

## Топологический заряд суперпозиции оптических вихрей, описываемой геометрической прогрессией

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В работе рассмотрены осевые суперпозиции Гауссовых оптических вихрей, которые описываются геометрической прогрессией. Для всех вариантов рассмотренных суперпозиций получен топологический заряд. В начальной плоскости топологический заряд может быть целым или полуцелым, а при распространении светового поля в свободном пространстве топологический заряд всегда остается целым. В общем случае геометрическая прогрессия оптических вихрей имеет три целочисленных параметра и один действительный параметр. От величины этих четырех параметров зависит топологический заряд всей суперпозиции оптических вихрей. При распространении в пространстве суперпозиция оптических вихрей, описываемая геометрической прогрессией, не сохраняет своей структуры интенсивности, но может иметь число лепестков интенсивности, равное одному из параметров семейства. Если действительный параметр геометрической прогрессии оптических вихрей равен единице, то все угловые гармоники в суперпозиции имеют одинаковый вес. В этом случае топологический заряд суперпозиции равен номеру средней угловой гармоники в прогрессии, то есть если первая угловая гармоника в прогрессии имеет топологический заряд  $k$ , а последняя –  $n$ , то топологический заряд всей суперпозиции в начальной плоскости будет равен  $(n+k)/2$ , а при распространении топологический заряд будет равен  $n$ .

**Ключевые слова:** оптический вихрь, суперпозиция, геометрическая прогрессия, топологический заряд.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Топологический заряд суперпозиции оптических вихрей, описываемой геометрической прогрессией / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 6. – С. 864-871. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1152.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of a superposition of optical vortices described by a geometric sequence. Computer Optics 2022; 46(6): 864-871. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1152.

### Введение

Оптические вихри активно исследуются в настоящее время. Например, в [1] экспериментально исследовались цилиндрические векторные пространственно-временные оптические вихри. В [2] предложена оптическая схема для генерации 2D-решетки оптических вихрей. В [3] экспериментально создана 3D-решетка оптических вихрей. В [4] сделан обзор по применению оптических вихрей для захвата и вращения микрочастиц. В [5] рассматриваются оптические вихри в нанофотонике. Оптические вихри в структурированных волноводах исследуются в [6]. В [7] исследуется искажение оптических вихрей и показано, что оптические вихри почти не чувствительны к искажениям.

У большинства хорошо известных оптических вихрей нормированный на мощность пучка орбитальный угловой момент (ОУМ) и топологический заряд (ТЗ) имеют одинаковое значение. Это применимо к пучкам Лагерра–Гаусса [8], модам Бесселя [9] и пучкам Бесселя–Гаусса [10], Гауссовым оптическим вихрям [11], гипергеометрическим модам [12] и пучкам [13], круговым пучкам [14], эллиптическим пуч-

кам [15] и многим другим известным вихревым пучкам. У пучков без цилиндрической симметрии, например у асимметричных пучков Бесселя [16] и у вихревых мод Эрмита–Гаусса [17], ОУМ и ТЗ имеют разное значение.

У осевых суперпозиций оптических вихрей ТЗ и нормированный ОУМ также могут различаться [18]. ОУМ может быть как целым, так и дробным числом [18] и при распространении сохраняется. Если ТЗ является в начальной плоскости дробным числом, то при распространении он становится целым, но неопределенным [19], так как «непонятно», как округлять дробное число: с недостатком или с избытком. При этом если у одиночного Гауссова оптического вихря в начальной плоскости был полуцелый оптический заряд, например,  $n+1/2$ , то при распространении ТЗ будет целым, но не определенным, так как на разном расстоянии от оптической оси ТЗ будет равен  $n$  или  $n+1$ . В случае осевой суперпозиции двух Гауссовых оптических вихрей  $n$ -го и  $m$ -го порядка, если ТЗ в начальной плоскости полуцелый  $((n+m)/2)$ , то при распространении такого оптического вихря ТЗ становится целым, равным  $\max(n, m)$ , и далее сохраняется [18].

В данной работе рассмотрены несколько вариантов осевых суперпозиций Гауссовых оптических вихрей, комплексная амплитуда которых имеет вид геометрической прогрессии (конечной или бесконечной) или биннома Ньютона. При этом ТЗ составляющих пучков составляют арифметическую прогрессию. Показано, что у таких суперпозиций ТЗ может быть в начальной плоскости либо целым, либо полуцелым. При распространении в свободном пространстве ТЗ может быть только целым и сохраняется. В общем случае геометрическая прогрессия оптических вихрей (ГПОВ) представляет собой четырехпараметрическое семейство лазерных пучков, из которых три целых параметра ( $k, n, m$ ) и один действительный параметр ( $a$ ). Топологические заряды составляющих вихрей равны  $km, (k+1)m, \dots, nm$ . Параметр  $a$  определяет амплитуды вихрей, которые равны соответственно  $a^k, a^{k+1}, \dots, a^n$ . Топологический заряд ГПОВ в начальной плоскости зависит от всех четырех параметров, а при распространении в свободном пространстве ТЗ равен ТЗ того Гауссова оптического вихря, у которого будет больший весовой коэффициент в суперпозиции.

