 10.1109/JPHOT.2018.2857505.
- [32] Lin H, Huang C. Linear variable filter based on a gradient grating period guided-mode resonance filter. *IEEE Photon Technol Lett* 2016; 28(9): 1042-1045. DOI: 10.1109/LPT.2016.2524655.
- [33] Brückner F, Kroker S, Friedrich D, Kley E-B, Tünnermann A. Widely tunable monolithic narrowband grating filter for near-infrared radiation. *Opt Lett* 2011; 36(4): 436-438. DOI: 10.1364/OL.36.000436.
- [34] Hsiung CT, Huang C-S. Refractive index sensor based on gradient waveguide thickness guided-mode resonance filter. *IEEE Sens Lett* 2018; 2(4): 5001104. DOI: 10.1109/LESENS.2018.2883471.
- [35] Yang J-M, Yang N-Z, Chen C-H, Huang C-S. Gradient waveguide thickness guided-mode resonance biosensor. *Sensors* 2021; 21(2): 376. DOI: 10.3390/s21020376.
- [36] Triggs GJ, Wang Y, Reardon CP, Fischer M, Evans GJO, Krauss TF. Chirped guided-mode resonance biosensor. *Optica* 2017; 4(2): 229-234. DOI: 10.1364/OPTICA.4.000229.
- [37] Qian L, Wang K, Wu G, Zhu L, Han C, Yan C. Non-homogeneous composite GMR structure to realize increased filtering range. *Opt Express* 2018; 26(18): 23602-23612. DOI: 10.1364/OE.26.023602.
- [38] Hung Y-J, Kao C-W, Kao T-C, Huang C-W, Lin J-J, Yin C-C. Optical spectrometer based on continuously-chirped guided mode resonance filter. *Opt Express* 2018; 26(21): 27515-27527. DOI: 10.1364/OE.26.027515.
- [39] Yang N-Z, Hsiung C-T, Huang C-S. Biosensor based on two-dimensional gradient guided-mode resonance filter. *Opt Express* 2021; 29(2): 1320-1332. DOI: 10.1364/OE.408597.
- [40] Fang C, Dai B, Li Z, Zahid A, Wang Q, Sheng B, Zhang D. Tunable guided-mode resonance filter with a gradient

- grating period fabricated by casting a stretched PDMS grating wedge. *Opt Lett* 2016; 41(22): 5302-5305. DOI: 10.1364/OL.41.005302.
- [41] Moharam MG, Grann EB, Pommet DA, Gaylord TK. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J Opt Soc Am A* 1995; 12(5): 1068-1076. DOI: 10.1364/JOSAA.12.001068.
- [42] Li L. Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings. *J Opt Soc Am A* 1996; 13(5): 1024-1035. DOI: 10.1364/JOSAA.13.001024.
- [43] Tikhodeev SG, Yablonskii AL, Mujařov EA, Gippius NA, Ishihara T. Quasiguidded modes and optical properties of photonic crystal slabs. *Phys Rev B* 2002; 66(4): 045102. DOI: 10.1103/PhysRevB.66.045102.
- [44] Bykov DA, Doskolovich LL. Numerical methods for calculating poles of the scattering matrix with applications in grating theory. *J Light Technol* 2013; 31(5): 793-801. DOI: 10.1109/JLT.2012.2234723.

Сведения об авторах

Быков Дмитрий Александрович, в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика и информатика». Доктор физико-математических наук (2017 г.), старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и доцент Самарского университета. Области научных интересов: оптика резонансных дифракционных структур, электромагнитная теория дифракции, неизображающая оптика. E-mail: bykovd@gmail.com.

Безус Евгений Анатольевич в 2009 году с отличием окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладная математика и информатика». Кандидат физико-математических наук (2012 г.), научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета. Области научных интересов: нанопотоника, плазмоника, электромагнитная теория дифракции. E-mail: evgeni.bezus@gmail.com.

Досколович Леонид Леонидович, в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне — Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, главный научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) — филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета и ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли Самарского университета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанопотоники. E-mail: leonid@ipsiras.ru.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 30 сентября 2022 г. Окончательный вариант – 16 декабря 2022 г.

Coupled-mode theory for resonant gratings with a varying period

D.A. Bykov^{1,2}, E.A. Bezus^{1,2}, L.L. Doskolovich^{1,2}

¹ IPISI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

² Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

We propose a coupled-mode theory for resonant diffraction gratings with a varying period. We consider diffractive structures, in which the reciprocal lattice vector, a quantity inversely proportional to the period, varies linearly in the direction of periodicity. It is shown that optical properties of such a structure essentially depend on the period change rate. On the basis of a comparison with the results of rigorous numerical simulations using the rigorous coupled-wave analysis, high accuracy of the proposed theoretical model is demonstrated. In particular, the developed coupled-mode theory describes the broadening of the resonant peak and the appearance of secondary maxima caused by a non-zero period change rate. The obtained results can be used for the development of linear variable filters based on resonant diffraction gratings with varying parameters.

Keywords: resonance, grating, linearly varying filter, coupled-mode theory.

Citation: Bykov DA, Bezus EA, Doskolovich LL. Coupled-mode theory for resonant gratings with a varying period. *Computer Optics* 2023; 47(3): 341-349. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1232.

Acknowledgements: This work was funded by the Russian Science Foundation under project No. 22-12-00120 (development of the coupled-mode theory and investigation of varying-period gratings) and the Ministry of Science and Higher Education under a government project of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (development of the numerical simulation software).

Authors' information

Dmitry Alexandrovich Bykov graduated with honors (2009) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Doctor of Physics and Mathematics (2017). Senior researcher at the Samara University and at the Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include optics of resonant diffractive structures, electromagnetic diffraction theory, and nonimaging optics. E-mail: bykovd@gmail.com.

Evgeni Anatolievich Bezus graduated with honors (2009) from the Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (SSAU), majoring in Applied Mathematics and Computer Science. Candidate in Physics and Mathematics (2012). Currently he is a researcher at the Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute (IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics RAS”) and an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara University. His current research interests include nanophotonics, plasmonics and electromagnetic diffraction theory. E-mail: evgeni.bezus@gmail.com.

Leonid Leonidovich Doskolovich graduated with honors (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara State Aerospace University. Main researcher of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, professor at Technical Cybernetics department of National Research University, senior researcher at the Breakthrough Technologies for Earth’s Remote Sensing laboratory at SSAU. His leading research interests include diffractive optics, laser information technologies, nanophotonics. E-mail: leonid@ipsiras.ru.

Received September 30, 2022. The final version – December 16, 2022.