### 1. Геометрическая прогрессия из оптических вихрей в начальной плоскости

Рассмотрим соосную суперпозицию Гауссовых оптических вихрей. Пусть комплексная амплитуда этой суперпозиции подчиняется закону геометрической прогрессии, а ТЗ составляющих вихрей соответственно описываются арифметической прогрессией. Тогда комплексная амплитуда такой суперпозиции в начальной плоскости будет иметь вид:

$$E_{in}(r, z) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left(\frac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}\right). \quad (1)$$

Преобразуем (1) так, чтобы явно выделить аргумент комплексного числа (фазу поля (1)):

$$E_n(r, z) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (1 + e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{in\varphi}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right). \quad (2)$$

Из (2) видно, что аргумент (фаза) суперпозиции (1) равен  $(n\varphi)/2$ , поэтому топологический заряд  $TC$  оптического вихря (1) будет равен:

$$TC = n/2. \quad (3)$$

Известно, что орбитальный угловой момент (ОУМ)  $J_z$  параксиального пучка, нормированный на его мощность  $W$ , равен [18]

$$J_z = \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) \frac{\partial E(r, \varphi)}{\partial \varphi} r dr d\varphi, \quad (4)$$

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi) E(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (5)$$

где  $E^*(x, y)$  – комплексно сопряженная амплитуда. Можно показать, что нормированный ОУМ пучка (2) также будет равен (3):  $J_z/W = n/2$ .

Из (2) также видно, что многочлен  $1 + z + z^2 + z_3 + \dots + z_n$  (где  $z = e^{i\varphi}$ ) имеет  $n$  корней. То есть амплитуда поля (2) равна нулю на  $n$  лучах, исходящих из центра под углами  $\varphi = 2\pi p / (n+1)$  ( $p = 1, \dots, n$ ). Эти лучи представляют собой в топологическом смысле краевые дислокации, так как при обходе по контуру вокруг центра и при пересечении этих лучей с нулевой интенсивностью фаза скачком меняется на  $\pi$ . Распределение интенсивности поля (2) имеет вид светового лепестка, вытянутого вдоль положительного направления горизонтальной оси, и максимальное значение интенсивности находится на луче при  $\varphi = 0$ . Это следует из раскрытия неопределенности  $0/0$  в (2) при подстановке  $\varphi = 0$ . Максимальная интенсивность будет равна  $(n+1)^2$  при  $r = 0$ . Еще у поля (2) будут  $(n-1)$  боковых лепестков интенсивности, лежащих между  $n$  краевых дислокаций. Полное число лепестков интенсивности (центральный и боковые) равно  $n$ .

### 2. Геометрическая прогрессия вихрей в зоне дифракции Френеля

Найдем асимптотику амплитуды поля (2) при любом  $z > 0$  и при  $r \rightarrow \infty$ , чтобы по этой асимптотике найти ТЗ при распространении поля (2). Найдем сначала с помощью преобразования Френеля амплитуду для каждого слагаемого в (2). Пусть в начальной плоскости имеется Гауссов оптический вихрь (ОВ):

$$E_n(r, \varphi) = e^{-r^2/w^2 + in\varphi}, \quad (6)$$

тогда на расстоянии  $z$  от начальной плоскости его комплексная амплитуда примет вид [18]:

$$E_n(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{z_0}{zq} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + in\theta\right) \times \sqrt{\xi} \exp(-\xi) \left[ I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \right], \quad (7)$$

где

$$\xi = \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right)^2 \left(\frac{1}{2q}\right), \quad q = 1 - i \frac{z_0}{z}. \quad (8)$$

В (7)  $I_\mu(x)$  – модифицированная функция Бесселя,  $k$  – волновое число света,  $z_0 = kw^2/2$  – длина Рэлея,  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты в поперечной плоскости на расстоянии  $z$ . При больших значениях аргумента  $\rho \gg w$ , используя асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя и оставив в нём

только первые два слагаемых, получим приближённое выражение для разности двух модифицированных функций Бесселя соседних порядков при больших значениях аргументов:

$$I_{\frac{n-1}{2}}(\xi) - I_{\frac{n+1}{2}}(\xi) \sim \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[ 4\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\} - \frac{e^\xi}{\sqrt{2\pi\xi}} \left\{ 1 - \frac{1}{8\xi} \left[ 4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - 1 \right] \right\} = \frac{ne^\xi}{2\xi\sqrt{2\pi\xi}}. \quad (9)$$

Тогда поле (2) при больших значениях  $\rho \gg w$  примет вид:

$$E_n(\rho, \theta, z) = \frac{-iz_0}{4zq\xi} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \sum_{p=1}^n p \exp(ip\bar{\theta}) = \frac{-iz_0}{4zq\xi} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right) \frac{e^{i\bar{\theta}}(1 + ne^{i(n+1)\bar{\theta}}) - (n+1)e^{in\bar{\theta}}}{(1 - e^{i\bar{\theta}})^2}, \quad (10)$$

где  $\bar{\theta} = \theta - \pi/2$ . Выражение (10) получено из условия, что если

$$F(\varphi) = \sum_{p=0}^n e^{ip\varphi},$$

то выражение

$$\sum_{p=0}^n p e^{ip\varphi},$$

равно производной  $-i\partial F(\varphi)/\partial\varphi$ . Можно показать, что при  $\bar{\theta} = 0$ , то есть при  $\theta = \pi/2$ , интенсивность будет максимальной. Выражение в квадратных скобках в (10) можно переписать в виде:

$$\frac{e^{i\bar{\theta}}(1 + ne^{i(n+1)\bar{\theta}}) - (n+1)e^{in\bar{\theta}}}{(1 - e^{i\bar{\theta}})^2} = -\frac{(1 + ne^{i(n+1)\bar{\theta}}) - (n+1)e^{in\bar{\theta}}}{4\sin^2\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)}. \quad (11)$$

При больших  $n$  единиц в числителе (11) можно пренебречь, и тогда ТЗ поля (10) будет определяться конкуренцией двух ОВ:

$$ne^{i(n+1)\bar{\theta}} - (n+1)e^{in\bar{\theta}}. \quad (12)$$

В работе [18] показано, что ТЗ суперпозиции двух ОВ типа (12) равен ТЗ того ОВ, у которого амплитуда (модуль) больше:  $(n+1) > n$ . То есть ТЗ поля (2) на расстоянии  $z$  от начальной плоскости равен  $TC = n$ . Это можно объяснить тем, что в суперпозиции (10)  $\Sigma p e^{ip\varphi}$  последний член  $n \exp(in\varphi)$  имеет максимальный коэффициент (мощность пучка), поэтому ТЗ этого слагаемого «побеждает» в топологической конкуренции. Из (12) получается, что, хотя в начальной плос-

кости ТЗ поля (2) равен  $TC = n/2$ , далее при распространении пучка (2) в свободном пространстве ТЗ будет равен  $TC = n$ .

### 3. Усеченная геометрическая прогрессия оптических вихрей

Вернемся далее к полю (2) и рассмотрим его модификации. Интересно, что если в амплитуде светового поля (1) убрать безвихревой член, то есть 1, то вместо (2) получим:

$$E_{2n}(r, z) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{i(n+1)\varphi}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что топологический заряд поля (13) равен:

$$TC = (n+1)/2. \quad (14)$$

При распространении светового поля ( $z > 0$ ) асимптотика его комплексной амплитуды при больших расстояниях от оптической оси ( $r \rightarrow \infty$ ) будет описываться выражением, точно совпадающим с выражением (10). То есть ТЗ поля (13) при  $z > 0$  будет таким же, как у поля (1), то есть равен  $TC = n$ .

Поступая аналогично, можно вместо поля (13) рассмотреть поле в виде геометрической прогрессии, начинающейся с  $k$ -го слагаемого. То есть из (13) мы убираем первые  $(k-1)$  слагаемых. Тогда вместо (13) запишем:

$$E_{kn}(r, z) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (e^{ik\varphi} + e^{i(k+1)\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{i(n+k)\varphi}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n-k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что фаза поля (15) равна  $(n+k)\varphi/2$ , а значит, ТЗ равен  $TC = (n+k)/2$ . Интересно, что если оставить в поле (1) всего одно слагаемое с номером  $k = n$ , то по формуле (15) получим целый ТЗ, равный  $TC = n$ .

### 4. Геометрическая прогрессия вихрей с симметричным ОУМ-спектром

Заметим, что геометрические прогрессии (1), (13) и (15) имеют равномерный ОУМ-спектр, то есть все коэффициенты при угловых гармониках в этих суперпозициях одинаковые и равны единице. В работе [20] было показано, что если у светового поля ОУМ-спектр симметричный, то его нормированный ОУМ равен номеру (топологическому заряду) центральной

угловой гармонике. Это полностью применимо и к полям (1), (13) и (15). Действительно, средний номер гармонике, которая находится в центре ОУМ-спектра, равен  $n/2$ ,  $(n+1)/2$  и  $(n+k)/2$  соответственно. Можно доказать, что если суперпозиция (1) имеет действительные коэффициенты и симметричный ОУМ-спектр, то ТЗ в начальной плоскости такой суперпозиции будет равен номеру центральной гармоники. Действительно, рассмотрим вместо прогрессии (1) суперпозицию вида:

$$E_{sn}(r, z) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (C_0 + C_1 e^{i\varphi} + C_2 e^{i2\varphi} + \dots + C_n e^{in\varphi}). \quad (16)$$

И пусть коэффициенты симметричны относительно центрального с номером  $n_0 = n/2$ , то есть  $C_{n_0-k} = C_{n_0+k}$ . Если  $n$  – нечётное число, то центр ОУМ-спектра поля (16) будет находиться посередине между номерами  $(n-1)/2$  и  $(n+1)/2$ . С учетом симметричности коэффициентов поле (16) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E_{sn}(r, z) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sum_{k=0}^n C_k e^{ik\varphi} = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left[ C_{n_0} e^{in_0\varphi} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{n_0} (C_{n_0-k} e^{i(n_0-k)\varphi} + C_{n_0+k} e^{i(n_0+k)\varphi}) \right] = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left( C_{n_0} e^{in_0\varphi} + \right. \\ &+ \left. 2e^{in_0\varphi} \sum_{k=1}^{n_0} C_{n_0-k} \cos k\varphi \right) = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in_0\varphi\right) \left( C_{n_0} + 2 \sum_{k=1}^{n_0} C_{n_0-k} \cos k\varphi \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Выражение в правых круглых скобках действительное, поэтому ТЗ выражения (17) равен номеру центральной гармоники  $TC = n_0 = n/2$ . В качестве примера суперпозиции с симметричным ОУМ-спектром (16) можно рассмотреть поле вида ( $a > 0$ ):

$$\begin{aligned} E_{sn}(r, z) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \sum_{k=-n_0}^{n_0} \frac{a^{|k|}}{|k|!} \exp(i(n_0+k)\varphi) = \\ &= 2 \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in_0\varphi\right) \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a^{|k|}}{|k|!} \cos(k\varphi), \quad n_0 = n/2. \end{aligned} \quad (18)$$

Еще одним примером суперпозиции с симметричным ОУМ-спектром является суперпозиция вихрей, у которых коэффициенты подобраны так, чтобы амплитуда представляла бином Ньютона:

$$\begin{aligned} E_{3n}(r, z) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (1 + e^{i\varphi})^n = \\ &= 2^n \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{in\varphi}{2}\right) \left( \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^n. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) видно, что топологический заряд суперпозиции оптических вихрей в виде бинома Ньютона также целый или полуцелый и равен выражению (3):  $TC = n/2$ .

Вместо (19) можно рассмотреть сумму двух оптических вихрей, амплитуда которых возведена в степень:

$$\begin{aligned} E_{3n}(r, z) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (e^{ip\varphi} + e^{iq\varphi})^n = \\ &= 2^n \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{in(p+q)\varphi}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\varphi(p-q)}{2}\right) \right]^n. \end{aligned} \quad (20)$$

У суперпозиции оптических вихрей (20) топологический заряд будет равен:

$$TC = n(p+q)/2 \quad (21)$$

и может быть целым или полуцелым.

### 5. Неограниченная геометрическая прогрессия оптических вихрей

Интересно узнать, какой будет ТЗ у поля (1), если его записать в виде бесконечной геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} E_{\infty}(r, z) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (1 + qe^{i\varphi} + q^2 e^{i2\varphi} + \dots + q^n e^{in\varphi} + \dots) = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left( \frac{1}{1 - qe^{i\varphi}} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $|q| < 1$ .

Аргумент (фаза) комплексной амплитуды (22) имеет вид:

$$\arg E_{\infty}(r, z) = \operatorname{arctg} \left( \frac{q \sin \varphi}{1 - q \cos \varphi} \right). \quad (23)$$

Подставляя функцию (23) в формулу М.В. Берри [21] для расчета ТЗ, получим:

$$\begin{aligned} TC &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\partial \arg E_{\infty}(r, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{q \cos \varphi - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \varphi} d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $|q| < 1$ .

Из (24) следует, что, хотя поле (22) является бесконечной суперпозицией оптических вихрей, его ТЗ при  $|q| < 1$  будет равен нулю.

Аналогично можно показать, что ТЗ бесконечной прогрессии (при  $|q| < 1$ )

$$\begin{aligned} E_{1\infty}(r, z) &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) (qe^{i\varphi} + q^2 e^{i2\varphi} + \dots + q^n e^{in\varphi} + \dots) = \\ &= \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \left( \frac{qe^{i\varphi}}{1 - qe^{i\varphi}} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

полученной на основе поля (13), будет равен 1. Оба этих результата можно объяснить тем, что ТЗ суперпозиции (22) или (25) равен ТЗ того слагаемого, у которого максимальный коэффициент (мощность). В суперпозиции (22) максимальная парциальная мощность у первого слагаемого 1, и ТЗ равен нулю. В суперпозиции (25) максимальная мощность тоже у первого слагаемого  $q \exp(i\varphi)$ , и ТЗ равен 1.

**6. Суперпозиция вихрей как геометрическая прогрессия с параметром**

Пусть осевая суперпозиция оптических вихрей описывается конечной геометрической прогрессией с параметром. Тогда комплексная амплитуда такой суперпозиции в начальной плоскости будет иметь вид:

$$E_{1nk}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) \times \left(a^k e^{ikm\varphi} + a^{k+1} e^{i(k+1)m\varphi} + \dots + a^n e^{inm\varphi}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) a^k e^{ikm\varphi} \left(\frac{1 - a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}}{1 - a e^{im\varphi}}\right). \tag{26}$$

Выражение (26) описывает четырёхпараметрическое семейство лазерных пучков, у которого три целых параметра ( $k, n, m$ ) и один действительный параметр ( $a$ ).

При одинаковых по модулю весовых коэффициентах (то есть  $|a|=1$ ) выражение (26) можно преобразовать, выделив явно аргумент комплексного числа (фазу поля (1)):

$$E_{1nk}(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i \frac{k+n}{2} m\varphi'\right) \times \left\{ \frac{\sin\left(\frac{n-k+1}{2} m\varphi'\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} m\varphi'\right)} \right\}, \tag{27}$$

где  $\varphi' = \varphi + m^{-1} \arg a$ . Из (27) видно, что аргумент (фаза) суперпозиции (1) равен  $[m(n+k)\varphi']/2$ , поэтому топологический заряд  $TC$  оптического вихря (26) будет равен:

$$TC = m(n+k)/2. \tag{28}$$

Видно, что при  $m=k=1$  ТЗ (28) совпадает с (14). В общем же случае, при  $|a| \neq 1$ , ТЗ может быть получен с помощью теории вычетов. Подставим правую часть выражения (26) в формулу Берри (24), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \text{Im} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{ima^k e^{ikm\varphi}}{1 - a e^{im\varphi}} - \frac{ikm - i(n+1)ma^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}}{1 - a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}} \right] d\varphi = mm + \frac{m}{2\pi} \text{Re} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a e^{im\varphi}} - \frac{m(n-k+1)}{2\pi} \text{Re} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a^{n-k+1} e^{i(n-k+1)m\varphi}}. \tag{29}$$

Первый интеграл в (29) равен

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a e^{im\varphi}} = \begin{cases} 2\pi, & |a| < 1, \\ \pi, & |a| = 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases} \tag{30}$$

Второй интеграл вычисляется аналогично и равен первому. Окончательно получим, что ТЗ геометрической прогрессии оптических вихрей в начальной плоскости (26) существенно зависит от величины параметра  $a$  и равен:

$$TC = \begin{cases} km, & |a| < 1, \\ \frac{k+n}{2}m, & |a| = 1, \\ nm, & |a| > 1. \end{cases} \tag{31}$$

**7. Численное моделирование**

Так как суперпозиция (26) обобщает суперпозиции (1), (13) и (15), то моделирование проведем для выражения (26). На рис. 1 показаны распределения интенсивности и фазы светового поля (26) при  $n=3, k=0, m=1, a=1, w_0=500$  мкм в разных плоскостях:  $z=0$  (рис. 1а, и),  $z=z_0/200$  (рис. 1б, к),  $z=z_0/50$  (рис. 1в, л),  $z=z_0/20$  (рис. 1з, м),  $z=z_0/10$  (рис. 1д, н),  $z=z_0/2$  (рис. 1е, о),  $z=z_0$  (рис. 1ж, п),  $z=2z_0$  (рис. 1з, р).

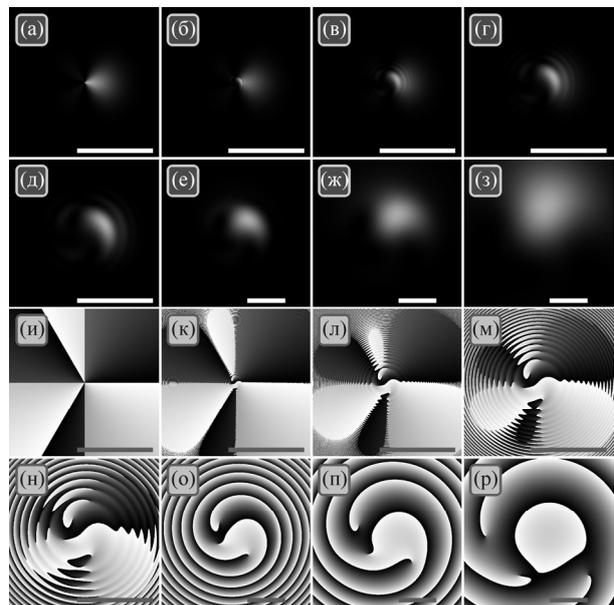


Рис. 1. Распределения интенсивности (а-з) и фазы (и-р) светового поля (1) при  $n=3, k=0, m=1, a=1, w_0=500$  мкм в плоскостях:  $z=0$  (а, и),  $z=z_0/200$  (б, к),  $z=z_0/50$  (в, л),  $z=z_0/20$  (з, м),  $z=z_0/10$  (д, н),  $z=z_0/2$  (е, о),  $z=z_0$  (ж, п),  $z=2z_0$  (з, р)

Рис. 1а подтверждает, что в начальной плоскости распределение интенсивности имеет вид светового лепестка ( $m=1$ ), вытянутого вдоль положительного направления горизонтальной оси. Однако расходимость оптических вихрей возрастает с их топологиче-

ским зарядом, поэтому все составляющие поля в суперпозиции (26) расходятся по-разному и при распространении лепестков расщепляется на световые дуги, что видно на рис. 1б–з. Затем из-за большей расходимости вихрей с большим зарядом их затухание тоже сильнее, и потому на картине остаётся только одно световое пятно (рис. 1е–з).

Численный расчёт ТЗ по формуле М.В. Берри (29) дал следующие значения: 1,49 ( $z=0$ ), 0,98 ( $z=z_0/200$ ), 2,29 ( $z=z_0/50$ ), 2,97 ( $z=z_0/20$ ), 2,97 ( $z=z_0/10$ ), 2,99 ( $z=z_0/2$ ), 3,00 ( $z=z_0$ ), 3,00 ( $z=2z_0$ ). То есть полуцелый заряд  $n/2$  в начальной плоскости ( $TC=1,5$ ) приобретает целое значение  $n$  ( $TC=3$ ) при распространении в пространстве.

Большое отклонение численного значения ТЗ от теоретического при малых расстояниях ( $z=z_0/200$ ) здесь и далее в работе вызвано большой погрешностью расчёта поля в параксиальном приближении. В частности, выражение (7) для амплитуды отдельного вихря в суперпозиции содержит фазовый множитель  $\exp[ik\rho^2/(2z)]$ , который приводит к быстрым осцилляциям фазы при малых расстояниях  $z$ . Вычисление ТЗ по такой быстро осциллирующей фазе приводит к существенным ошибкам.

Для демонстрации влияния шага топологического заряда в прогрессии  $m$  на рис. 2 показаны распределения интенсивности и фазы светового поля (26) при  $n=3$ ,  $k=0$ ,  $m=5$ ,  $a=1$ ,  $w_0=500$  мкм в разных плоскостях:  $z=0$  (рис. 2а,и),  $z=z_0/200$  (рис. 2б,к),  $z=z_0/50$  (рис. 2в,л),  $z=z_0/20$  (рис. 2г,м),  $z=z_0/10$  (рис. 2д,н),  $z=z_0/2$  (рис. 2е,о),  $z=z_0$  (рис. 2ж,п),  $z=2z_0$  (рис. 2з,р).

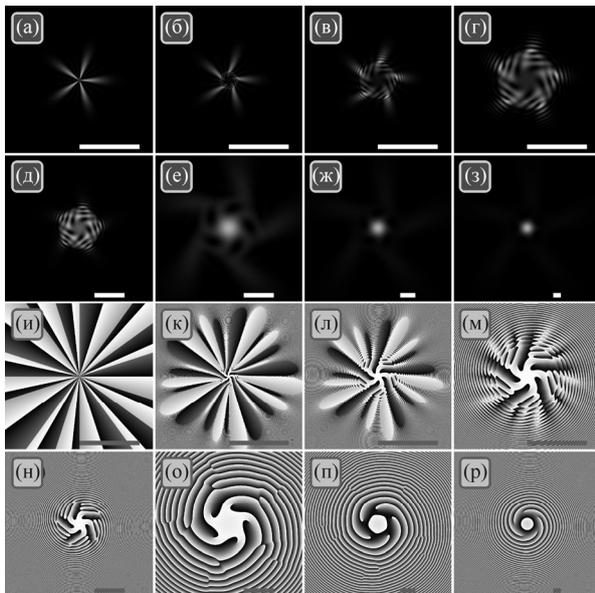


Рис. 2. Распределения интенсивности (а–з) и фазы (и–р) светового поля (1) при  $n=3$ ,  $k=0$ ,  $m=5$ ,  $a=1$ ,  $w_0=500$  мкм в плоскостях:  $z=0$  (а, и),  $z=z_0/200$  (б, к),  $z=z_0/50$  (в, л),  $z=z_0/20$  (г, м),  $z=z_0/10$  (д, н),  $z=z_0/2$  (е, о),  $z=z_0$  (ж, п),  $z=2z_0$  (з, р)

Рис. 2а подтверждает, что в начальной плоскости распределение интенсивности имеет форму пяти лепестков ( $m=5$ ), вытянутых под углами  $\varphi=2\pi p/5$  ( $p=0, \dots, 4$ ). Как и в случае  $m=1$ , вследствие разной расходимости оптических вихрей при распространении лепестки сначала расщепляются на световые дуги (рис. 2б–д) и затем на картине остаётся только одно пятно, максимум интенсивности на оптической оси (рис. 2е–з).

Численный расчёт ТЗ по формуле М.В. Берри (29) дал следующие значения: 7,48 ( $z=0$ ),  $-1,37$  ( $z=z_0/200$ ), 12,84 ( $z=z_0/50$ ), 14,64 ( $z=z_0/20$ ), 14,64 ( $z=z_0/10$ ), 14,98 ( $z=z_0/2$ ), 14,94 ( $z=z_0$ ), 14,77 ( $z=2z_0$ ). То есть полуцелый заряд  $mn/2$  ( $TC=7,5$ ) в начальной плоскости приобретает целое значение  $mn$  ( $TC=15$ ) при распространении в пространстве.

Далее рассмотрим, как меняется топологический заряд при удалении первых слагаемых из прогрессии (26), то есть при  $k \neq 0$ . На рис. 3 показаны распределения интенсивности и фазы светового поля (26) при  $n=11$ ,  $k=0$  (рис. 3а–з),  $k=2$  (рис. 3д–з),  $k=5$  (рис. 3и–м),  $m=1$ ,  $a=1$ ,  $w_0=500$  мкм в начальной плоскости  $z=0$  (рис. 3а, б, д, е, и, к) и в дальней зоне  $z=2z_0$  (рис. 3в, г, ж, з, л, м).

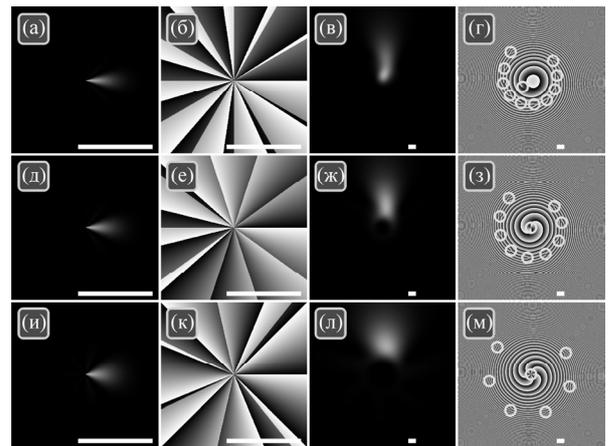


Рис. 3. Распределения интенсивности (столбцы 1 и 3) и фазы (столбцы 2 и 4) светового поля (1) при  $n=11$ ,  $k=0$  (а–з),  $k=2$  (д–з),  $k=5$  (и–м),  $m=1$ ,  $a=1$ ,  $w_0=500$  мкм в начальной плоскости  $z=0$  (а, б, д, е, и, к) и в дальней зоне  $z=2z_0$  (в, г, ж, з, л, м). Окружностями на распределениях фазы (з, з, м) обведены оптические вихри

Численный расчёт ТЗ по формуле М.В. Берри (29) дал следующие значения в начальной плоскости  $z=0$ : 5,49 ( $k=0$ ), 6,49 ( $k=2$ ), 7,99 ( $k=5$ ). В дальней зоне  $z=2z_0$  были получены значения 10,96 ( $k=0$ ),  $k=2$ ,  $k=5$ ). То есть полуцелый заряд  $(n+k)/2$  в начальной плоскости приобретает целое значение  $n$  ( $TC=11$ ) при распространении в пространстве. Структура оптических вихрей на рис. 3 имеет интересную особенность. В центре на оптической оси формируется оптический вихрь с ТЗ, равным  $k$ : 0 (рис. 3з), 2 (рис. 3з) и 5 (рис. 3м). Этот осевой оптический вихрь окружают вихри с ТЗ, равным  $+1$ , число которых дополняет ТЗ до  $n=11$ : 11 (рис. 3з), 9 (рис. 3з) и 6 (рис. 3м).

### Заключение

В работе найден ТЗ четырёхпараметрического семейства оптических вихрей, комплексная амплитуда которых является линейной комбинацией в виде геометрической прогрессии из Гауссовых оптических вихрей. Прогрессия может быть возрастающей по модулю каждого члена, убывающей или стационарной. Первый член прогрессии имеет вид  $a^k \exp[-(r/w)^2 + ikm\phi]$ , последний член прогрессии  $a^n \exp[-(r/w)^2 + inm\phi]$ , знаменатель прогрессии  $a \exp(im\phi)$ . Параметры семейства оптических вихрей: целые числа ( $k, n, m$ ) и действительное число  $a$ . Если  $a < 1$ , то прогрессия убывающая и ТЗ суперпозиции равен топологическому заряду первого члена прогрессии ( $TC = km, k < n$ ), так как первый член описывает оптический вихрь с наибольшей мощностью в суперпозиции. Если  $a > 1$ , то прогрессия возрастающая и ТЗ суперпозиции равен топологическому заряду последнего члена прогрессии ( $TC = nm$ ), так как последний член описывает оптический вихрь с наибольшей мощностью в суперпозиции. И при  $a = 1$  прогрессия стационарная, ее ОУМ-спектр симметричный и ТЗ суперпозиции равен номеру средней угловой гармоники ( $TC = (k + n)m/2$ ). В последнем случае ТЗ суперпозиции может быть полупеллым в начальной плоскости. Но при распространении в свободном пространстве ТЗ стационарной прогрессии оптических вихрей становится целым ( $TC = nm$ ) и сохраняется при распространении. Ранее в [22] было показано, что если спиральную фазовую пластинку с пропусканием  $\exp(in\phi)$ , изготовленную для определенной длины волны  $\lambda_0$ , осветить лазерным светом с другой длиной волны  $\lambda$ , то ТЗ  $n$  становится дробным  $n(\lambda_0/\lambda)$  и при распространении в поле, согласно [21], число вихрей должно удвоиться, и ТЗ станет целым числом, равным  $2n$ . Но это верно только приближённо, так как для оптического вихря с начальным дробным ТЗ при распространении ТЗ не определен [19]. В случае геометрической прогрессии оптических вихрей, если начальный ТЗ полупеллым ( $TC = n/2$ ), то при распространении ТЗ становится определенным целым и в 2 раза большим числом ( $TC = n$ ).

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 22-12-00137) (теория), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (моделирование).

### References

- [1] Chen J, Wan C, Chong A, Zhan Q. Experimental demonstration of cylindrical vector spatiotemporal optical vortex. *Nanophotonics* 2021; 10(18): 4489-4495. DOI: 10.1515/nanoph-2021-0427.
- [2] Long J, Hou T, Chang Q, Yu T, Su R, Ma P, Ma Y, Zhou P, Si L. Generation of optical vortex lattices by a coherent beam combining system. *Opt Lett* 2021; 46(15): 3665-3668. DOI: 10.1364/OL.425186.
- [3] Ikonnikov DA, Myslivets SA, Arkhipkin VG, Vyunishev AM. 3D optical vortex lattices. *Ann Phys* 2021; 533(7): 2100114. DOI: 10.1002/andp.202100114.
- [4] Yang Y, Ren Y-X, Chen M, Arita Y, Rosales-Guzmán C. Optical trapping with structured light: a review. *Adv Photon* 2021; 3(3): 034001. DOI: 10.1117/1.AP.3.3.034001.
- [5] Li C, Maier SA, Ren H. Optical vortices in nanophotonics. *Chinese Optics* 2021; 14(4): 792-811. DOI: 10.37188/CO.2021-0066.
- [6] Pryamikov A, Hadzievski L, Fedoruk M, Turitsyn S, Aceves A. Optical vortices in waveguides with discrete and continuous rotational symmetry. *J Eur Opt Soc* 2021; 17: 23. DOI: 10.1186/s41476-021-00168-5.
- [7] Volyar AV, Abramochkin EG, Akimova YE, Bretsko MV. Reconstruction of stable states of spiral vortex beams. *Computer Optics* 2022; 46(1): 5-15. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1032.
- [8] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [9] Durnin J, Miceli JJ Jr, Eberly JH. Diffraction-free beams. *Phys Rev Lett* 1987; 58(15): 1499-1501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.1499.
- [10] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun* 1987; 64(6): 491-495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
- [11] Kotlyar VV, Almazov AA, Khonina SN, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate. *J Opt Soc Am A* 2005; 22(5): 849-861. DOI: 10.1364/JOSAA.22.000849.
- [12] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. *Opt Lett* 2007; 32(7): 742-744. DOI: 10.1364/OL.32.000742.
- [13] Karimi E, Zito G, Piccirillo B, Marrucci L, Santamato E. Hypergeometric-Gaussian modes. *Opt Lett* 2007; 32(21): 3053-3055. DOI: 10.1364/OL.32.003053.
- [14] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Circular beams. *Opt Lett* 2008; 33(2): 177-179. DOI: 10.1364/OL.33.000177.
- [15] Bandres MA, Gutiérrez-Vega JC. Elliptical beams. *Opt Express* 2008; 16(25): 21087-21092. DOI: 10.1364/OE.16.021087.
- [16] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Opt Lett* 2014; 39(8): 2395-2698. DOI: 10.1364/OL.39.002395.
- [17] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Generalized Gaussian beams. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6: S157-S161. DOI: 10.1088/1464-4258/6/5/001.
- [18] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt Express* 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.
- [19] Nalimov AG, Kotlyar VV. Topological charge of optical vortices in the far field with an initial fractional charge: optical "dipoles". *Computer Optics* 2022; 46(2): 189-195. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1073.
- [20] Kotlyar VV, Kovalev AA. Optical vortex beams with a symmetric and almost symmetric OAM spectrum. *J Opt Soc Am A* 2021; 38(9): 1276-1283. DOI: 10.1364/JOSAA.432623.
- [21] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [22] Gbur G. Fractional vortex Hilbert's hotel. *Optica* 2016; 3(3): 222-225. DOI: 10.1364/OPTICA.3.000222.

---

**Сведения об авторах**

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0003-1737-0393.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 200 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0002-0488-4267.

---

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 22 апреля 2022 г. Окончательный вариант – 25 мая 2022 г.

---

---

# Topological charge of superposition of optical vortices described by a geometric sequence

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPPI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,

<sup>2</sup> Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

## Abstract

Here, we investigate coaxial superpositions of Gaussian optical vortices that can be described by a geometric sequence. For all superpositions analyzed, a topological charge (TC) is derived. In the initial plane, the TC can be either integer or half-integer, acquiring an integer value upon free-space propagation of the light field. Generally, the geometric sequence of optical vortices (GSOV) has three integer parameters and one real parameter. Values of these four parameters define the TC of the GSOV. Upon free-space propagation, the intensity pattern of the GSOV is not conserved, but can have intensity petals whose number is equal to one of the four beam parameters. If the GSOV has a unit real parameter, all constituent angular harmonics in the superposition have the same weight. In this case, the TC of the superposition is equal to the average index of the constituent angular harmonics. For instance, if the TC of the first and of the last angular harmonics, respectively, equals  $k$  and  $n$ , then the total TC of the superposition in the initial plane will be  $(n+k)/2$ , becoming equal to  $n$  upon free-space propagation.

**Keywords:** optical vortex, superposition, geometric sequence, topological charge.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of a superposition of optical vortices described by a geometric sequence. *Computer Optics* 2022; 46(6): 864-871. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1152.

**Acknowledgements:** The work was funded by the Russian Science Foundation grant 22-12-00137 (theory), as well as by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the government project of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (simulation).

---

## Authors' information

**Victor Victorovich Kotlyar** is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: [kotlyar@ipsiras.ru](mailto:kotlyar@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0003-1737-0393.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPPI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru). ORCID: 0000-0002-0488-4267.

---

Received April 22, 2022. The final version – May 25, 2022.

---